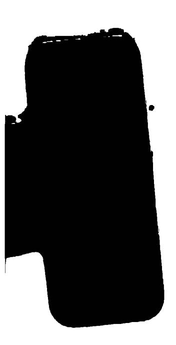
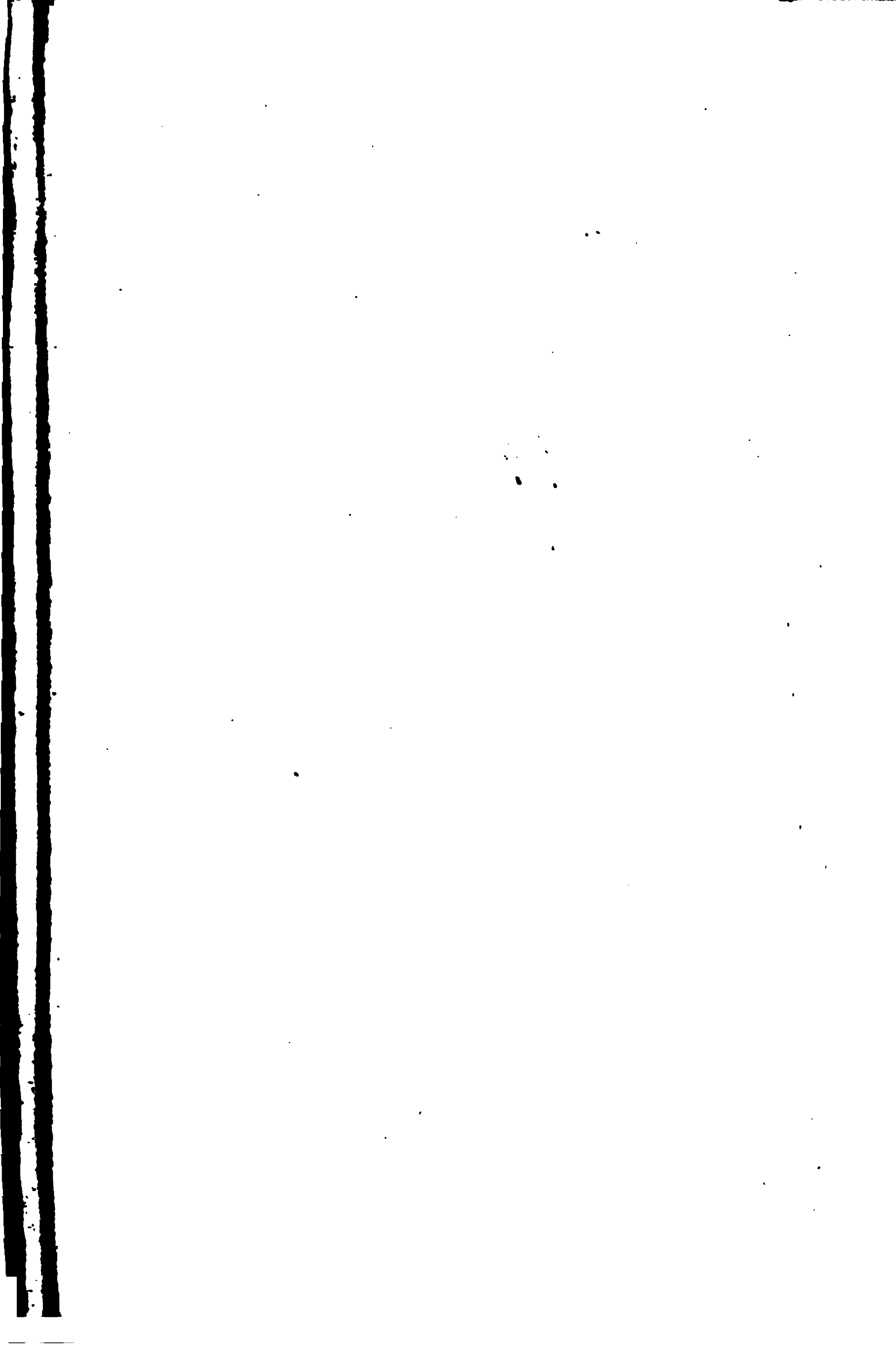






Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

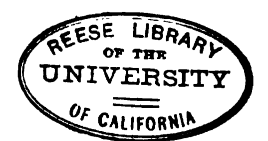
und

Dr. M. Cantor.



Dreizehnter Jahrgang.

Mit 5 lithographirten Tafeln.



LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1868.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

I.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von

Professor Dr. Eduard Zetzsche.

V. Die unterseeische Telegraphie.

(Zweite Abtheilung.)

(Hierzu Tafel I, Fig. 1—37.)

Nachdem wir in dem vorhergehenden Aufsatze einen Ueberblick über die Entstehung und Ausbreitung der unterseeischen Telegraphie zu geben versucht haben, lenken wir nun unsere Aufmerksamkeit auf

II. Die unterseeische Leitung selbst.

In Betreff der Unterseekabel oder Telegraphentaue, welche die Leitungen für die unterseeischen Telegraphen bilden, sind vorwiegend folgende Punkte näher zu erörtern: die Einrichtung und Herstellung der Unterseetaue, die Prüfung derselben, ihre Legung und nöthigenfalls ihre Wiederaufholung und Ausbesserung.

1. Die Einrichtung und Herstellung der Unterseetaue.

An jedem unterseeischen Telegraphenseile lassen sich drei verschiedene Theile unterscheiden, nämlich der eigentliche Leiter, die Isolationsmittel und die Schutzmittel.

Das Material, welches **den eigentlichen Leiter** der Elektricität bilden soll, muss namentlich bei langen Unterseeleitungen ein möglichst guter Leiter sein und darf zugleich weder an sich selbst, noch durch das Isolationsmittel und durch die elektrischen Wirkungen des Stroms Veränderungen ausgesetzt sein, welche das Leitungsvermögen vermindern oder gar den metallischen Zusammenhang des Leiters gefährden; ebenso wenig darf der Leiter eine nachtheilige Wirkung auf das Isolationsmittel aus-

üben. Diesen Anforderungen entspricht möglichst reines Kupfer ziemlich vollkommen, weshalb es fast allgemein für diesen Zweck Verwendung gefunden hat. Das Kupfer muss natürlich sehr sorgfältig ausgewählt und vor seiner Verwendung auf seine Leitungsfähigkeit untersucht werden. Zu noch grösserer Sicherheit jedoch schlug C. F. Varley vor, einen oder mehrere der Drähte, aus denen die Leitung hergestellt wird, ganz oder theilweise aus Platin zu machen, damit, falls ja das Kupfer weggefressen würde, das Platin den Strom noch leiten könne (Deutsche Industrie-Ztg. 1866, S. 338). Ausser dem Kupfer kam auch Eisen zur Anwendung; so legte T. P. Shaffner Eisendrähte Nr. 10 im Mississippi und S. C. Bishop in New-York im Hudson (*Shaffner*, *telegraph manual*, S. 600 und 603). Baudouin endlich schlug vor, Aluminium zu verwenden. Anfänglich benutzte man einen einfachen Kupferdraht von entsprechendem Querschnitte. Bei dem im Sommer 1856 im St. Lorenzbusen versenkten, von Glass, Elliot & Co. verfertigten Tau war zum ersten Male der Leiter aus mehreren Kupferdrähten (nach *Shaffner*, *tel. man.* S. 617 aus vier, nach Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 178 und Ztg. d. Vereins deutschen Eisenbahnverw. 1861, S. 334 aus sieben Drähten Nr. 22) zusammengedreht (*Mechanics Magazine* 64, S. 513). Schon am 21. Juni 1854 hatte Henry Vernon Physick in London ein Patent auf solche aus mehreren Drähten zusammengedrehte oder geflochtene Leiter erhalten, während Professor William Thompson und die Civilingenieure John Thompson und William John Macquorn Rankine, sämmtlich in Glasgow, unterm 4. December ein ganz ähnliches Patentgesuch eingereicht hatten (*Mech. Mag.* 62, S. 40 u. 620). Im September 1857 wurde ein Tau mit 4 aus je 4 Dräthen bestehenden Leitern zwischen Sardinien und Afrika gelegt, und seitdem werden die Leiter vorwiegend aus mehreren zusammengedrehten oder parallel neben einander liegenden Kupferdrähten hergestellt; sehr häufig wendet man 7 Dräthe an, von denen 6 spiralförmig um den siebenten herumgewunden werden. Dabei hat man, obwohl die Leitungsfähigkeit etwas geringer wird (nach Whitehouse etwa 8%; Delamarche, Elemente der unterseeischen Telegraphie S. 24), offenbar eine vermehrte Sicherheit gegen eine Beschädigung des kupfernen Leiters (Ader). Besteht nämlich die Ader aus blos 1 Drahte, so könnte sie bei einer etwa in diesem vorhandenen fehlerhaften oder schadhaften Stelle leicht reissen und der ganze Leiter wäre dann unbrauchbar. Bei einer aus mehreren Drähten oder Fäden gebildeten Ader dagegen können die einzelnen Drähte solche ursprünglich vorhandene oder später entstandene Fehlerstellen haben und sogar an solchen Stellen reissen, ohne dass dadurch die ganze Ader den Dienst versagt, weil es ganz unwahrscheinlich ist, dass in allen Drähten fehlerhafte Stellen neben einander zu liegen kommen. Ausserdem besitzt auch der zu mehrfädigen Adern verwendete feinere Draht an sich schon eine grössere Gleichartigkeit und solche aus mehreren Drähten zusammengedrehte

Adern vertragen eine grössere Dehnung. Freilich werden sich bei mehrfädigen Adern auch mehr Stellen finden, an denen die einzelnen Drähte behufs ihrer Verlängerung zusammengelöthet sind, und daher muss dieses Zusammenlöthen der einzelnen zur Ader zu verseilenden Drähte mit besonderer Sorgfalt ausgeführt werden, damit nicht durch unvollkommene Löthungen der Widerstand des Taues ohne Noth vermehrt werde. Wenn ferner ein Draht der Ader springt und zufällig die isolirende Hülle verletzt oder durchbohrt, so kann das eindringende Wasser das ganze Tau durchdringen und einen grösseren Stromverlust veranlassen; dem könnte man jedoch durch Zusammenlöthen der verschiedenen Drähte der Ader begenen (*Du Moncel*, *traité de telegraphie electrique*, S. 253).

Mit der Dicke des Leiters wächst zwar dessen Leitungsfähigkeit, allein auch die Schwierigkeiten bei der Herstellung, Verladung und Versenkung, weshalb man die Dicke nicht zu gross wählt. Bei langen Tauen hat der Leiter im Mittel etwa 2 Millimeter Durchmesser; bei kurzen Tauen kann man bis auf 1 Millimeter herabgehen. (Delamarche, Elemente S. 43.)

Die Zahl der Leiter in einem Taue wechselt zwischen 1 und 6. Die ersten Taue hatten in der Regel eine grössere Anzahl Leiter, während die in den letzten Jahren versenkten meist nur 1 Leiter enthalten. Mit der Zahl der Leiter wächst natürlich der Durchmesser des Taues, daher auch dessen Steifigkeit und Gewicht, sodass namentlich bei sehr grossen Tiefen dadurch zugleich die Legung schwieriger wird. Zu erwähnen ist hier noch ein am 15. September 1855 als Mittheilung patentirter Vorschlag von Gordon, unter Verzichtung der Benutzung der Erde als Rückleitung, zwei Drähte nahe an einander in dasselbe Tau zu legen und als einen Stromkreis zu benutzen, damit beide stets gleich stark, aber entgegengesetzt geladen, somit Rückströme und Inductionsströme in benachbarten Drahtpaaren unmöglich würden (*Mech. Mag.* 64 S. 424; Delamarche, Elemente der unterseeischen Telegraphie S. 19; vergl. auch Poggendorff's Annalen 102 S. 66). Ein ähnlicher Vorschlag von J. N. Hearder findet sich im *Civil Engineer and Architects Journal* 1859. S. 219.

Eine **isolirende Hülle** muss der Leitungsdraht erhalten, weil das Wasser die Elektricität leitet. Diese Hülle soll ausserdem undurchdringlich und im Wasser unveränderlich sein. Das jetzt vorwiegend zur Isolation verwendete Material ist Guttapercha. Getheertes Garn und Kautschuk sind zwar früher, als Guttapercha, aber nur vorübergehend angewandt worden. Die Guttapercha allein ist indess noch nicht ein so vollkommener Isolator, als man wünschen muss; daher benutzt man meist gleichzeitig noch irgend eine aus verschiedenen Stoffen zusammengesetzte Mischung. Die von L. Wray vorgeschlagene Mischung besteht aus 2 oder 2½ Theilen Kautschuk, ½ Theil Harz, 1 Theil gepulvertem Quarz oder Thonerde und etwa $1/9$ Theil Guttapercha; sie isolirt sehr gut, ist schwer schmelzbar und ihr Widerstand wächst mit der Temperatur, allein sie kann nicht an der

Oberfläche der Taue angewendet werden, da sie leider vom Meerwasser zerstört wird. Die noch geheim gehaltene Mischung von Hughes ist eine anscheinend der Steinkohle entstammende, klebrige Substanz, welche zwischen die verschiedenen Lagen von Guttapercha gebracht wird, um die Poren und Risse derselben auszufüllen. Radcliffe vermischt Guttapercha mit Kohle, um ihre Dauer zu erhöhen; dabei erhöht sich aber das Isolationsvermögen nicht wesentlich und es wird auch geringer, wenn die Temperatur steigt. Ebenso ist es bei der Mischung von Godefroy, welche aus Guttapercha und gestossenen Kokusnussschalen besteht. Die so häufig angewandte, am 9. August 1858 patentirte Mischung von John Chatterton (und Willoughby Smith) enthält 3 Theile Guttapercha, 1 Theil Stockholmer oder Holztheer und 1 Theil Harz, ein Verhältniss, bei dem das Ganze entsprechend flüssig ist; sie erhärtet in der Kälte, wird aber bei etwas höherer Temperatur flüssig; sie wird warm zwischen die verschiedenen Lagen Guttapercha aufgetragen (*Du Moncel*, *traite de tél. electr.* S. 254; Polytechnisches Centralblatt 1860 S. 342; 1863 S. 899). Siemens und Halske geben dem Leiter zunächst eine dünne Schicht Chatterton's Compound; hierauf werden ohne Anwendung von Wärme schmale, lange Bänder von Kautschuk aufgewalzt, dann wieder Chatterton's Compound und eine Lage Guttapercha; darüber kommen 2 Lagen von besonders vorbereiteten Hanfschnüren in entgegengesetzten Windungen und zuletzt wird ein Band von (phosphorhaltigem) Kupferblech spiralförmig um das Tau gewunden, so dass das Tau nicht dicker als $^3/_{16}$ Zoll und nicht theurer wird, als ein mit Eisendraht umhülltes (Deutsche Industrie-Zeitung 1864 S. 100; *Du Moncel*, *traité de tél. él.* S. 262).

Das Kautschuk muss rein sein, wird in schmalen Streifen angewendet, die mit ihren frischgeschnittenen Rändern an einander kleben, und das Ganze wird durch heisses Wasser gezogen, mit vulkanisirtem Kautschuk eingehüllt und einer höhern Temperatur ausgesetzt, damit sich die Flächen gut vereinigen. Siemens und Halske wenden parallele Längstreifen an, Silver dagegen windet die Streifen spiralförmig um; Biloret endlich wickelt Kautschukfäden um den Leitungsdraht (*Du Moncel*, *traité de tél. él.* S. 255—257).

Die Guttapercha muss ebenfalls möglichst rein sein und wird deshalb auf besonderen Maschinen gereinigt; sie wird in mehreren dünnen, von Blasen und Rissen freien, den Draht ringsum in gleicher Dicke umgebenden Lagen aufgebracht und äusserlich mit Stockholmer Theer umgeben, die umpressten Drähte dürfen der Luft und Wärme nicht ausgesetzt, sondern müssen an kühlen Orten in Rollen mit nur schwach gekrümmten Windungen, womöglich unter Wasser aufbewahrt werden. Denn während die Guttapercha im Süss- und im Meerwasser sich viele Jahre hindurch ganz unverändert erhält und erst bei 70° C. weich und knetbar wird, fängt sie schon bei 30° C. an zu erweichen und dabei könnte der Draht die Lage

genau in der Mitte seiner Hülle verlassen; an der Luft und im Licht ferner wird die Guttapercha bröckelig und zerbrechlich, wechselnde Nässe und Trockenheit aber zerstören sie sehr bald, besonders im Sonnenlichte. Vulkanisirte d. h. mit Schwefel versetzte Guttapercha bewährte sich nicht, da sich zunächst Schwefelkupfer bildete und dieses mit der Guttapercha zu einer dunkelbraunen, die Elektricität leitenden Masse verband. Bramley schlug vor, die Dauer der Guttapercha durch einen Zusatz von Creosot oder dgl. zu erhöhen (Polytechnisches Centralblatt 1860. S. 628).

Die Temperatur ist von Einfluss auf die isolirenden Stoffe, ebenso der Druck, dem sie ausgesetzt werden; letzterer verdichtet dieselben und vermehrt dadurch das Isolationsvermögen. Diese Stoffe nehmen an ihrer Oberfläche etwas Wasser auf, die Guttapercha jedoch vom Meerwasser nur eine unbedeutende Menge und nur in der äussersten Schicht; mehr dagegen nimmt Kautschuk auf. Die Wasseraufnahme ist um so grösser, je höher die Temperatur, je grösser die Dichte des Wassers und je kleiner die Dicke der isolirenden Schicht ist.

In Frankreich nimmt man allgemein an, das Kupfer der Drähte wirke reducirend auf das Kautschuk und bewirke dadurch dessen Zerfliessen, da ja das Weichwerden desselben von innen heraus beginne. Mit *Gomme vierge de Para* (amerikanisches Kautschuk) versetztes Kautschuk dagegen zeige dies nur an den der Luft ausgesetzten Drahtenden. Ausserdem könnte man dem entgegen arbeiten, wenn man zwischen Kupfer und Kautschuk eine Schicht von Guttapercha oder Chatterton's Mischung bringt.

Das Umpressen des Leitungsdrahtes mit Guttapercha erfolgt in einem grossen wagerecht liegenden Cylinder, welcher durch Dampf soweit erhitzt ist, dass die eingebrachte, in besonderen Kesseln bereits vorgewärmte und erweichte Guttapercha in ihm halbflüssig wird, infolge des mittelst eines in den Cylinder allmählich tiefer und tiefer eingeschraubten Kolbens auf sie ausgeübten starken Drucks aus einer nach oben mündenden Oeffnung austritt und sich dabei an den genau in der Mitte des Mundstücks durchgeführten Draht anlegt. Nach dem Austritt des Drahtes erkaltet der Guttaperchaüberzug, erstarrt und der umpresste Draht kann auf eine grosse Trommel aufgewunden werden. Ferrère entwarf eine ganz ähnlich eingerichtete Maschine, in der mehrere Drähte zugleich überzogen werden können (Dingler's polytechnisches Journal 139 S. 11). Vortheilhafter ist es, den Kolben durch eine im Cylinder angebrachte, in stetiger Umdrehung erhaltene Schraube ohne Ende (Schnecke) zu ersetzen und durch diese die Guttapercha durch ein am Ende des Cylinders befindliches Mundstück hindurchzupressen, so dass sie sich an den ebenfalls stetig durch das Mundstück geführten Draht anlegt; so braucht nämlich der Betrieb keine Unterbrechung zu erleiden. Damit zwischen dem Drahte und der Guttapercha keine Zwischenräume oder Luftbläschen bleiben, tränkt man den Draht meist erst mit Chatterton's Mischung und giebt ihm

dann mehrere Lagen von Guttapercha, deren jede nicht unter 1—1,2 Millimeter dick sein darf, wenn für die Güte der Arbeit eingestanden werden soll. Man beschränkt sich in der Regel auf 3—5 Lagen, obwohl bei Probetauen bis 25 Lagen angewendet worden sind. Ueberzogen werden Kupferdrahtlängen von 3000—6000 Fuss; die Vereinigung dieser Längen erfolgt dann so, dass man die Drahtenden auf 5—6 Zoll blos legt, sorgfältigst zusammenlöthet, mit mehreren Lagen Guttaperchastreifen umwickelt, den Ueberzug mit der Spirituslampe erweicht und mit dem Finger an den Draht andrückt.

Eine eigenthümliche Herstellungsweise von Telegraphentauen liessen sich Southworth, Lorillard & Ferris in Neu-York für England patentiren: sie fertigen nämlich zunächst aus Guttapercha, Kautschuk oder einem andern Isolator einen Strang mit fortlaufenden Längsrippen, also mit kreuz- oder sternförmigen Querschnitten, legen darauf in einer besonderen Maschine je 1 Draht zwischen je 2 Rippen dieses Strangs und nöthigen nun den Strang durch eine sich umdrehende, trichterförmig ausgehöhlte Spindel zu gehen, wobei sich die Rippen um die Drähte herumlegen; der aus der Spindel austretende Strang wird sofort mit Draht oder Garn, welches von einer Spule kommt, umwickelt, um die Rippen in ihrer Lage fest zu halten; von 3 Spulen einer andern Spindel erhält dann das Ganze eine zweite Lage von Garn oder Draht, läuft durch ein Gefäss mit kaltem Wasser und wird endlich nochmals mit Garn oder Draht umwunden, welche von Spulen einer sich mit umdrehenden Scheibe ablaufen (Dingler's Journal 179 S. 52 aus London Journal, October 1865).

P. A. Balestrini (Patentgesuch vom 8. Septbr. 1855; *Mech. Mag.* 64 S. 402) sucht die Guttapercha ganz zu umgehen; er lässt die Drähte mit Hanf oder einem andern Faserstoff umspinnen, mit mehreren Schichten Kautschuklösung und einer Schicht Marineleim überziehen, eine gleiche Umspinnung in entgegengesetzter Richtung mit ebensolchem Ueberzug darüberlegen und das Ganze mit einer Hülle von mit wasserdichten Stoffen getränktem Hanf bedecken; sind mehrere so isolirte Drähte in ein Tau zu vereinigen, so werden sie vorher mit Draht umwickelt.

Capitän Rowett isolirt den kupfernen Leiter mit 7 Lagen Kautschuk, schliesst ihn in ein zolldickes Hanfseil und schützt das Tau mit seiner sich als wirksam erweisenden Schutzlösung, unter Ausschluss jeder Eisenhülle (*The Atlantic Telegraph*, S. 106).

Zum Schutz gegen die Luft wird die Guttaperchahülle mit einer oder 2 getheerten Hanflagen umgeben. Dies geschieht in einer einfachen Maschine, die zwischen 2 hölzernen Scheiben eine Anzahl von Spulen enthält, auf welche die Hanffäden oder Schnuren aufgewickelt sind und sich, wenn die Scheiben in Umdrehung versetzt werden, auf das langsam und gleichmässig durch die hohle Axe der beiden Scheiben laufende, zu umspinnende Tau aufwickeln, da jeder Faden durch ein Loch der hohlen Axe

nach dem Tau geführt ist. Werden mehrere Guttaperchadrähte in ein Tau vereinigt, so werden bei der Ueberspinnung die Zwischenräume zwischen ihnen durch parallel eingelegte Hanfschnüre (Trensen) ausgefüllt. — Capitän Roux umwickelt das Kabel, um es leichter zu machen, mit einer dicken Schicht von dem im südlichen Frankreich vielfach verwendeten Mattengeflecht (*sparterie*), welches auf dem Wasser schwimmt, nicht getheert zu werden braucht und im Wasser nur langsam fault (*Comptes rendus* 72, S. 284).

Die grösste Mannigfaltigkeit herrscht in Bezug auf die eigentliche **Schutzhülle**, welche das Tau bekommt. Zwar hat man, namentlich früher z. B. 1850 bei dem Tau zwischen Dover und Calais, wiederholt versucht, die Guttaperchadrähte ohne weitere Schutzhülle in das Wasser zu versenken; dies erscheint indess nur dann zulässig, wenn die Wassertiefe nicht so bedeutend ist, dass das Tau beim Versenken durch die Last des im Wasser schwebenden Stücks und durch die etwa hinzukommenden Zerrungen oder Stösse einer nachhaltigen Dehnung oder gar dem Zerreissen ausgesetzt ist, und wenn zugleich das gelegte Tau so ruhig und weich auf dem Boden liegt, dass ein Abscheuern der Guttaperchahülle ebensowenig, wie eine Beschädigung des Taues durch Schiffsanker oder Bohrmuscheln zu befürchten steht. Gewöhnlich ist eine besondere Schutzhülle ganz unerlässlich; durch dieselbe wird die absolute Festigkeit des Taues vergrössert und das versenkte Tau gegen äussere Beschädigungen geschützt, allein die Schutzhülle vermehrt zugleich auch das Gewicht des Taues und es ist natürlich wesentlich darauf zu achten, dass das Gewicht des Taues nicht etwa in stärkerem Masse wachse, als die Festigkeit gegen den Zug. Je schwächer man die Schutzhülle nehmen kann, desto billiger wird es und desto mehr kann man allen das Tau gefährdenden Unfällen beim Einladen, Verschiffen und beim Legen entgehen zu können hoffen*). Man hat deshalb in dieser Richtung sehr verschiedene Vorschläge gemacht; so schlug Allan vor, einen 4 Millimeter dicken Kupferdraht mit 24 Stahldrähten von der Dicke einer Nähnadel spiralförmig zu umwickeln und das Ganze mit 4 Lagen Guttapercha zu überziehen und mit einer doppelten Lage getheerten Bandes zu versehen (*Du Moncel*, *traité de tél. él.* S. 262); ferner wollte Bauduoin als Leiter einen Eisendraht von der 6½fachen Dicke eines aus-

*) Vgl. auch Dingler's Journal 184 S. 278 aus *Mech. Mag.* März 1867, S. 199: Proben des Kabels, welches nach dem Verfahren der *British and Americain Telegraph Company* angefertigt und durch längere Zeit dem Versuche unterworfen waren, haben bei ihrer neuerlichen Untersuchung gezeigt, dass mit der Zeit, innerhalb welcher solche Kabel in der tiefen See versenkt bleiben, ihre Festigkeit und Isolationsfähigkeit zunimmt. Die Verringerung des Gewichts und des Volumens lässt erwarten, dass die Anwendung solcher Kabel mit geringeren Kosten und weniger Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, als dies bei den schon ausgeführten 2 Unterseelinien der Fall war, um so mehr, als das Auslegverfahren für ein neues Kabel wesentliche Verbesserungen erfahren kann.

reichenden kupfernen Leiters verwenden, etwa 6 Eisendrähte von 2 Millimeter Dicke zusammendrehen und blos mit getheertem Hanf ohne Schutzdrähte bedecken, oder einen 2 Millimeter dicken Aluminiumdraht blos mit Guttapercha bis zu mindestens 5 Millimeter Dicke überziehen, oder auch den Leiter aus Kupfer, Alumin und Eisen zugleich herstellten (*Glösener*, *traité des applications de l'électricité*, *Paris* 1861, S. 275—282; *Du Moncel*, *revue des applications de l'électricité pour* 1857 *et* 1858, *Paris* 1859, S. 21, 88, 90). Das zwischen Varna und Balaclava gelegte Tau hatte blos an den Uferenden eine Schutzhülle. Dass übrigens bei ruhigem Wasser auf dem Meeresboden eine etwaige Beseitigung der Schutzhülle dem Tau selbst nicht gefährlich ist, haben die wiederaufgenommenen Taue dargethan, z. B. das erste Dover-Calais-Tau, das Tau zwischen Dover und Grisnez bei seiner Ausbesserung im Jahre 1859 (Zeitschrift des deutsch-österreich. Telegraphen-Vereins, 8, S. 185), eines der Shoeburyness-Kabel (*Mech. Mag.* 13, S. 347) und das atlantische Kabel vom Jahr 1865 (Schellen, das atlantische Kabel, Braunschweig 1867, S. 117). Bei Tiefseetauen sind die Küstenenden weit mehr Beschädigungen durch Schiffsanker und den Wellenschlag ausgesetzt, als die Mittelstücke; daher pflegt man den Küstenenden eine weit stärkere Schutzhülle zu geben, als den Mittelstücken und kann dies unbedenklich, weil bei der an den Küsten vorhandenen geringeren Tiefe die Legung dadurch nicht gar zu sehr erschwert wird. Die Schutzhülle darf ferner nicht so eingerichtet sein, dass sie eine Ausbesserung des Taues, falls sein Leiter beschädigt werden sollte, unmöglich macht. In manchen Fällen ist die Schutzhülle zugleich dazu bestimmt, dem Tau überhaupt ein so grosses specifisches Gewicht zu verschaffen, dass es von selbst untersinkt, man also nicht nöthig hat, es, wie z. B. das von 1850 zwischen Dover und Calais gelegte Tau durch besondere Gewichte zu beschweren.

Eine in England zur Prüfung der Ursachen des Misslingens so vieler Unterseetaue und zu Untersuchungen über die zweckmässigste Einrichtung der Taue niedergesetzte Commission, welcher auch die Professoren Thomson und Wheatstone, Varley, Latimer Clark, Edwin Clark, William Fairbairn und Joseph Whitworth angehörten, äussert sich (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, S. 182 und 11, S. 72; *Du Moncel*, *traité de tél. él.* S. 258) dahin, dass kein Tiefseetau leicht sein dürfe, weil es sonst nicht wieder aufgenommen werden könne und weil sich beim Versenken das grössere Gewicht durch ein grösseres Volumen ausgleichen lasse, so dass die Spannung beim Legen trotzdem nicht grösser sei, als bei einem leichten Tau; dass fast kein leichtes Tau sich bewährt habe, schwere dagegen um so besser, je schwerer sie waren; daher sei eine blose Hanfhülle nicht ausreichend, vielmehr eine Metallhülle nöthig, zwischen ihr und dem Isolator aber müsse eine dicke Decke getheertes Garn oder Band befindlich sein, um während der Erzeugung und Legung des Taues als Polster zu dienen. Mit Rücksicht auf die Verhütung einer zu grossen

Dehnung des Taues, einer zu grossen Pressung der isolirenden Hülle und Verhütung von Schlingen beim Legen empfiehlt die Commission die Schutzdrähte in möglichst steilen Windungen umzulegen, also möglichst parallel zum Leiter*). Für Taue in seichtem Wasser sei das Gewicht nicht maassgebend, sondern der Schutz gegen von Aussen kommende Beschädigung. Um ein Anhängen der Meeresthiere zu verhüten, könne man dem Tau einen mit einem Gift versetzten Anstrich geben, wie es Jouvin für eiserne Schiffe vorgeschlagen hat, nämlich ein Gemisch aus preussischem Blau und *Turpethum minerale* (basisch schwefelsaures Quecksilberoxyd), woraus sich unter Wasser Quecksilbercyanid - Chlornatrium, ein sehr heftiges Gift, bildet.

Auch zur Schutzhülle sind sehr verschiedene Stoffe vorgeschlagen und verwendet worden: O'Shaughnessy benutzte 1839 gespaltenes indisches Rohr für ein Flusstau. Duncan liess sich in England das Ratan- oder Rotang-Rohr für diesen Zweck patentiren, welches im südlichen Bengalen und China in gleichmässig 50 Fuss langen Stücken massenhaft und billig zu haben ist und dessen kieselige Rinde weder vom Wasser noch von Insecten angegriffen wird; die Seele des Taues soll mit den Rohrstäben ähnlich wie mit Drähten umsponnen werden. (Deutsche Industrie-Zeitung 1862 S. 131; *Du Moncel*, *traité* S. 263). Auch spanisches Rohr wurde versucht (Deutsche Industrie-Zeitung 1863 S. 35). Ein Bleiüberzug wurde wiederholt, u. A. von Samuel C. Bishop in Neuyork (*Shaffner*, *tel. man.* S. 606) angewendet. Bishop baute besondere Maschinen zum Ueberziehen der isolirten Drähte mit Blei; auch John Chatterton in Birmingham liess sich am 12. Juni 1851 eine verbesserte Maschine zum Aufziehen von Bleiröhren auf die Drähte patentiren (*Mech. Mag.* 56 S. 132; Dingler's Journal 124 S. 265). Whishaw schlug vor, das Tau in bewegliche Eisenröhren zu legen, welche aus Stücken von 1—3 Fuss Länge und 1—2½ Zoll Durchmesser hergestellt werden sollten, indem diese mittelst Kugelzapfen verbunden würden, wobei die Verbindungsstellen nicht wasserdicht zu schliessen brauchten (*Civil Engineer and Architects Journal* 1849 S. 304). Zinnröhren über dem Kabel und der Hanfumwickelung empfahl Lami de Nozan (Deutsche Industrie - Zeitung 1866 S. 208). Shepherd und Button liessen sich am 23. November 1850 zugleich mit der Umwickelung des Guttaperchadrahtes mittelst mit isolirenden Stoffen getränkten Flannell und darüber mittelst Metall oder Metalldraht ein Verfahren patentiren, nach welchem der Draht in den von den Gliedern einer Kette gebildeten Winkelraum gelegt und an der Kette mittelst Klampen

*) Diese Ansicht theilen auch Allan und Delamarche, während Felten und Guilleaume bei festem Aneinanderschliessen der einzelnen Drähte oder Litzen eine schädliche Ausreckung des Seils nicht für möglich halten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 171; 3, S. 191). — Bei Wheatstone's Tau von 1840 sollten die Schutzdrähte senkrecht zur Axe gewickelt werden (Delamarche, Elemente, S. 49).

befestigt werden sollte (*Mech. Mag.* 54 S. 438). Einen Panzer aus Blechstreifen oder Stahldraht in mehreren Lagen mit je einer Zwischenlage von Guttapercha unter Vermeidung von Hanf liess sich J. de la Haie patentiren (Deutsche Industrie-Zeitung 1866 S. 308 und 478). Kupferblechstreifen verwendeten Siemens und Halske 1865 beim Bona-Biserte-Tau. Das gewöhnlichste Material sind aber Eisen- oder Stahldrähte, welche theils in Litzen zusammengedreht (nach Felten und Guilleaume in Cöln; Zeitschrift des Telegraphen-Vereins 3 S. 178), theils einzeln umgelegt werden und im letztern Falle wieder entweder und zwar gewöhnlich in spiralen Windungen oder auch in parallelen Lagen und mit besonderen Bindedrähten oder Kupferblech (Siemens und Halske; vergl. *Du Moncel*, *traité* S. 262) umwickelt. Einfache Drähte umschliessen die Seele dichter und allseitiger; die Litzenumspinnung erhöht zwar die Kosten des Taues um 25%, hat aber den Vorzug, dass ein etwa springender Draht durch die andern Drähte derselben Litze verhindert wird, sich vom Tau loszutrennen. Felten und Guilleaume in Cöln geben die Kosten eines laufenden preussischen Fusses eines Seiles mit 4 Leitungsdrähten, mit doppelter Hanfumwickelung und mit Litzen von verzinktem Eisendrahte zu 22 Sgr. und bei unverzinktem Eisendrahte zu 18 Sgr. an, während ein nur mit einfachen dicken verzinkten oder unverzinkten Eisendrähten umsponnenes Seil beziehungsweise 13 oder 11 Sgr. kostet (Zeitschrift des Telegraphen-Vereins 1 S. 173). Der Eisendraht wird aus dem besten Holzkohleneisen hergestellt und soll eine Tragfähigkeit von 80000 Pfund auf 1 Quadratzoll besitzen*). Die Eisendrähte wurden mehrfach verzinkt, oder getheert oder noch mit einer verhältnissmässig dicken Lage getheerten Hanfs übersponnen, um dadurch das specifische Gewicht zu vermindern. Das Rosten und Zerfressenwerden der Eisendrähte wird durch diese Hanfdecke nicht aufgehalten, wohl aber die Festigkeit während des Legens vergrössert (*Mech. Mag.*, neue Folge, 13 S. 347). Die Maschine zum Ueberspinnen des Seils mit den Eisendrähten oder Litzen ist der schon erwähnten Maschine, welche die Guttaperchahülle mit der Hanflage versieht, ähnlich, nur in allen Theilen stärker und grösser; durch grosse Seilscheiben wird das fertige Seil von der Maschine selbst herausgezogen; beide Maschinen werden durch Dampf getrieben. Die Herstellung der Taue in der Fabrik von Felten & Guilleaume in Cöln ist in der Zeitschrift des Telegraphen-Vereins (1 S. 169—173 und daraus in Dingler's Journal 134 S. 117) ausführlich beschrieben.

Wesentlich abweichende Einrichtungen der Telegraphentaue wurden

*) Newall verlangt eine Tragfähigkeit von 60 Kilogramm auf 1 Quadratmillimeter; beim amerikanischen Tau riss das Eisen bei 70 Kilogramm, bei dem Tau zwischen Sardinien und Algier bei 41—42 Kilogramm (Delamarche, Elemente, S. 47.

von Thomas Allan in London und von S. Statham vorgeschlagen. Nach Allan (Patent vom 8. Februar 1853) soll das Tau einen gerade laufenden starken Eisendraht als Kern erhalten und um denselben die mit Guttapercha überzogenen Leiter abwechselnd mit starken Eisendrähten spiralförmig gewunden und allenfalls noch durch eine Lage dünner Eisendrähte gegen Beschädigung von aussen geschützt werden (*Mech. Mag.* 57 S. 366; 59 S. 137; 63 S. 414 und 613). Eine englisch-amerikanische Gesellschaft beabsichtigte Falmouth und Halifax durch ein Allan'sches Kabel zu verbinden (Deutsche Industrie-Zeitung 1867 S. 309). Statham dagegen liess sich am 15. August 1855 ein Verfahren patentiren, nach welchem um eine isolirende Seele (mit oder ohne darin befindlichen Draht oder Schnur) einer oder mehrere Leitungsdrähte gewickelt werden und nach Befinden Drahtlagen mit isolirenden Lagen abwechseln sollten; nach einem Patent vom 26. Januar 1856 dagegen sollte als Leiter ein hohles Seil aus spiralförmig gewundenen Metalldrähten dienen mit oder ohne Seele aus Guttapercha, Kautschuk und dergl. (*Mech. Mag.* 64, S. 282; 65 S. 304; Dingler's Journal 146 S. 115).

Wird ein aus so verschiedenartigen Stoffen hergestelltes Seil in seiner Längsrichtung einem Zuge ausgesetzt, so dehnen sich alle Stoffe um gleichviel und es ist darauf zu achten, dass bei keinem die Elasticitätsgrenze überschritten wird. Die Guttapercha, deren absolute Festigkeit etwa 3700 Pfund für 1 Quadratzoll beträgt und deren specifisches Gewicht 0,98 ist, erreicht die Elasticitätsgrenze erst, wenn sie um 0,04 ihrer Länge gedehnt wird, das Kupfer dagegen schon bei einer Dehnung von 0,0013 (Schellen, d. atl. Kabel S. 14 und 22). Wird nun beim Kupfer die Elasticitätsgrenze überschritten, ohne dass sie bei der Guttapercha erreicht wird, so wird letztere sich nach dem Aufhören des Zugs wieder vollkommen auf ihre frühere Länge zusammenziehen, das Kupfer dagegen hat eine bleibende Dehnung erlitten, muss sich durchbiegen und die Guttaperchahülle durchbrechen. Die Hanfschnüre können sich um $^1/_{10}$ bis $^1/_6$ ihrer Länge ausdehnen und daher müssen hauptsächlich die Eisendrähte, deren Elasticitätsgrenze etwas unter der des Kupfers liegt, das Kupfer vor einer das Tau gefährdenden Ausdehnung schützen. Es ist daher die Dicke der Eisendrähte nach dem specifischen Gewichte des Taues und der Wassertiefe zu bestimmen. Baudouin hat mehrfache Versuche mit Tauen angestellt (*Glösener*, *traité des appl.* S. 277 flg. aus *Du Moncel*, *Revue des appl. de l'éléctr.* S. 88). Das 36 Millimeter dicke Tau von Spezzia mit 8 Millimeter dicken Schutzdrähten würde bei einer Belastung durch eine Länge von 9000 Metern des ruhig im Meer hängenden Taues reissen; das nur 15 Millimeter dicke atlantische Tau mit seiner 0,8 Millimeter dicken Eisenhülle hat eine neunfach geringere Festigkeit, würde aber doch erst bei 9500 Meter Länge reissen. Ein nach Baudouin's Vorschlag hergestelltes Tau mit eisernem Leiter, welcher allein 1140 Kilogramm tragen könnte, während

der Kupferdraht des atlantischen Taues bei 37 Kilogramm Belastung reissen würde, hätte bei der nämlichen Dicke, wie das atlantische Tau, im Wasser nicht 462, sondern nur 147 Gramm Gewicht und könnte eine Länge von 13945 Meter tragen, während das atlantische nur 9480 Meter zu tragen vermöchte. Ein Baudouin'sches Tau mit Aluminiumleiter endlich würde bei 270 Kilogramm reissen, in der Luft 26, im Wasser 7 Gramm wiegen und könnte eine Länge von $\frac{270000}{7}$ = 38000 Meter tragen; 4000 Meter desselben würden nur 78 Kubikmeter einnehmen und 106 Tonnen wiegen gegen 696 Kubikmeter und 2548 Tonnen beim atlantischen Tau; im Meer hängend würden 4400 Meter nicht 2032, sondern nur 31 Kilogramm wiegen; allein sein Preis wäre doppelt so gross.

Die Firma Glass, Elliot & Co. hat in den 8 Jahren 1854 bis 1862 allein 6749 englische Meilen Leitungen ausgeführt (D. Ind.-Ztg. 1863, S. 68).

Als Beleg für die grosse Mannigfaltigkeit in der Ausführung der Unterseetaue geben wir auf Tafel I eine Zusammenstellung von Abbildungen verschiedener ausgeführter Taue, und zwar:

Fig. 1: ein amerikanisches Flusskabel nach Shaffner, Wade und Sleeth, 1853; *a* ist ein Draht Nr. 10 aus schwedischem Eisen, der einen Zug von 1300 Pfund aushält, *b* sind 3 Lagen Guttapercha, *c* getheerte Leinewand, *d* Längsdrähte Nr. 10, *e* Bindedrähte Nr. 12.

Fig. 2: im Hudson gelegtes Tau von Samuel C. Bishop in New-York; *a* mit Guttapercha isolirte Kupferdrähte, *b* weite Guttaperchahülle, *c* Schützhülle aus getheertem Hanfgarn.

Fig. 3: ebenfalls von Bishop; mit 3 Drähten Nr. 10 aus schwedischem Eisen, getrennt durch einen Guttaperchastrang *a* und umschlossen von einer Guttaperchahülle *b* und einer Hanfgarnhülle *c*.

Fig. 4: von Charles T. und J. N. Chester in New-York; 5 Kupferdrähte in Guttapercha, in einer getheerten Hanfgarnhülle und 12 Eisendrähten Nr. 6.

Fig. 5: ebenfalls von Chester und mit 12 Eisendrähten Nr. 6. Ganz ähnlich war das Mittelmeer-Tau von 1856, nur hatte es blos 10 ebenso starke Schutzdrähte.

Fig. 6: auch von Chester, mit 12 Eisendrähten Nr. 16. Shaffner (*telegr. man.* S. 605) bildet noch 3 andere Taue mit 1 Leitungsdraht und ähnlicher, aber stärkerer Umhüllung aus 12 Eisendrähten Nr. 10 und 12 oder 9 Drähten Nr. 12 ab; ebenso 2 Taue mit je 6 Litzen aus je 7 Eisendrähten für reissende Flüsse, von denen dass stärkste einen Zug von 14 Tonnen aushalten kann.

Fig. 7: Dover-Calais-Tau vom Jahr 1851, von Newall; mit 4 Kupferdrähten Nr. 16, zwischen denen Hanflitzen liegen, mit einer Hülle aus Hanflitzen und 10 verzinkten Eisendrähten.

Fig. 8: Holyhead-Howth-Tau von 1852, von Newall; *a* Mittelstück, *b* Küstenende.

Fig. 9: Donaghadee-Port-Patrick-Tau, 1852, von Newall. Aehnlich war das Dover-Ostende-Tau, nur dass es 12, aber etwas dünnere Schutzdrähte hatte.

Fig. 10: Donaghadee-Port-Patrick-Tau, 1853, von Newall; mit 6 Kupferdrähten Nr. 16 und 12 Eisendrähten Nr. 2. Ebenso war das Mittelmeertau von 1855.

Fig. 11: Küstenende des Taues zwischen Oxfordness und Haag, von Newall.

Fig. 12: Tau von Prinz Eduards-Insel nach Neubraunschweig, 1852, von Newall.

Fig. 13: Tau für den Balize-Telegraph bei New-Orleans, von Newall. Ein ähnliches von Newall wurde im Hudson bei New-York versenkt.

Fig. 14: *a* Mittelstück, *b* Küstenende des Mittelmeertaues von 1857, von Newall.

Fig. 15: *a* Mittelstück, *b* Küstenende des Taues zwischen Cagliari, Malta, Corfu, 1857, von Newall. Ganz ähnlich war das indische Tau (Suez-Aden-Karratschi), nur mit 2 Lagen Guttapercha.

Fig. 16: Tau im grossen Belt, 1853, von Newall.

Fig. 17: Tau zwischen Algier und Port-Vendres, 1860, mit einem 2 Millimeter dicken Strang von 7 Kupferdrähten, 4 Lagen von Guttapercha, abwechselnd mit 4 Lagen von Chatterton's Mischung, 1 Lage von getheertem Hanf und 10 Stahldrähten von 2 Millimeter Dicke in getheertem Hanf. Gesammtdicke 22 Millimeter; Gewicht eines Meters in der Luft 620, im Wasser 308 Gramm.

Fig. 18: Malta-Alexandria-Tau, 1861; siebendrähtiger Kupferstrang von 4 Millimeter Dicke, 3 Lagen Guttapercha, Hanf- und Eisenhülle.

Fig. 19: Bona-Biserte-Tau von Siemens in London, 1865; dreidrähtiger Kupferstrang, mit einer dünnen Schicht von Chatterton's Mischung, darauf 2 Lagen Guttapercha und 2 Lagen getheerten Hanfs, endlich Kupferstreifen.

Fig. 20: Flusstau mit 3 Leitungen in der Elbe bei Pillnitz.

Fig. 21: *a* und *b* Mittelstück, *c* Küstenende des atlant. Taues von 1858.

Fig. 22: desgl. von 1865. Die Hanflitzen waren getheert, die Eisendrähte nicht galvanisirt.

Fig. 23: desgl. von 1866. Die 5 Manillahanflitzen um die galvanisirten Eisendrähte sind nicht getheert.

Das Tau im Persischen Golfe (Karratschi-Buschier) hatte über dem Kupferdrahte 4 Lagen Guttapercha, 1 Lage getheerten Hanf, 16 Eisendrähte und darüber eine bandförmige Umwickelung mit Leinwand, welche in Pech getränkt war (Schellen, d. elektro-magn. Telegr. 4. Aufl. S. 228). — In der Elbe zwischen Hamburg und Harburg wurden 1855 und 1860 2 Kabel gelegt; das letztere ist ähnlich, wie Fig. 14 construirt, nur mit stärkeren Schutzdrähten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 8, 165—173).

Das für die Strasse von Kertsch bestimmte, bei Felten & Guilleaume in Cöln verfertigte Kabel von 12 Seemeilen Länge und 3000 Ctr. Gewicht hatte einen Leiter von 1 Linie Dicke aus 7 Kupferdrähten, 3 Guttaperchahüllen und 1 Schutzhülle aus 10 5/8 Zoll dicken verzinkten Eisendrähten; Tragfähigkeit 1500 Ctr. (Dingler's Journal 181, S. 154).

2. Die Prüfung der Unterseetaue.

Von der grössten Wichtigkeit für das Gelingen ist die Prüfung der Taue, und zwar darf dieselbe nicht blos in einer Prüfung des fertigen Taues bestehen, sondern es müssen die zur Verfertigung des Taues zu verwendenden Stoffe schon vorher sorgfältig geprüft werden und ganz besonders muss bei der Versenkung des Taues dessen Zustand einer fortdauernden Untersuchung unterworfen werden, damit jede etwa eintretende Mangelhaftigkeit sofort erkannt und Anlass zur Beseitigung des entstandenen Fehlers gegeben werde. Natürlich muss das Tau ausser den physikalischen Proben auch einer Prüfung auf seine Festigkeit unterzogen werden, damit es nicht beim Versenken reisst. (Vergl. auch Delamarche, Elemente S. 38).

Von den Rohstoffen sind vor deren Verarbeitung sorgfältig zu prüfen: das Kupfer, die Guttapercha und das Eisen. Die im Handel vorkommenden Kupfersorten schwanken je nach ihrer Reinheit in Bezug auf ihre Leitungsfähigkeit in sehr weiten Grenzen (vergl. auch *Du Moncel, traité* S. 254; ferner Dingler's Journal 146, S. 113 aus *Mech. Mag.* 67, S. 30), bei sorgfältig ausgewählten Telegraphendrähten bis zu 20%. In dem Malta-Alexandria-Kabel z. B. kamen an verschiedenen Stellen Kupfersorten vor, deren Leitungsfähigkeit zwischen 90 und 74 wechselte, wenn die des reinen Kupfers = 100 gesetzt wurde. Daher muss zuerst jeder zu verwendende Kupferdraht auf sein Leitungsvermögen geprüft werden. Bei der Herstellung des atlantischen Kabels vom Jahr 1865 wurden alle Drähte verworfen, deren Leitungsfähigkeit unter 85% von der des reinen Kupfers betrug. Ausführliche Versuche darüber und über die Metalllegierungen wurden von Dr. A. Matthiessen und M. Holzmann auf Veranlassung der englischen Regierung ausgeführt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 261—269 und 8, S. 9—14 aus Poggendorff's Annalen 110, S. 222 und 190). Ebenso muss ferner die Leitungsfähigkeit des isolirenden Materials bestimmt werden; dieselbe ist bei constanter Temperatur hinlänglich gleichmässig; bei dem für die Strecke Rangoon-Singapore bestimmten Kabel nahm die Leitungsfähigkeit zwischen den Temperaturgrenzen von 5—27° C. nahe im Verhältniss von 1 : 7 zu, jedoch nicht constant. Dr. Werner Siemens und C. William Siemens führten daher ihre Prüfungen stets bei 24° C. aus, weil dieser Temperaturgrad nach der Legung des Kabels selten überschritten wird und dabei kleinere Fehler verhältnissmässig viel leichter wahrnehmbar sind; nachdem die zu untersuchenden Drahtringe

24 Stunden in einem Behälter mit Wasser von 24° gelegen hatten, wurden sie in den mit Wasser von 24° gefüllten, hermetisch verschliessbaren Versuchskasten gebracht und einem Druck von 600 Pfund auf 1 Quadratzoll ausgesetzt, damit das Wasser in die etwa vorhandenen Höhlungen oder Risse eindringe*). Beobachtungen an Tauen während des Versenkens derselben haben bestätigt, dass unter hydrostatischem Druck die Leitungsfähigkeit der Guttapercha sich merklich vermindert, nach Aufhören des Druckes jedoch wieder etwas über den ursprünglichen Werth steigt. Bei Drahtringen mit geringen Fehlern dagegen erzeugt die Zunahme des äusseren Druckes keine Zunahme oder selbst eine Abnahme des Isolationsvermögens; dies bietet den Schlüssel zur Ermittelung von Mängeln, die sonst nicht wahrnehmbar sein würden (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 112). W. und C. W. Siemens wählten für die Prüfungen des Leitungsvermögens des Kupfers und der Guttapercha als Widerstandseinheit**) den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 Meter Länge und von 1 Quadratmillimeter Querschnitt bei der Temperatur 0°, da sie die Jacobische Einheit nicht für zweckmässig erachteten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 55—68 und 8, S. 76—85, aus Poggendorff's Annalen 110, S. 1 und 113, S. 91; mit Tabelle der Widerstände der anderen Metalle). Dr. Matthiessen schlägt eine Mischung von 2 Gewichtstheilen Gold und 1 Theil Silber vor (Poggendorff's Annalen 112, S. 353) und vertheidigt die von der British Association aufgestellte Einheit (Poggendorff's Annalen 129, S. 161). Ueber die verschiedenen Einheiten vergl. ferner Zeitschr. d. Tel.-Ver. 13, S. 1 und 12 aus Poggendorff's Annalen 126, S. 369 und 127, S. 327. Zur Bestimmung der Widerstände der zu verwendenden Drähte benutzten Gebrüder Siemens die Wheatstone'sche Brücke [während Du Moncel (*traité* S. 282) ein Differentialgalvanometer vorzieht] und Widerstandsrollen mit einem Widerstand von 1—10000 Einheiten. Zur Messung von Widerständen jenseits dieser Grenzen änderten sie die Brücke dahin ab, dass sie auch die festen Zweige *a* und *b* (Fig. 24) nicht einander gleich, sondern veränderlich machten, sodass jeder derselben die Werthe 10, 100 oder 1000 erhalten konnte, wodurch sie mit 1—10000 in *c* eingeschalteten Widerstandseinheiten einen Widerstand *d* zwischen 0,01 und 1000000 Ein-

---

*) Vergl. auch die Versuche von Fleeming Jenkin mit verschiedenen Taustücken; Polytechnisches Centralblatt 1860, S. 444 aus *Civ. Eng.*, October 1859.

**) Eine preussische Meile Eisendrahtleitung von 2⅛ Linien Durchmesser entspricht 64000 solcher Einheiten. Den Widerstand von 1 alten Seemeile ($=\frac{1}{60}$ Aequatorgrad) bei 4° C. fand Dr. Esselbach (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 109) beim Rothen Meer-Kabel zu 22816, beim Bona-Cagliari-Kabel zu 116232, beim Syra-Constantinopel-Kabel zu 41160, beim Hellas-Alexandria-Kabel zu 21816, beim atlantischen Kabel zu 60516 solcher Einheiten. — Die Widerstände von Guttapercha, Kautschuk etc. giebt *Du Moncel, traité*, S. 275.

heiten messen konnten. Zur Messung der isolirenden Schicht kürzerer oder besser isolirter Tauenden (von etwa 1 Knoten = $\frac{1}{4}$ geographische Meile Länge) benutzten sie eine sehr empfindliche Sinusbussole*) oder ein Weber'sches Spiegelgalvanometer mit 40000 Umwindungen und magnetischem Spiegel; mit Hilfe eines regulirenden Magnets kann die Empfindlichkeit dieses Instruments von 1 auf 100 verändert werden. Um das Messinstrument auch für die mit der wachsenden Länge des Taues fortwährend abnehmenden Isolationswiderstände gleich empfindlich zu machen, legten sie über die Drahtwindungen der Sinusbussole noch eine zweite Lage von verhältnissmässig wenig Windungen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 115), leiteten durch diese beständig den Strom einer kleinen constanten Batterie und zwar in entgegengesetzter Richtung, als der zur Prüfung der Isolation dienende Strom in den inneren ursprünglichen Windungen läuft, und regulirten jenen Strom durch eingeschaltete Widerstände so, dass er die Wirkung des anderen auf die Magnetnadel gerade aufhebt, diese also in der Ruhelage bleibt. Wächst die Taulänge, so wird der Widerstand im Kreis der äusseren Umwindungen so weit vermindert, bis das Gleichgewicht an der Nadel wieder hergestellt ist, und den bekannten Werth dieser Widerstandsänderung braucht man nur mit dem festen Verhältniss zwischen den Einwirkungen beider Umwindungen auf die Nadel zu multipliciren. Ist in Fig. 25 W der Widerstand der inneren Windungen der Sinusbussole, W_1 der ihnen hinzugefügte Widerstand, w der Widerstand der äusseren Hilfswindungen, w_1 der in ihren Kreis eingeschaltete Widerstand, m und n endlich die Zahl der Batterieelemente in diesen beiden Kreisen und k der constante Coefficient des Verhältnisses zwischen den Einwirkungen beider Umwindungen auf die Nadel, so hat man

$$\frac{n}{w+w_1}\,k = \frac{m}{W+W_1} \quad \text{oder} \quad k = \frac{m}{n}\cdot\frac{w+w_1}{W+W_1};$$

setzt man nun anstatt W_1 den unbekannten Widerstand x des Taues und muss man dabei w_1 in w_2 ändern, während die Zahlen der Elemente jetzt M und N sein mögen, so wird

$$\frac{N}{w+w_2}\,k = \frac{M}{W+x} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{k}\cdot\frac{M}{N}\cdot(w+w_2) - W$$

$$= \frac{M}{N}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{W+W_1}{w+w_1}\,(w+w_2) - W.$$

Bei Messung des sehr grossen Isolationswiderstandes kurzer Tauenden

---

*) Nach der aus $A \sin\alpha = S = nE : W$ fliessenden Formel $W = n \sin\alpha_1 : \sin\alpha$, worin W der zu messende Isolationswiderstand, α der abgelesene Nadelausschlag, n die Zahl der Elemente, S die Stromstärke, E die elektro-motorische Kraft eines Elementes, A eine Constante und $\sin\alpha_1$ die (bei länger dauernden Messungen öfters zu bestimmende) Constante des Instruments. Die Widerstandseinheit giebt mit einem Element den Ausschlag α_1.

kann man W und w vernachlässigen und $x = \frac{M}{N} \cdot \frac{w_2}{k}$ setzen, wobei k von der Empfindlichkeit des Instruments nicht abhängt. Ueber den Isolationswiderstand kurzer Taue und Messungen des Widerstandes der Isolirschicht bei verschiedenen Temperaturen vergl. Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 201 und 206.

Der Isolationswiderstand V isolirter Drähte findet sich (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 202 u. *Du Moncel, traité*, S. 267) aus dem specifischen Leitungsvermögen der verwendeten Materialien folgendermassen: sind r und R die Halbmesser des Drahtes und der Guttapercha, l und λ die Länge und das specifische Leitungsvermögen des Drahtes, so ist der Widerstand des isolirenden Cylinderdifferentials von der Dicke dx, im Abstande x von der Längsaxe $dV = \frac{dx}{2\pi\lambda . lx}$, folglich der ganze Widerstand

$$V = \frac{1}{2\pi\lambda l} \int_r^R \frac{dx}{x} = \frac{lognat \frac{R}{r}}{2\pi\lambda l}.$$

Unerlässlich muss das Leitungvermögen für jede einzelne Meile des isolirten Drahts gemessen werden, nicht nur, um mangelhaftes Material ausschliessen zu können, namentlich an Stellen, wo der metallische Zusammenhang des Kupferdrahts beim Umpressen gelitten hat, sondern auch um einen vollständigen Nachweis über die Leitungsfähigkeit jedes einzelnen Theiles des fertigen Taues zu gewinnen, ohne welchen sich später durch galvanische Versuche und Rechnung der Ort etwa vorgekommener Beschädigungen nicht genau bestimmen lässt.

Erfahrungsgemäss treten an den Stellen des isolirten Drahtes, wo die isolirende Schicht von Haus aus dünner war, als durchschnittlich, sei es infolge einer Verletzung, sei es infolge einer vom Wasser eingedrückten Blase oder einer excentrischen Lage des Drahtes elektrolytische Wirkungen des Telegraphirstroms auf und veranlassen Störungen im Betrieb. Daher muss der isolirte Draht auch sorgfältig auf derartige Fehler geprüft werden. Dazu kommt er in ein mit schwach angesäuertem Wasser gefülltes, hermetisch geschlossenes, gusseisernes Gefäss, worin ein Druck von etwa 140 Pf. auf 1 □Zoll herrscht*); das eine Ende desselben wird mit einem empfindlichen Galvanometer und durch dieses mit dem einen Pol einer Batterie verbunden; wird nun der andere Batteriepol mit dem zweiten Drahtende vereinigt, so erkennt man am Galvanometer den Widerstand der Kupferader und seine Leitungsfähigkeit; isolirt man dagegen das zweite Drahtende und verbindet dafür den zweiten Pol mit dem gusseisernen Gefäss, so zeigt ein

*) Will man etwa in der Guttaperchahülle eingeschlossene Luftbläschen zum Platzen veranlassen, so macht man das Gefäss vor dem Einfüllen des Wassers möglichst luftleer.

Ausschlag des Galvanometers das Vorhandensein von Fehlern, welche man durch langsames Herausziehen des Drahts bis zur Fehlerstelle experimentell finden kann. (Vergl. auch Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 126 ff.)

Eine weitere Prüfung hat sich auf das Vertheilungsvermögen zu erstrecken. Die Versuche haben dargethan, dass das specifische Vertheilungsvermögen isolirender Körper weit beständiger ist, als ihr specifisches Leitungsvermögen. Das Vertheilungsvermögen ist überdies unabhängig von örtlichen Fehlern der Isolirschicht und hängt wesentlich von der Gestalt des Isolators ab. Durch die Messung des Vertheilungsvermögens einer gegebenen Taulänge und die Vergleichung desselben mit dem mittlern Vertheilungsvermögen des verwendeten Materials lässt sich daher mit grosser Sicherheit entscheiden, ob die isolirende Schicht überall gleich dick ist, oder ob der Draht theilweise excentrisch in ihr liegt. Das Vertheilungsvermögen muss man überdies wissen, wenn man die Lage eines Bruches des Leitungsdrahtes, bei welchem das Bruchende isolirt bleibt, bestimmen will. Da das Tau eine Leydener Flasche bildet, deren innere und äussere Belegung der Draht und das Wasser sind, so ist das Vertheilungsvermögen K das Product aus dem Leitungsvermögen und einem constanten Factor C, also $K = \frac{2\pi\varkappa l}{\text{lognat}\,\frac{R}{r}} \cdot C$, worin $\varkappa$ das specifische Vertheilungsvermögen bedeutet (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 196 und Tabelle der K auf S. 203, desgl. *Du Moncel, traité*, S. 274); diese Formel nimmt aber bei Kabeln oder cylindrischen Flaschen die einfachere Gestalt $K = \frac{\varkappa C}{\text{lognat}\,\frac{R}{r}}$ an. Ist die elektrische Spannung E einer mit dem Kabel verbundenen Batterie in der Zeit t auf y gesunken*), so sinkt sie im folgenden dt durch den nach dem Ohm'schen Gesetze stattfindenden Entladungstrom $\frac{y}{w}$ um dy und man hat, wenn w der Widerstand der isolirenden Schicht, K der Vertheilungscoefficient ist, zunächst $-K dy = \frac{y}{w} dt$ und daraus

$$\text{lognat}\,\frac{E}{y} = \frac{t}{Kw} = t \cdot \frac{C \cdot \text{lognat}\,\frac{R}{r}}{2\,l\,\pi\varkappa} \cdot \frac{2\pi l\lambda}{C \cdot \text{lognat}\,\frac{R}{r}} = \frac{\lambda t}{\varkappa}.$$

Beobachtet man nun mittelst eines Elektrometers in 2 verschiedenen Fällen die Zeiten t_1 und t_2, in denen die ursprüngliche Spannung einer

*) Ein befriedigend isolirtes Tau zeigt nach seiner Ladung stets einen deutlich wahrnehmbaren Rückschlag. — Ueber die Prüfung des Isolationszustandes mit dem Elektrometer von Peltier, vergl. auch Schellen, d. elektromagn. Telegraph, 4. Aufl. S. 239 ff.

Batterie bis zu einer gegebenen Grösse herabsinkt, so erhält man für die specifischen Leitungsvermögen das Verhältniss $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{t_1}{t_2}$, mittelst dessen man leicht, wenn auch mit grösserem Zeitaufwande, den specifischen Widerstand des isolirenden Materials bestimmen und die Isolation zweier ähnlicher Kabel vergleichen kann, selbst wenn man kein Instrument zu einer genauen Messung zur Hand hat. Ueber das Verfahren dabei vergl. auch *Du Moncel, traité* S. 282; Schellen, d. elektromagn. Telegraph, 4. Aufl. S. 239 ff. Das Resultat ist davon nicht abhängig, ob der Draht vollkommen centrisch in dem Isolator liegt. Bei langen Kabeln könnten indessen kleine Fehler leicht der Beobachtung entgehen, da sie nur einen im Verhältniss zur ganzen Ladung kleinen Elektricitätsverlust veranlassen. Daher ziehen es Siemens vor, die Ladung a und nach Verlauf einer Minute die Entladung b mit dem Galvanometer zu messen, den Verlust $D = 1 - \frac{b}{a}$ an Quantität oder Spannung in 1 Minute zu bestimmen und $\frac{b}{a}$ anstatt $\frac{y}{E}$ in obige Formel einzusetzen. — Ueber die Resultate der Messungen des specifischen Vertheilungscoefficienten verschiedener Isolatoren vergl. Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 202—205.

Bei der Prüfung der Taue während des Legens wandten Siemens auf der Landstation ein Uhrwerk an, welches das Ende des Kabels abwechselnd kurze Zeit mit der Erde, dann mit dem Pole einer Batterie verband, dann einige Zeit isolirt hielt. Auf dem Schiffe ist beständig ein Widerstandsmessapparat mit der Linie verbunden. Durch Herstellung des Gleichgewichts an der Wheatstone'schen Brücke wird abwechselnd der Widerstand der Isolationsschicht und des Leitungsdrahtes am Land und auf dem Schiffe bestimmt und erstere nach dem Schiffe telegraphirt; weichen diese 4 Werthe erheblich von einander ab, so ist ein Fehler vorhanden und die Lage desselben kann aus den beobachteten Werthen berechnet werden. Dieses Verfahren ist zwar ermüdend, aber sehr zweckentsprechend.

Sind beide Tauenden zur Hand und ist der Fehler bei f in Fig. 26 um x und y von ihnen entfernt, während die Länge des ganzen Taus $= l$ ist und werden die Widerstände w_1 und w_2 so regulirt, dass die Nadel des Galvanometers G in Ruhe bleibt, so ist $x = \frac{l w_1}{w_1 + w_2}$. Ist dagegen bei einer einfachen versenkten Leitung c der Widerstand des ganzen Taues x und y die Widerstände vom Fehler bis zu den beiden Enden hin, z der Widerstand des Fehlers selbst, a_1 und b_1 die Widerstände, welche an beiden Enden gemessen werden, während jedesmal das andere Ende isolirt ist, und a und b die entsprechenden Widerstände, wenn das andere Ende mit der Erde verbunden ist, so liefert das Ohm'sche Gesetz (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 199):

$$c=x+y, \quad a_1=x+z, \quad b_1=y+z,$$
$$a=x+\frac{zy}{z+y}, \quad b=y+\frac{zx}{z+x}$$

und hieraus

$$x=\frac{a_1-b_1}{2}+\frac{c}{2}=a\frac{c-b}{a-b}\left\{1-\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{c-a}{c-b}}\right\}=a-\sqrt{(a_1-a)(c-a)}$$

$$\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{c-b}{c-a}}.$$

War das Kabel schon vor Auftreten eines entstehenden Fehlers nicht vollkommen gut isolirt, so bestimmt man den Widerstand γ der schon vorher vorhandenen Isolationsfehler annähernd aus den gemessenen a, b, a_1 und b_1 und entwickelt dann aus den nach Eintritt des neuen Fehlers an der am andern Ende isolirten Leitung gemessenen Widerständen a_2 und b_2 für den Ort des neuen Fehlers

$$x=a_1-\gamma\sqrt{\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}} \text{ oder } y=b_1-\gamma\sqrt{\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}},$$

je nachdem der neue Fehler zwischen dem alten und der Station A mit den Aufzeichnungen a, a_1 und a_2 oder der Station B mit den Aufzeichnungen b, b_1 und b_2 liegt*).

Bei allen diesen Versuchen soll die Polarisation an der Fehlerstelle möglichst gleich sein; deshalb wird durch vorläufige Messungen der Ort des Fehlers erst angenähert bestimmt und dann für die eigentliche Messung die Zahl der Elemente so regulirt, dass der von der einen oder andern Seite her durch die Fehlerstelle gehende Strom stets nahe dieselbe Stärke hat; bei der Beobachtung selbst aber wartet man, bis die Polarisation ihr Maximum erreicht hat.

Beim Versenken des atlantischen Kabels im Jahre 1866 erfolgte die Prüfung nach einem von Willougby Smith, dem ersten Elektriker der Telegraph Construction and Maintenance Company, ausgearbeiteten Reglement in folgender Weise (Schellen, d. atlant. Kabel S. 99—106; *Mech. Mag. XV*, S. 211): Die 3 Kabeltheile waren auf dem Schiff hinter einander zu einem einzigen Stromkreise verbunden, dessen vorderes Ende a (Fig. 27) durch das irische Küstenkabel mit einem Marinegalvanometer G_2, unter Einschaltung eines Widerstandes w von derselben Grösse, wie 5 Meilen Guttaperchahülle**) verbunden war, während der auf dem Lande befindliche Taster T_2 für gewöhnlich isolirt war, aber durch Niederdrücken

*) Im letzteren Falle wäre $x=a_1-2\gamma+\gamma\sqrt{\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}}$.

**) 100 Millionen Einheiten, da man den Widerstand von 1 Meile Guttaperchaschicht für die Temperatur des Meerwassers im Mittel = 500 Millionen Einheiten setzen kann.

von 1 auf 2 mit dem veränderlichen kleineren Wid erstande w' und der Erde in Verbindung gesetzt werden konnte. Das hintere Ende b des Kabels K war auf dem Schiffe durch das Reflexgalvanometer G_1 und den geschlossenen Taster T_1 mit der Batterie B aus 100 Elementen einer sogenannten Sand- oder Sägemehl-Batterie verbunden. Letztere war also für gewöhnlich geschlossen und sendete ihren Strom durch G_1 und G_2. Ein zweiter, unter Umständen stärkerer Strom geht blos durch G_1, die Guttapercha und das Wasser; denn die Guttapercha isolirt nicht vollständig und ihr Widerstand würde bei 2000 Meilen Länge nur $\frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$ Million Einheiten betragen, während $w = 100$ Millionen Meilen war. Vernachlässigt man den verhältnissmässig kleinen Widerstand der Batterie und der Galvanometer, so verhält sich der erstere (Kupfer-) Strom zu dem zweiten (Guttaperchastrom), wie $\frac{1}{4} : 100$. So lange die Ablenkung beider Galvanometer sich nicht änderte, war Alles in gutem Zustande. Mittelst des Tasters T_1 konnte bei Polwechsel oder Veränderung der Batteriestärke vom Schiff nach dem Lande, mittelst T_2 vom Lande nach dem Schiff telegraphirt werden. Wurde nämlich T_2 niedergedrückt, so ging der Haupttheil des Stromes durch T_2 und w' zur Erde, hatte also den Widerstand w nicht zu überwinden, und deshalb musste der Ausschlag in G_1 merklich grösser werden. Der Widerstand w' sollte den Kupferstrom in G_1 nicht zu stark auftreten lassen. Die Zeitmomente, in denen von der Küste nach dem Schiffe gesprochen werden sollte, waren im Voraus genau festgestellt, damit keine Verwechselungen eintreten sollten; nämlich die ersten 30 Minuten jeder Stunde waren zur Prüfung der Isolation bestimmt, die folgenden 10 Minuten zur Prüfung des Widerstandes des Leiters und dann je 10 Min. zum Sprechen zwischen Schiff und Küste und umgekehrt. Trat z. B. bei c ein Isolationsfehler ein und ging hier ein Theil des Stromes ins Meer, so musste das Galvanometer auf dem Schiff einen stärkeren, das am Lande einen schwächeren Ausschlag zeigen. Eine geringere Aenderung im Ausschlag deutete auf einen kleinen Fehler, eine sehr starke auf einen grossen Fehler, auf „tödtende Erde“ (*dead earth*). Aber selbst dann konnte vom Schiff noch nach der Küste gesprochen werden, wenn nur durch Niederdrücken von T_2 der Gesammtwiderstand der Leitung fast auf die Hälfte reducirt und G_2 zwischen w' und der Erde eingeschaltet wurde. Bei einem Reissen des Kupferdrahtes ohne Verletzung der Guttapercha zeigt sich auf G_1 noch ein schwacher Strom, da die Guttapercha nicht ein absoluter Isolator ist, und aus dem noch vorhandenen Widerstand der Guttaperchahülle lässt sich die Lage des Fehlers ermitteln, da derselbe der Länge dieser Hülle umgekehrt proportional ist. Ist der Leiter und die Guttaperchahülle gerissen, so wird der Widerstand plötzlich wesentlich kleiner und bleibt dann unveränderlich. Liegen nun einige Zoll des Kupferdrahtes im Wasser, so geht der Strom ins Wasser, dessen Widerstand man $= 0$ setzen kann, so dass man aus dem noch vorhandenen Widerstande des Kupferdrahtes die Entfernung der Rissstelle

berechnen kann. Wird daher der Kupferdraht nur in einer kleinen Fläche vom Wasser berührt, so zeigt sich ein sehr grosser, launenhaft ab- und zunehmender Widerstand, und man kann nur die dem beobachteten kleinsten Widerstande entsprechende Entfernung ermitteln, über welche hinaus der Fehler nicht liegen kann. Tritt der Kupferdraht mit der Eisenhülle in Verbindung, so ist er noch inniger mit dem Meere verbunden, als wenn der Draht auf einige Zoll blos gelegt ist; der Widerstand ist dann noch weniger veränderlich und es fehlen die schwachen Ströme vollständig, welche von dem durch das Salzwasser getrennten Kupfer und Eisen des gerissenen Kabels herrühren; in beiden Fällen treten Erdströme aus dem Unterschiede der elektrischen Spannung zwischen der Küste und dem Meerwasser an der Fehlerstelle auf. Hat endlich die Guttaperchahülle eine Oeffnung, so tritt der Leiter mit dem Wasser unter grösserem oder kleinerem Widerstande in Verbindung, der gesammte Isolationswiderstand vermindert sich bedeutend und ein Theil des Stroms geht ins Meer, doch bleibt die Möglichkeit, dass die beiden Enden mit einander sprechen; bleibt der Widerstand des Fehlers constant, so kann man den Ort des Fehlers durch zwei Widerstandsmessungen bestimmen, wobei die andere Station das Ende des Taues einmal mit der Erde verbindet und einmal isolirt.

Interessant sind die Versuchsreihen, welche Charles Wheatstone mit dem Spezzia-Corsica-Sardinien-Kabel und E. O. Wildman Whitehouse mit dem Mittelmeer- und dem Neufundland-Kabel anstellten. Vergl. darüber Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 152—157 und S. 274—278. Desgleichen die Versuche von Varley über die Induction der Kabel, vergl. *Civ. Eng. and Arch. J.* 1859, S. 149—157.

3. Die Versenkung des Taues.

Während bei der Anfertigung und der Verschiffung des Taus jeder einzelne Theil gehörig beaufsichtigt und mit der erforderlichen Vorsicht und Muse behandelt werden kann, werden die ohnehin nicht geringen Schwierigkeiten bei der Versenkung des Taus dadurch noch wesentlich erhöht, dass man neben allen, die Schifffahrt erschwerenden Umständen auch noch einer Anzahl von besonderen Zufälligkeiten ausgesetzt ist und alle auftretenden Störungen mit ziemlicher Schnelligkeit ermittelt und beseitigt werden müssen, da ja das Tau mit nicht geringer Geschwindigkeit abläuft. In vielen Fällen missglückte die Versenkung durch zu heftigen oder überhaupt ungünstigen Wind. (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 18, 19 u. 272.) Man muss daher die erfahrungsmässig günstigste Zeit zur Versenkung auswählen.

Bevor zur Versenkung selbst geschritten werden kann, muss der mit dem Kabel bei der Versenkung einzuschlagende Weg festgestellt werden und hierzu wieder ist, abgesehen von politischen, Handels- und Betriebs-

Rücksichten, eine möglichst genaue Kenntniss der Tiefen und der Beschaffenheit und Gestalt des Meeresbodens erforderlich. Ausserdem sind die Tiefenverhältnisse schon für die Anfertigung des Taues mit massgebend. Die zwischen den gegebenen Endpunkten vorhandene kürzeste Linie ist mit dem kürzesten, daher am leichtesten zu ladenden und zu versenkenden Tau zu belegen, und deshalb weicht man von ihr nicht ohne Noth ab. Doch dürfen sich die Sondirungen nicht bloss auf diese Linie allein erstrecken, sondern sie müssen von ihr aus nach beiden Seiten bis zu einiger Entfernung ausgedehnt werden, damit man nicht nur die günstigsten Verhältnisste für das zu legende Tau ermitteln, sondern auch im Voraus feststellen kann, nach welcher Seite hin man im Falle der Noth von jener kürzesten Linie abzugehen hat. Zu grossen und besonders sehr unregelmässig und stark sich ändernden Tiefen geht man nach Möglichkeit aus dem Wege, um das Tau nicht zu grossen Spannungen auszusetzen und durch Störungen bei der Abwickelung zu gefährden. Die tiefen Meeresbecken zeigen meist eine auf grössere Entfernungen sich nur wenig und allmälig ändernde Tiefe; deshalb kann man in ihnen die Sondirungen in grösseren Abständen, etwa von 6 bis 12 Meilen, vornehmen, während man bei unregelmässigem Boden nur etwa in je 2 bis 3 Meilen Entfernung sondiren muss. Die Sondirungen werden um so schwieriger, je grösser die Tiefe ist. Delamarche, Ploix und de Bastard benutzten bei den Tiefenmessungen von etwa 3000 Metern, welche sie zwischen den Balearen und Algier anstellten*), ein einfaches Senkblei von 15 Kilogramm Gewicht an einer aus 18 gezwirnten Fäden bestehenden Seidenschnur von 5500 bis 6000 Meter Länge, an der von 100 zu 100 Meter Marken angebracht waren; die sich von einer Rolle abwickelnde Schnur hielt von selbst an, wenn das Blei den Grund erreicht hatte und wurde dann von zwei Mann mittelst einer Kurbel wieder aufgewickelt. Zu einer Lothung von 3000 Meter Tiefe waren etwa 1¼ Stunde erforderlich. Mit Hanf überzogene Messingseile bewährten sich schlecht und rissen leicht durch Schleifenbildung. Die ausgedehntesten und grossartigsten Tiefenmessungen wurden im Atlantischen Ocean ausgeführt und nach ihnen erschien die Legung eines Telegraphentaus quer durch diesen Ocean durchaus nicht unmöglich. Der Hydrograph und Director der Sternwarte zu Washington, Lieutenant F. M. Maury, berichtete unterm 22. Februar 1854 ausführlich über die im Sommer 1853 vom Lieutenant O. H. Berryman ausgeführten Messungen an den Marinesecretär der Vereinigten Staaten (Dingler's Journal 133, S. 74, aus Zeitschr. d. Telegr.-Ver. 1, S. 142); nach diesen Messungen war zwischen Neufundland und Irland ein regelmässiges

*) Mit ähnlichen Senkbleien hatten Bérard und de Tessan schon 1831 zwischen Sardinien und den Balearen Tiefen von etwa 1500 Meter gemessen.

Plateau von 1500 bis 2000 Faden Tiefe. Die vom Meeresboden mit heraufgebrachten Bodenproben zeigten kalkige Schalen mikroskopischer Muscheln, woraus man auf die Abwesenheit merkbarer Strömungen am Boden dieser Meeresstellen schloss. (*Shaffner*, *tel. man.* S. 653.) Die bei diesen Sondirungen benutzte Tiefseesonde des Lieutenant J. M. Brooks zeigt Fig. 28. Eine in ihrer Axe durchbohrte Kugel *k* ist mittels teiner Schnur *f* und einer Schlinge *g* an 2 Haken zweier um die Axe *x* drehbarer Hebel aufgehängt und mit dieser Axe ist der Schaft *s* der Sonde fest verbunden. Während des Niedergehens hängen Schaft und Kugel an der straffen Lothleine *h* wie Fig. 28*a* zeigt; sobald jedoch der Schaft auf den Boden aufstösst, wird die Leine *h* schlaff, die Hebel nehmen die in Fig. 28*b* gezeichnete Lage an, die Schnur *f* rutscht von den Haken ab und fällt sammt der Kugel zu Boden, worauf der Schaft *s* allein wieder aufgezogen wird. Eine etwas einfachere Einrichtung des obern Theils ist in Fig. 28*d* abgebildet. Das untere Ende des Schaftes ist hohl und entweder blos mit Unschlitt bestrichen, oder er enthält 3 Federkiele (Fig. 28*c*), damit in dieselben etwas von den Bestandtheilen des Bodens eindringen und mit emporgenommen werden kann. Weitere Messungen folgten im Herbst 1856; bei diesen beobachtete Berryman die gleichmässige Abnahme der Geschwindigkeit der niedergehenden Sonde, welche er auf die Reibung der Leine am Wasser schiebt; bei den tieferen Sondirungen dauerte das Sinken etwa 3 Stunden, das Aufheben besorgte eine kleine Dampfmaschine (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 232, mit Profil des Meeresbodens zwischen Irland und Neufundland, aus Petermann's geographischen Mittheilungen 1856, S. 175). Bei den 1857 von Capitän Dayman vorgenommenen Sondirungen zwischen Irland und Neufundland befand sich am Ende des Schaftes eine federnde Klappe, welche beim Sinken die Höhlung offen liess, beim Aufstossen aber durch die darüber weggleitende Kugel in das Innere des Stabes hineingeschoben wurde und so die in diesen eingedrungenen Bodenbestandtheile absperrte, worauf eine zweite, ursprünglich über der ersten sitzende Kugel mit engerer Bohrung auf der Feder sitzen blieb und deren Rückgang beim Aufziehen verhinderte. Das in Fig. 29 abgebildete Tiefenloth des Lieutenant Fitzgerald hat ein auf 2 Häkchen *b* der Eisenstange *e* sitzendes, 80 bis 90 Pfund schweres Eisenstück *a*; am Ende der Stange *e* befindet sich ein Kästchen *d*, welches durch die Klappe *f* verschlossen werden kann; die Lothleine *h* ist an einem Hebel *g* befestigt, welcher mit dem einen Ende *k* in den Eisenstab *e* eingesteckt ist, während das andere Ende *i* mittelst einer Schnur *s* an die Klappe *f* geknüpft ist, so dass diese beim Sinken das Kästchen *d* nicht verschliessen kann; stösst jedoch die Sonde mit dem Kästchen auf dem Boden auf, so hakt sich das Ende *k* des Hebels *g* aus dem Stabe *b* aus, dieser schlägt um, das Senkgewicht *a* hakt aus, das Kästchen *d* schaufelt etwas vom Meeresboden auf und wird vorangehend beim Aufziehen des Lothes von der Klappe *f* verschlossen. — Eingehendere Mittheilungen über die

Sondirungen des Meeresbodens und die Tiefenmessungen gab Schellen in Westermann's Monatsheften 1860, Bd. 8, S. 91.

Von grosser Wichtigkeit ist ferner die Wahl der Landungspunkte, welche wo möglich frei von Klippen sein sollen; heftige Bewegungen des Meeres an den Landungspunkten erschweren die Landung des Taus und setzen dasselbe einer Beschädigung durch Abscheuern aus. In der Nähe der Landungspunkte soll sich ferner den Schiffen kein passender Ankergrund bieten, damit das Tau beim Aufwinden der Anker nicht gefährdet ist. Endlich sollen die Landungspunkte nicht zu weit von den Uferstationen entfernt sein.

Die Schwierigkeiten bei der Niederlegung des Taus auf dem Meeresboden hat man auf verschiedene Weise zu umgehen versucht. J. J. Lake schlug vor, das Tau an Korkstücken aufzuhängen und später am Grunde durch Anker oder Gewichte festzuhalten (*Mech. Mag.* 53, S. 274). H. B. Wright liess sich am 21. August 1866 die Benutzung von Bojen beim Legen und zum Schwebenderhalten des Taus patentiren. (*Mech. Mag.* 15. März 1867, S. 169). Armand in Bordeaux fertigte 1865 ein neues Tau, angeblich eine Erfindung des Kaisers Napoleon, welches in einer Tiefe von 30 bis 40 Meter, wo das Meer selbst bei heftigen Stürmen ruhig bleibt, schwimmend erhalten werden sollte (D. Ind.-Ztg. 1865, S. 269). W. Bauer sprach einen ähnlichen Gedanken aus: An den im Atlantischen Meere zwischen Europa und Amerika aufgefundenen Höhenzügen beträgt die Tiefe nicht viel über 500 Fuss; an diesen Punkten, in Entfernungen von je etwa 40 geogr. Meilen, sollten auf versenkbaren, mit Leuchtthürmen versehenen Schiffen Hauptstationen errichtet werden, zwischen denen das an regelmässig vertheilten Schwimmern hängende Tau in 200 Fuss Tiefe unter dem Spiegel hinziehen sollte; muss ein Stationsschiff wegen Sturm in die Tiefe gehen, so lässt es an der Oberfläche einen durch elektrisches Licht erleuchteten Schwimmer zur Bezeichnung seiner Stelle zurück; so wäre zugleich die Hauptschifffahrtsstrasse über den Ocean bleibend markirt und die Schiffe hätten die Möglichkeit eines fast ununterbrochenen telegraphischen Verkehrs mit dem Festland (D. Ind.-Ztg. 1864, S. 368.) Das grosse Gewicht des vom Schiff herabhängenden Taustücks wollte Patrick M'Grade dadurch vermindern, dass er das Tau durch Röhren gehen liess, welche an Hilfstauen so aufgehängt werden sollten, dass sie bremsend auf das Telegraphentau wirken könnten (*Civ. Eng.* 1859, S. 324). Die Geschwindigkeit des Ablaufens durch am Tau angebrachte Fallschirme zu mässigen, war nach einem Vorschlag von Balestrini schon bei der Legung des Bona-Kabels versucht worden, jedoch ohne Erfolg. (Delamarche, Elemente S. 67). Aehnlich beabsichtigte Pierre Dronier in Entfernungen von je 200 Metern einen Fallschirm (Preis 4 Ngr.) von 0,6 Metern Durchmesser anzubringen, damit das Tau höchstens mit 1 Meter Geschwindigkeit ablaufe; diese Schirme sollten aus Segeltuch passend zugeschnitten, durch am Um-

fange befestigte Stricke so an's Tau gebunden werden, dass sie sich beim Eintritt in's Wasser schirmartig aufblähten (D. Ind.-Ztg. 1866, S. 138). In England wurde vorgeschlagen, das Tau nach seinem Ablaufen vom Schiff anfangs durch Bojen aus Kautschuk oder einem andern wasserdichten Stoffe schwebend zu erhalten; die Bojen sollten 2 Oeffnungen bekommen, von denen die eine luftdicht verschliessbar sein und zum Einfüllen der Luft dienen sollte, während die andere mit einem Drahtnetze verschlossen wird, welches mit einer sich im Wasser allmälig lösenden Substanz, z. B. Gummi überzogen ist, so dass sich das Tau senkt, so wie sich diese Substanz löst und Luft entweicht (D. Ind.-Ztg. 1864, S. 59).

Die ersten Unterseetaue wurden von Segelschiffen versenkt, welche von einem oder mehreren Dampfern geschleppt wurden. Bald jedoch erkannte man, dass sich ein Dampfschiff besser eignen müsse, weil man dessen Bewegung besser überwachen und regeln kann; das Schiff muss aber ausreichende Stabilität, Grösse und Tragfähigkeit besitzen, seine kräftige Maschine muss einen leichten und sichern Gang haben und das Deck eine freie Bewegung gestatten. Wegen der am Tau befindlichen beträchtlichen, aber veränderlichen Eisenmasse kann das Kabelschiff den Compass nicht brauchen und deshalb ist bei grösseren Entfernungen ein besonderer Dampfer als Wegweiser erforderlich. Früher liess man das Tau vom Vordertheil, jetzt vom Hintertheil ablaufen. Im Schiff wird das Tau gewöhnlich in Rollen von möglichst grossem Durchmesser gelegt, obgleich hierbei das ablaufende Kabel eine die Festigkeit beeinträchtigende Drehung erfährt und leicht durch Schleifenbildung gefährdet wird. Um die Drehung zu umgehen, könnte man das Tau in Form einer 8 legen, allein man würde dann wesentlich mehr Raum für dasselbe Tau brauchen; oder man könnte das Tau, falls es nicht zu gross ist, auf Haspel wickeln. So schlug Capitän Labrousse vor, auf 5 Haspeln von 13 Meter Länge und 2 Meter Trommel-Durchmesser mit Endscheiben von 4 Meter Durchmesser je 160000 Meter (114 Tonnen) eines zwischen Frankreich und Algier zu legenden Taus aufzuwickeln (Delamarche, Elemente d. unters. Tel., S. 62). Auch hat man beim Legen des Varna-Balaclava-Kabels versucht, durch eine besondere Maschine jene Drehung wieder zu beseitigen. Der Raum, in welchen das Tau geladen wird, muss ganz frei zugänglich sein und beim Ablaufen dürfen sich dem Tau keine unbeabsichtigten Hindernisse in den Weg stellen. Die Ladung muss natürlich gleichmässig über das Schiff vertheilt sein und dieses Gleichgewicht darf beim Ablaufen des Taus nicht gestört werden, was sich am leichtesten erreichen lässt, wenn als Ballast für das Schiff Wasser benutzt wird. Das geladene Tau muss sorgfältig vor zu grosser Erwärmung geschützt werden, um so mehr, als die getheerte Hanfhülle sich selbst zu erhitzen pflegt. C. William Siemens wies diese Selbsterhitzung mittelst eines Widerstandsthermometers nach, welches aus mehreren, auf einen 18 Zoll langen Metallstab aufgewickelten Lagen mit Seide besponne-

nen Kupferdrahtes bestand; wurde mittelst eines Differentialgalvanometers (oder einer Wheatstone'schen Brücke) der Widerstand dieser Drahtrolle gemessen, so konnte man aus der innerhalb der gewöhnlichen Temperaturgrenzen der temperatur proportionalen Widerstandsänderung die Temperatur bestimmen. Siemens wies mit solchen Instrumenten bei dem Rangoon-Singapore-Kabel nach dessen Verladung eine stetige tägliche Temperaturzunahme von 3° F. nach und zeigte damit zugleich, wie wichtig, ja nothwendig eine öftere Abkühlung der Taue sei (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 353).

Welche Linie das vom Schiff ins Meer herabhängende Tau bildet, hängt von der Geschwindigkeit des Schiffs, der Geschwindigkeit des Ablaufens und des Niedersinkens des Taus im Wasser ab, also auch von der Tiefe des Wassers und dem specifischen Gewicht des Taus. Im Zustande der Ruhe würde das Tau eine gemeine Kettenlinie bilden; da es aber im Wasser niedersinkt und sich auf den Boden legt, so kann es dabei auch eine andere Linie bilden. Abgesehen von den in der Nähe des Schiffs stattfindenden, bei Bestimmung der Festigkeit des Taus nicht ausser Acht zu lassenden Schwankungen und dem Wellenschlage, nimmt Siemens an, das Tau falle senkrecht zu seiner Richtung mit constanter Geschwindigkeit und bilde daher bei constanter Geschwindigkeit des Schiffs eine Gerade*), bei zu- oder abnehmender Schiffsgeschwindigkeit eine nach oben oder unten gekrümmte krumme Linie (Delamarche, Elemente S. 31, 34 u. 55). Natürlich ist die Spannung des Taus ausser der Tiefe und dem specifischen

---

*) Nach W. Thomson ist beim Gewicht W der Längeneinheit des Taues im Wasser, beim Neigungswinkel α der Kabellinie gegen den Horizont, der Wassertiefe D und der Länge $D:\sin\alpha$ des eingetauchten Stücks der Druck senkrecht gegen die Richtung des letzteren $WD\cos\alpha:\sin\alpha$ und die in Richtung des Kabels infolge der Schwere wirkende Seitenkraft WD (also unabhängig von α). Ist nun P die transversale, Q die longitudinale Seitenkraft des (sogenannten) Reibungswiderstandes, den das Tau längs der im Wasser zu durchlaufenden Strecke (für jede Längeneinheit) erfährt, und T die Spannung des Taues, so ist

$$WD = T + Q.D:\sin\alpha \quad \text{und} \quad W\cos\alpha = P.$$

Entsprechen nun den Componenten P und Q die (hypothetischen) Beschleunigungen p und q, so ist $p = v\sin\alpha$ und $q = u - v\cos\alpha$, wenn v die Geschwindigkeit des Schiffes, u die Geschwindigkeit (Beschleunigung) ist, mit welcher das Kabel vom Schiff abläuft; der Widerstand, den das Kabel findet, ist eine Function der Geschwindigkeit und diese wird sich daher während des Versenkens ändern; hätte man nun in einem bestimmten Augenblicke p_1 und q_1, so könnte man $P = Wp^2:p_1^2$ und $Q = Wq^2:q_1^2$ setzen und erhielte

$$p_1 = v\sin\alpha : \sqrt{\cos\alpha} \text{ und } q_1 = (u - v\cos\alpha\sqrt{WD:(WD-T)\sin\alpha},$$

welche Ausdrücke anwendbar sind, wenn das Tau unter dem Wasser sich gleichförmig fortbewegt, vorausgesetzt, dass sein unteres Ende keine Spannung erleidet. Eine Tabelle für $v:p_1$ findet sich in Dingler's Journal 183, S. 493. — Vergl. ausserdem *Civ. Eng.* 1859, S. 317 und 412, S. 273 und S. 285.

Gewichte, dem Widerstande des Wassers und der Stärke der Bremsung von der Gestalt der Linie abhängig, die es im Wasser bildet. Auf alle Fälle aber muss bei wechselnder Wassertiefe und bei nicht ganz unveränderlicher Geschwindigkeit des Schiffs auch die Geschwindigkeit sich ändern, mit welcher das Tau vom Schiff abläuft, wäre es auch nur, damit das Tau auf dem Boden keine Schlingen bilde und keine unnöthige Spannung behalte *). Daher sind stets Vorrichtungen zum Reguliren und Messen dieser Geschwindigkeit des Ablaufens nothwendig. Diese und die Vorrichtungen zur Führung des Taus auf seinem Wege aus dem Schiffsraume in das Meer mögen hier Erwähnung finden.

Bei der (missglückten) von Canning geleiteten Legung eines Taus im St. Lorenzbusen im August 1855 war das Tau auf dem Segelschiff Sarah L. ryant verladen, welches vom Dampfschiff James Adger unter Capitän Turner geschleppt wurde. Das Tau lag im Schiffsraume in 2 grossen Ringen, wie die Taue in den Dockmagazinen. Durch eine kleine Oeffnung im Deck lief das Tau über eine kleine Walze zu einer grossen eisernen Trommel von 12 Fuss Durchmesser, um die es 3 Mal geschlungen war, darauf ebenso viel Mal um eine zweite eben solche Trommel und dann über eine dicke Eisenstange am Stern des Schiffes in die See; die Trommeln waren mit mächtigen Bremsen versehen und ein Zählwerk an ihnen gab die Zahl der Umdrehungen und die Länge des ausgeschossenen Taus an. 32 Mann regelten beständig im Schiffsraum die Abwickelung der Ringe, verhüteten Schleifen und Klänken und bedienten die Bremsen auf dem Deck (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 19). Im Juli 1856 wurde im St. Lorenzbusen ein anderes Tau von dem Dampfer Propontis, Capitän Goodwin, unter Leitung von Samuel Canning ohne jeden Unfall gelegt. Das Tau war im Schiffsraum mit grosser Sorgfalt so untergebracht, dass jede Lage vom Centrum aus gegen den Umfang sich abrollte. Von der Rolle ging das Tau durch einen gusseisernen Trichter und über 2 gusseiserne Trommeln von 9 Fuss Durchmesser und je 1½ Tonnen Gewicht, endlich über eine Rolle am Stern des Schiffs. Ein Zähler an der Trommel gab die ausgelaufene Länge an. Die Bremsen an den Trommeln regulirten das Ablaufen, so dass sich das Tau sanft auf den Meeresboden lagerte. An den tiefsten Stellen machte das Tau einen Winkel von 25° mit dem Wasserspiegel, sein Gewicht war also gerade hinreichend, der fortschreitenden Bewegung des Schiffs das Gleichgewicht zu halten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 175).

Die Ingenieure W. J. Macquorn Rankine und John Thomson

---

*) Läuft das Tau mit einer der Schiffsgeschwindigkeit gleichen Geschwindigkeit aus, so legt es sich auf dem (ebenen) Meeresboden ohne Schleifen und ohne Spannung nieder. Wächst die Tiefe, so muss die Bremse schärfer angezogen werden, um der Beschleunigung im Ablaufen entgegen zu wirken; bei abnehmender Tiefe ist die Bremse zu lüften.

suchten durch folgende am 23. Februar 1855 für England patentirte Anordnung die grosse Reibung, Erhitzung und Abnutzung des Taus, der Eisenstange am Hackbord, der Bremsen und sonstigen Maschinerie zu vermindern und Schleifenbildung auf den Trommeln zu verhüten. Zunächst umgaben sie jede Trommel mit einem spiralförmig um die Trommel gelegten Band aus Stahl, so dass für jeden Ring des Taus ein besonderer Raum zwischen den Ringen des Bandes vorhanden war; das Band ist mit seinen Enden und nach Bedarf auch an Zwischenpunkten am Gestell der Maschinerie befestigt und bleibt feststehen, während sich die Trommel dreht. Ferner ersetzten sie eine oder mehrere Trommeln durch je ein paar grosse und starke Rollen, welche am Umfange mit kreisförmigen, durch Zwischenwände von einander getrennten, nach Erfordern mit Querriefen versehenen Kanälen mit einer zur Taudicke passenden Tiefe und Weite versehen waren; je 2 Rollen waren in derselben Verticalebene aufgestellt, so dass das Tau wechselsweise halb um die eine, halb um die andere geführt werden kann, und zwar so viel Mal, als Kanäle im Umfange vorhanden sind; dadurch war ein Durchgleiten des Taus und ein Uebereinanderlegen seiner einzelnen Ringe unmöglich gemacht; der Durchmesser der Rollen schwankt je nach der Dicke des Taus meist zwischen 6 und 10 Fuss. Ebenso liessen sie an Stelle der Eisenstange am Hackbord eine weit genug über den Stern des Schiffes hinausragende Trommel oder Rolle treten, von welcher das Tau frei ins Meer herablief. Zur Regulirung der Geschwindigkeit brachten sie mehrere doppeltwirkende Pumpen an, welche von den Rollen oder Trommeln aus in Bewegung gesetzt wurden und Wasser oder Luft durch eine verstellbare Oeffnung drängten; dabei wurde zugleich die Erhitzung in den Maschinentheilen vermindert und ausserdem konnte das gepumpte Wasser auch zur Abkühlung des Taus und der betreffenden Maschinentheile benutzt werden (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 12).

Robert Stirling Newall zu Gateshead liess sich am 14. Mai 1855 einen Apparat zur Versenkung von Unterseetauen patentiren. Das Tau wurde um einen aussen glatten, hölzernen oder eisernen, vom Boden bis zur Höhe des aufgerollten Taus reichenden Kegel gelegt, während es durch einen cylindrischen Mantel, welcher aus im Boden und Deck befestigten und durch einen in der Mitte umgelegten Reifen zusammengehaltenen Stangen gebildet war, unverrückbar in seiner Lage erhalten wurde; über dem Kegel befand sich eine Rolle, deren eine Seite genau in der Achse des Kegels lag und nach welcher das Tau gelangte, indem es durch eine Anzahl eiserner Reifen hindurchging; diese an der Decke und den Seitenwänden aufgehängten Reifen umschlossen die Spitze des Kegels nach oben hin immer enger und enger und sollten das Auseinanderfliegen der Tauwindungen infolge der Centrifugalkraft und eine Verwickelung des Taus unmöglich machen. Die Windungen des Taus wurden von aussen nach dem Kegel zu gelegt, mussten sich also beim Versenken von innen nach aussen abwickeln. Zwi-

schen dem Kegel und dem Stern des Schiffs waren ein oder zwei Bremsräder von 8 bis 9 Fuss Durchmesser angebracht (Dingler's Journal 146, S. 114).

Aehnlich waren die Einrichtungen auf der Elba, welche im September 1857 für Newall das Tau von Bona nach Cap Spartivento legte. Das durch die Eisenringe aus dem Schiffsraum kommende Tau lief durch eine Knierinne und dann in eisernen Rinnen nach dem Hintertheil, wo eine eiserne Trommel von 8 Fuss Durchmesser auf einem Balkengerüste ruhte; in der einen Abtheilung dieser Trommel lag ein Bremsband, welches durch einen Hebel beliebig gespannt werden konnte; in der andern Abtheilung der Trommel war das Tau 4 bis 6 Mal herumgeschlungen und eine Vorrichtung unten an der Trommel schob das Tau nach seinem ersten Umgange zur Seite, um die Stelle des Auflaufens stets frei zu halten und ein Uebereinanderlegen der Windungen zu verhüten. Aus einem Kasten floss stets kaltes Wasser auf die Trommel herab. Nach Siemens' Vorschlag war zur Messung der Tauspannung und zur Milderung des Einflusses der Schwankungen des Schiffs noch ein langer, mit Gewichten beschwerter, einarmiger Hebel angebracht, welcher das unter einer an seinem Ende befindlichen Rolle weglaufende Tau durchbog; diese Rolle lag genau in der Mitte der Entfernung e der Trommel von dem Gleitstück, durch welches das Tau ablief; wurde bei der durchbiegenden Belastung Q das mit K gespannte Tau um den Winkel α gegen die Horizontale oder um die Pfeilhöhe h durchgebogen, so war $Q : 2K = \sin\alpha = h : \sqrt{0,25\,e^2 + h^2}$ und hieraus: $h = Qe : 2\sqrt{4K^2 - Q^2}$; mit Hilfe dieser Formel wurde eine Scala berechnet, so dass man mittelst eines an der Rolle befestigten, auf der Scala spielenden Zeigers jederzeit die Spannung K sofort ablesen konnte, während ein Zählwerk an der Trommel die Länge des abgelaufenen Taus angab (Delamarche, Elemente, S. 95).

Das atlantische Kabel vom Jahre 1857 wurde zur Hälfte auf dem englischen Dampfer Agamemnon von 92 Kanonen, zur Hälfte auf der amerikanischen Fregatte Niagara von 5200 Tonnen eingeschifft; auf dem Agamemnon bildete es einen einzigen Stapel von etwa 15 Meter Durchmesser und 4,5 Meter Höhe und die Einschiffung erfolgte in Greenwich, wobei in 24 Stunden etwa 50 Meilen eingeschifft wurden und etwa 30 Mann die Aufwickelung bei Gasbeleuchtung besorgten; die andere Hälfte wurde zu Birkenhead erst in grosse Barken geladen und bildete auf dem Niagara 5 Stapel von 13 Meter Durchmesser, bei deren Anordnung man jedoch ziemlich sorglos verfahren sein, namentlich für ausreichenden Schutz gegen die Schiffsmaschinenwärme nicht gesorgt haben soll; die Einlegung des Taus begann stets vom Rand des Stapels aus nach dem in der Mitte befindlichen Kegel von 3 Meter Durchmesser hin. Die Maschinerie zum Legen nennt Delamarche (Elemente S. 81) plump und complicirt; sie bestand hauptsächlich aus 4 Rollen R (Fig. 30) von 1,6 Meter Durchmesser und 0,13 Meter Breite, auf welche sich das Tau in Form einer doppelten 8 aufwickelte; jede Rolle war mit einem

Zahnrade von denselben Dimensionen und einer Bremsscheibe verbunden; über eine am Hintertheile befestigte fünfte Rolle fiel das Tau ins Wasser. Ausserdem waren noch 2 grosse Rollen mit 5 Rinnen, von 2 Meter Durchmesser und 0,3 Meter Breite, in Verbindung mit Zahnrädern und Bremsscheiben vorhanden, zur etwa nöthigen Wiederaufnahme des Taus. Alles zusammen wog 15 Tonnen und kostete 50000 Franken.

Der norwegische Telegraphendirector C. Nielsen beschreibt das Verfahren bei der Legung von 24 Kabeln an der norwegischen Küste in der Zeitschrift d. Telegraphen-Vereins (6, S. 1) folgendermassen: Das Tau lag in concentrischen Ringen und jede Schicht war zur Verhütung von Verwirrungen beim Ablaufen an 8 bis 12 Stellen mit der darunter liegenden mittelst Kabelgarn verknüpft. Da der Kegel nicht in der Mitte der Ringe, sondern gerade unter der Luke stand, so waren von den entfernteren Punkten des freien kreisförmigen Raumes schräge Streben nach dem Kegel gelegt, um das Tau zu führen. Oberhalb des Decks lief das Tau zunächst über den eisernen Kopf eines Bockes zum Auslegapparat und zwar zuerst unter einer Walze weg, dann zwischen verticalen gusseisernen Führungsplatten, darauf zwischen den mit starken Eisenplatten belegten Backen einer Druckbremse hindurch, einige Mal um die Haupttrommel, über eine Walze und zwischen verticalen Frictionswalzen hindurch nach dem über dem Heck des Schiffes befestigten Rade, von dem es ins Wasser hinabschiesst. Die Haupttrommel hatte 6 Fuss im Durchmesser; in ihrem Kranze befanden sich 2 vertiefte Rinnen, die eine für einen Bremsriemen, der durch einen mit Gewichten zu belastenden Druckhebel gespannt wurde, die andere, ebenfalls einfache, aber breitere für das Tau; unter der Trommel lief das Tau über eine Rolle und an einem seitlich beweglichen Abweiser vorbei, welcher verhütete, dass sich seine Windungen auf der Trommel über einander legten. Die verticalen Frictionswalzen dienten zum Hemmen des Taus, falls es bei heftigen Seitenbewegungen des Schiffs aus der Rinne des Rades am Heck geworfen wurde. Die ganze Maschine mit Gestell, aber ohne Kegel, wog 12800 Pfund. Bei Tiefen bis 600 Fuss ist es ausreichend, wenn die Spannung des Taus von einem Manne mit dem Fusse geprüft wird. Bei schroffem Abhang des Meeresbodens an der Küste wurde das Tau am Land sicher befestigt und vom Befestigungspunkte bis zur Wasserlinie in hölzerne Rinnen gelegt; zur Befestigung dienten Deckelbolzen von 2 bis 3 Zoll Länge und 1½ bis 2 Zoll Dicke, welche mit einem Gemisch aus Schwefel und Sand in grossen Felsblöcken eingegossen wurden; das mit Blei umwickelte Tau wurde in die Nuth dieser Bolzen eingelegt und dann der Deckel fest aufgeschraubt. Wo das Tau heftigem Seegange ausgesetzt war, wurde es auf kleinen eisernen Kreuzen befestigt und durch diese, so weit die Brandung reichte, ausser Berührung mit dem Meeresboden erhalten.

Die Auslegmaschine für das atlantische Tau vom Jahre 1858 war von Everett construirt. Das aus dem Schiffsraume kommende Tau lief über

mehrere Leitrollen zuerst durch ein Führungsrohr über eine Scheibe mit tiefer Furche oder Rille im Umfange, dann auf 2 grosse Räder (*V*-Räder) mit 4 tiefen Rillen und zwar abwechselnd von dem einen Rad zum andern, indem es bei der ersten obern Rolle des ersten Rades eintrat, oben nach dem zweiten Rad ging, unten nach dem ersten zurück u. s. f., bis es bei der vierten obern Rille des zweiten Rades austrat; von da ging das Tau über eine Leitrolle nach dem Dynamometer über eine zweite gleiche, in gleicher Höhe und in gleicher Entfernung vom Dynamometer befindliche Leitrolle und über eine letzte Rolle ins Meer. Auf den verlängerten Axen der beiden grossen *V*-Räder sassen je 2, mit ihrer untern Hälfte in Kühlwasser eintauchende Bremsscheiben, gegen welche man durch 4 Stangen die 4 Bremsringe anpressen konnte; diese 4 Stangen aber wurden mittelst Winkelhebeln von einem an einem Steuerrade *S* (Fig. 31) beim Dynamometer stehenden Arbeiter bewegt, da sie mittelst einer über 2 Rollen P_1 u. P_2 gelegten Kette *K* mit dem Steuerrade verbunden waren und so von diesem aus in dem einen Sinne, beim Nachlassen des Steuerrades aber durch an ihnen angebrachte Gewichte im entgegengesetzten Sinne bewegt werden konnten. Jenseits der Bremsscheiben sassen auf der Axe der beiden grossen *V*-Räder noch Zahnräder, welche durch ein in sie eingreifendes, gemeinsames Getriebe verbunden waren und von denen das eine durch eine für diesen Zweck vorhandene besondere Dampfmaschine in der Richtung in Umdrehung versetzt werden konnte, dass das bereits versenkte Tau wieder aufgenommen wurde, die Auslegmaschine also als Aufwindemaschine diente. Das Dynamometer zeigt Fig. 31; das Tau *T* läuft unter der Rolle *G* hinweg, deren Axe in dem starken, metallenen, zwischen 2 gegenüberliegenden Stahlbacken (Coulissen) auf und nieder steigenden, durch das angehängte Gewicht *W* beschwerten Gleitstück *O* eingelagert ist. Je geringer nun die Spannung des Taus *T* ist, desto tiefer muss die Rolle *G* sinken, und demnach kann man aus dem Stande des an der Rolle *G* befindlichen Zeigers auf der an der Coulisse aufgetragenen Scala (1858 von 1200 bis 3600 Pfund) stets die Spannung des Taus unmittelbar ablesen, wenn man nur durch Anhängung bekannter Gewichte vorher die zu den verschiedenen Spannungen gehörigen Standhöhen der Rolle *G* ermittelt hat. Die Stange, woran das Gewicht *W* sitzt, trägt unterhalb in einem mit Wasser gefüllten Cylinder *U* einen Kolben, damit der Widerstand, den das Wasser der Bewegung des Kolbens entgegensetzt, etwaige Stösse des Taus bei plötzlichen Spannungsänderungen infolge starker Schwankungen des Schiffs u. dgl. unschädlich mache. Eine ähnliche Einrichtung verhütet zu grelle Bewegungen der Bremsen. — Das Tau lag 1858 auf dem Niagara in 6 Ringen; die Schiffsschraube war mit einem starken Eisengitter umgeben, damit sich das Tau nicht in sie verwickeln konnte; das Vordertheil war auch mit einer Rolle versehen, um nöthigenfalls das Tau am Vordertheil aufwinden zu können.

Im Jahre 1865 wurde das ganze Tau auf dem Great Eastern von über

20000 Tonnen Gehalt) verschifft und lag in drei 20½ Fuss tiefen cylindrischen Räumen (Tendern), von denen der vordere von 51½ Fuss Durchmesser 693, der mittlere von 58½ Fuss Durchmesser 899 und der hintere von 58 Fuss Durchmesser 898 Meilen Tau aufnehmen konnte. Die Auslegmaschine war von Canning & Clifford mit besonderer Sorgfalt so gebaut, dass das Tau leicht festgehalten, seine Geschwindigkeit leicht regulirt werden konnte und möglichst wenig Torsion zu erleiden hatte. Dazu waren 6 *V*-Räder *R* (in Fig. 32) mit einer tiefen Rinne auf ihrem Umfange hinter einander aufgestellt, und auf dem Umfange eines jeden lag eine Reitrolle *r*, deren Axe durch Hebel und Gewichte niedergehalten wurde, so dass sich die Rolle auf den Umfang des *V*-Rades auflegte. Auf den Axen der *V*-Räder sassen Bremsscheiben, deren Bremsringe nach Bedarf angezogen wurden. Das Tau ging aus dem Schiffsraume erst über eine Leitrolle, dann zwischen den Umfängen der 6 *V*-Räder und der darüberliegenden Reitrollen in gerader Linie (also nicht in Form einer 8, wie früher) nach einer kleinen Leitrolle, welche ihm die Richtung nach einer grossen Trommel von 6 Fuss Durchmesser und 1 Fuss Breite gab, auf deren Axe 2 Appoldsche Bremsscheiben sassen; nachdem es in 4 Windungen über den Umfang dieser Trommel gelaufen war, wurde ihm durch eine *V*-Rolle die Richtung nach dem Dynamometer angewiesen, und es lief dann über eine in gleicher Entfernung stehende *V*-Rolle über die letzte, starke und gegen das Abgleiten gut verwahrte Rolle am Hintertheil des Schiffes. Trommel und Bremse waren doppelt vorhanden, und falls die eine den Dienst versagte, konnte die andere durch eine einfache Hebelvorrichtung an ihre Stelle gesetzt werden. Die Bremsscheiben standen mit ihren unteren Theilen im Wasser und die Reitrollen wurden durch beständigen Wasserzufluss von oben abgekühlt. Die Bremsen wurden wieder durch ein beim Dynamometer befindliches Steuerrad geöffnet und geschlossen; sank die Rolle *G* des Dynamometers zu tief, so lief in der Regel das Tau zu schnell ab und die Bremsen mussten angezogen werden. Die Maschine arbeitete vorzüglich und mit so wenig Reibung, dass bei offenen Bremsen das Tau schon durch 200 Pfund durch sie hindurchgezogen wurde. Falls das Tau auf dem Schiff reissen oder bei ungünstigem Wetter gekappt werden sollte, hatte man ausser anderen Drahtseilen, Bojen, Enterhaken u. s. w. ein 5 Meilen langes, sehr starkes Drahtseil an Bord, mit Marken in je 100 Faden Entfernung; das eine Ende dieses Seils konnte sofort am Tau befestigt werden, während das andere Ende an einer grossen und starken Boje hing; bei einem eintretenden Unfall konnte man also mittelst der Boje den Ort, und mittelst der Marken am Seil die Tiefe erkennen, in der das Tau am Meeresboden lag. Die Aufwindemaschine war von der Auslegemaschine ganz unabhängig und hatte ihre besondere Dampfmaschine (Schellen, d. atlant. Kabel S. 71; *Atlantic Telegraph* S. 40).

Bei der Legung des atlantischen Taues von 1866 waren die Auslege-

und Aufwindemaschine mit 2 Dampfmaschinen von 70 Pferdekräften versehen, und erstere liess sich auch zum Aufwinden benutzen, so dass dieses ebensowohl vom Hintertheil, als vom Vordertheil bewirkt werden konnte. Ein 340 Centner schweres Eisengitter hielt das Tau von der Schiffsschraube fern. Der zum Auffischen des Taues von 1865 bestimmte Apparat war von Penn & Clifford neu construirt. Das Enterhakentau von 1865 hatte nur 10, das von 1866 aber 29½ Tonnen Tragfähigkeit, und nicht allein der Great Eastern, sondern auch seine Begleitschiffe Medway und Albany hatten ganz gleiche Ausrüstung zum Aufwinden. Das dazu in 20 Meilen Länge (je 7½ für den Great Eastern und Medway, 5 für den Albany) angefertigte Drahtseil (Fig. 33) hatte 6½ Zoll Umfang und bestand aus denselben mit Manilahanf umsponnenen Eisendrähten Nr. 13 (0,095 englische Zoll), wie die Umhüllung des Tiefseetaues; von seinen 7 Litzen umgaben 6 die 7. spiralförmig; ebenso die 7 Drähte jeder Litze. Hierzu kamen 5 Meilen Drahtseil für die Bojen, deren grösste mit 200 Centner Zugkraft nach oben an das bis auf eine gewisse Höhe gehobene Tau gelegt werden sollte, während die mittleren zur Befestigung des Tauendes bei etwaigem Reissen oder Kappen bestimmt waren und die kleinsten als Markzeichen dienen sollten. Im Ganzen wurden 14 Bojen gelegt und 12 davon wieder aufgenommen. Ausser den gewöhnlichen Enterhaken hatte man eine in Fig. 34 abgebildete Sorte, deren 10—12 Zoll hohe Klauen von je 10 Tonnen Tragfähigkeit mit starken Sperrfedern versehen waren, damit sie das einmal gefasste Tau beim Weiterschleifen auf dem Meeresboden zwischen Feder und Klaue festhalten könnten, und eine andere Sorte, deren Klauen auf der Innenseite mit stählernen Messern besetzt waren, an denen das gefasste Tau beim in die Höhe ziehen durch sein eigenes Gewicht sich durchschneiden sollte. Die Schaufelräder des Great Eastern wurden von einander getrennt, damit sie nach Bedarf beide zugleich oder jedes einzeln arbeiten könnten. Zwei Dampfkessel wurden ausser Dienst gestellt, weil sie den vorderen Kabeltendern so nahe lagen, dass die von ihnen ausgestrahlte Wärme die Guttapercha hätte erweichen können. Im vorderen Tender lagen 670 Meilen Tiefsee- und 3 Meilen Küstentau, im mittleren 865 und im hinteren 839 Meilen Tiefseetau; der Dampfer Medway von 1900 Tonnen trug 400 Meilen Reservetau (Schellen, das atlant. Kabel, S. 95; *the Atlantic Telegraph*, S. 89).

Der Versenkung der Taue schenkt auch *Civil Engineer and Architects Journal* (z. B. 1859, S. 29, 273, 285) wiederholt eingehende Beachtung.

4. Das Wiederaufnehmen und die Wiederherstellung schadhafter Unterseetaue.

Ist eine Unterseeleitung beschädigt worden, so wird zuerst die Lage der schadhaften Stelle auf einer Seekarte, in welche die Lage des Taues genau eingetragen ist, durch Widerstandsbestimmungen ermittelt*), darauf

*) Es geschieht dies ähnlich, wie bei unterirdischen Linien; vergl. Dub, die

sucht man an der betreffenden Stelle das Tau mit einem Anker zu fassen, hebt es behutsam, legt es in die Rinne einer Rolle an der Seite des Schiffs, welches darauf dem Tau entlang der schadhaften Stelle entgegen fährt. Ist das Tau zerrissen, so schiesst es schnell von der Rolle hinab, wenn man sich der Bruchstelle nähert; man zieht dann beide Enden an Bord, prüft sie auf ihre Isolation, setzt ein neues Stück Tau ein und lässt es behutsam wieder hinab, damit sich keine Schlingen oder Knoten bilden. Ist das Tau nicht zerrissen, sondern blos beschädigt, so wird es je nach Erfordern blos ausgebessert oder das schadhafte Stück durch ein neues ersetzt. — Bei der genauen Bestimmung und endlichen Austrennung der Fehlerstelle sind Proben, bei welchen die Leitungsdrähte im Tau durchgeschnitten werden müssen, nicht zu umgehen (vergl. auch Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 51). Der dänische Telegraphen-Inspector Lorenzen hat hierzu eine einfache Vorrichtung construirt, welche gestattet, die Leitungen des Taues zu trennen, ohne die Schutzdrähte zu durchschneiden. Zu beiden Seiten der Stelle, wo man die Leitungen trennen will, werden in etwa 2½ Fuss Entfernung von einander 2 Klemmen (wie Fig. 35) auf das Tau geschraubt, in entgegengesetzter Richtung umgedreht, bis die sich in die Riefelung fest einlegenden Schutzdrähte gerade gerichtet sind; darauf werden 2 Zugschrauben über die Handgriffe der Klammern gelegt und die Schrauben angezogen, wodurch die Schutzdrähte sich so weit auseinander begeben, dass man bequem zur Seele gelangen, die Hanfumwickelung lösen und die Guttaperchadrähte durchschneiden kann. Nach beendeter Untersuchung entblösst man den Kupferdraht an beiden Enden etwa 1 Zoll lang, stösst die Enden stumpf an einander, legt ein 1½ bis 2 Zoll langes Stück Kupferdraht seitwärts daneben, umwickelt mit feinem Kupferdraht und verlöthet gut, umgiebt den Draht mit Chatterton's Compound und Guttapercha, wickelt den Hanf um, entfernt die Zugschrauben und dreht mittelst der Klemmen die Schutzdrähte wieder in ihre ursprüngliche Lage (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 12, S. 72). — C. Lair erleichtert die Löthung dadurch, dass er die beiden Tauenden durch die Oeffnungen eines Rahmens einführt (Fig. 36), die zurückgeschlagenen Eisendrähte um einen schwach conischen Ring stülpt und so einen die Enden festhaltenden Knopf bildet, worauf die blos gelegten Kupferdrähte zusammengedreht, gelöthet und wieder mit Gutta percha überzogen werden (*Du Moncel*, *traité*, S. 289). — Fig. 37 veranschaulicht die von Latimer Clark vorgeschlagene Art und Weise der Verbindung zweier Kabelstücke (Dingler's Journal 183, S. 454). In eigenthümlicher Weise stellte der technische Inspector der Schweizer Telegraphen, M. Hipp, im December 1856 das einige Monate zuvor im Vierwaldstädter See von Bauen nach Flüelen (18000 Schweizer Fuss Entfernung,

---

Anwendung des Elektro-Magnetismus, Berlin 1863, S. 171; Schellen, d. elektromagnetische Telegraph, 4. Aufl. S. 273—286.

grösste Tiefe 700 Fuss) gelegte Tau wieder her. Der Leitungsdraht dieses Taus war mit Guttapercha isolirt, durch ein mit Theer getränktes Hanfband geschützt und mit 2 Eisenbändern der Art umwunden, dass das zweite die vom ersten gelassenen Lücken überdeckte. Gewicht 60 Centner, Werth 10000 Francs. Die Voruntersuchung deutete auf einen Fehler in 2000 Fuss Entfernung vom Ufer bei Flüelen; das Tau, welches sich in den Schlamm versenkt hatte, wurde an dieser Stelle aus 300 Fuss Tiefe empor gehoben, zeigte an der für verdächtig gehaltenen Verbindungsstelle keinen erheblichen Fehler, vielmehr waren beide Theile, der aufgehobene kürzere und der längere, fehlerhaft, weil, wie sich später ergab, die Guttapercha spröd und rissig geworden war; das kürzere Stück wurde durch ein neues ersetzt, das längere aufzuheben war misslich, weil die Eisenbänder den Draht zu wenig vor dem Reissen schützten. Einen so starken Strom durch das Tau zu senden, dass die Erwärmung des Drahts zum Erweichen der Guttapercha ausreichte, war kostspielig und konnte misslingen. Hipp ging daher darauf aus, durch die Einwirkung einer starken Batterie, deren positiver Pol mit der Leitung verbunden wurde, den Kupferdraht zu oxydiren und mit seinem Oxyd die Risse der Guttapercha auszufüllen. Er beauftragte demgemäss das Telegraphenbureau Luzern, diese Operation mit einem constanten Strom von 72 Elementen vorzunehmen und zwar im Bureau Luzern selbst, welches 9 Stunden von der Stelle des Vierwaldstädter Sees entfernt ist, wo das Tau eingesenkt ist; der Strom musste also durch diese Leitung gehen. Der Stromverlust betrug, wenn die Leitung jenseits des Vierwaldstädter Sees unterbrochen wurde, 32 bis 36° eines Galvanometers mit 32 Umwindungen, an dem die Stärke des gewöhnlichen Telegraphirstroms 30° betrug. Den 5. December Morgens begann die Operation und am 8. betrug die Ableitung auf der unterseeischen Leitung von Luzern nach Altdorf nur 3°, von Altdorf nach Luzern nur 2°; am ersten Tage war die Ableitung gleich stark geblieben, am zweiten Tage auf 20° und am dritten auf 8° herabgegangen; erst nach 3 Wochen, während welcher Zeit die Batterie immer in gutem Stande erhalten wurde, war der Verlust nur noch 1°. Ein Versuch im Kleinen weist nach, dass nicht nur eine Spalte in der Guttapercha unter Wasser mit Oxyd ausgefüllt werden kann, sondern dass sich auch dieses Oxyd unter fortdauernder Einwirkung des Stroms auftrocknen lässt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 4, S. 73).

Gestützt auf die im Jahre 1866 gemachten Erfahrungen führte Latimer Clark einen neuen pneumatischen Regulator und einen ankerartigen Enterhaken aus, welche beide bereits patentirt sind (Dingler's Journal 183, S. 450, aus *Mech. Mag.* XVI, S. 40). Bei dem Regulator ist die Scheibe, welche von dem über 2 entsprechende Führungsrollen zu- und abgeführten Tau getragen wird, an einem Kolben in einem hohen, 5 bis 6 Fuss weiten Cylinder befestigt; der Raum unter dem Kolben steht aber durch ein mit einer Klappe versehenes Rohr mit einem Behälter in Verbindung, in wel-

chem die Luft durch Pumpen entsprechend verdünnt wird; bei sich ändernder Spannung in dem ablaufenden oder aufzuwindenden Tau steigt der Kolben in seinem Cylinder auf oder nieder. Soll dieser pneumatische Regulator beim Auslegen eines Taus benutzt werden, so muss die Bremsvorrichtung mittelst eines ähnlichen Luftcylinders mit dem eben erwähnten so verbunden werden, dass bei jeder Zunahme der Spannung im ablaufenden Tau das Bremswerk so weit gelüftet wird, dass eine das Tau gefährdende Spannung oder gar ein Reissen des Taus verhütet wird. — Den Enterhaken hat Clark so eingerichtet, dass er beim Zusammentreffen mit dem Kabel an seiner Vorder- oder Rückseite dasselbe zwischen 2 Platten einklemmt und beim Aufwärtsziehen zerschneidet, den eingeklemmten Theil zu Tage bringt, das abgeschnittene oder abgerissene Ende aber auf den Boden zurückfallen lässt.

II.

Ueber die Formveränderungen prismatischer Stäbe durch Biegung.

Von

GUSTAV AD. V. PESCHKA,

Professor am k. k. technischen Institute in Brünn.

Die Formveränderungen, welche feste, elastische Körper unter dem Einflusse äusserer Kräfte erfahren, sind bereits vielfach Gegenstand eingehender Studien gewesen. Die wissenschaftlichen Untersuchungen stützten sich auf Grundgleichungen, die auf einer Hypothese beruhten, welche aller Wahrscheinlichkeit nach als richtig angesehen werden muss. Die Lösung obgenannter Gleichungen bestimmt die Raumveränderung einzelner Molekule, ausgedrückt durch die sie beeinflussenden Kräfte und durch die Coordinaten ihrer Anfangslagen.

Da jedoch jene Gleichungen partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, so blieb man auch von der strengen Bestimmung dieser Raumveränderungen weit entfernt. Nur einige wenige Gesetze, wie z. B. jenes der Aenderung der Ausdehnung (Dilatation) nach verschiedenen Richtungen von einem Punkte aus, gestatteten eine einfache und elegante Ausdrucksform; aber selbst hierfür gestalten sich die Näherungsformeln für die inneren Spannungen so complicirt, dass sie eine praktische Anwendung nicht wohl zulassen.

Man machte deshalb in speciellen Fällen specielle, auf Wahrscheinlichkeit beruhende Annahmen, wodurch die Schwierigkeiten der Integration grossentheils umgangen wurden. Eine der ältesten Voraussetzungen ist die, „dass der Widerstand, den ein dünner prismatischer Stab dem Biegen durch äussere Kräfte an irgend einer Stelle seiner Länge entgegensetzt, dem Krümmungshalbmesser seiner Axe in eben demselben Punkte umgekehrt proportional sei“; eine Hypothese, von welcher schon Bernoulli unter Annahme einer elastischen Linie, d. i. eines Stabes von unendlich kleinem Querschnitte, Gebrauch machte.

In der That ist diese Annahme, wenn sie auf Stäbe, deren Querschnitte nicht sehr klein sind, angewendet wird, diejenige, welche für die Praxis äusserst nützliche Resultate liefert, und welche, wie bekannt, die Grundlage einer Theorie wurde, die durch Navier, Poncelet, Morin und Andere ausgebildet und durch Erfahrungen bereichert und gefestigt, allgemeine Verbreitung fand.

In dem Folgenden wollen wir es versuchen, die Formveränderung prismatischer Stäbe durch Biegung unter consequentem Festhalten an einer gegenwärtig allgemein üblichen Hypothese durchzuführen. Die sich ergebenden Resultate sind der Hauptsache nach keineswegs neu; daher das Vorliegende eigentlich als eine Studie anzusehen sein wird, bei welcher vielleicht wenigstens die Darstellung einige Beachtung verdienen dürfte.

Voraussetzungen. Zum Behufe einer befriedigenden Lösung der uns gestellten Aufgabe werden sowohl bezüglich des Körpers während der Beeinflussung durch äussere Kräfte, als auch betreffs der mit der Formveränderung desselben im Zusammenhange stehenden Vorgänge im Innern des Stabes, gewisse Voraussetzungen gemacht werden müssen. Selbstverständlich müssen diese Annahmen von der Art sein, dass deren Zulässigkeit entweder schon an und für sich in der Natur der Sache begründet erscheint, oder doch wenigstens insofern als naturgemäss bezeichnet werden können, als man unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit, ohne auf Widersprüche zu stossen, zu Resultaten gelangt, die sich erfahrungsgemäss als richtig bewahrheiten.

a. Eine lineare Aufeinanderfolge der Molekule eines Körpers wollen wir eine Faser nennen und voraussetzen, dass die Richtung der Fasern immer parallel sei mit der Richtung der Molekularkräfte. Letztere widersetzen sich der Formveränderung und leisten somit den äusseren, die Festigkeit des Körpers beanspruchenden Kräften Widerstand.

Ein homogener stabförmiger Körper von congruentem Normalquerschnitt wird daher als ein Bündel ganz gleicher Fasern anzusehen sein, oder der gerade Stab sowohl, als auch der gekrümmte besteht aus unendlich vielen unter einander parallel laufenden Fasern, die, als mathematische Linien betrachtet, in parallelen Ebenen liegen.

b. Alle Atome, welche ursprünglich in einem ebenen Querschnitte lagen, sollen auch im gebogenen Zustande in einer Ebene liegen, die an den betreffenden Stellen der Faser auf dem Faserelemente senkrecht steht.

Unter Querschnitt des Stabes, welchen wir durchgehends, d. i. in der ganzen Länge des Stabes als sich gleichbleibend annehmen wollen, verstehen wir jene Figur, die erhalten wird, wenn sämmtliche Fasern durch eine Ebene normal geschnitten werden.

Die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller aufeinanderfolgenden

Querschnitte, welche wir uns als eine Curve denken, heisse die Axe oder die Axenfaser des Stabes.

c. Durch die Axe und den Querschnitt des Stabes ist die Gestalt desselben vollkommen bestimmt.

Die Ebene der Axe des stabförmigen Körpers heisse dessen Biegungs- oder auch Hauptbiegungsebene. In dieser Ebene denken wir uns alle den Stab angreifenden Kräfte wirkend.

d. Die Atome eines und desselben Querschnittes behalten ihre relative Gegeneinanderlagerung bei; es ändert sich also durch die Biegung weder die Form, noch die Grösse des Querschnittes.

e. Nach der Biegung bleiben die Fasern, wie zuvor, unter einander parallel, treten aus ihren Ebenen nicht heraus und bilden alle ursprünglich geradlinigen Fasern im gebogenen Zustande des Stabes zur äussersten Faser äquidistante Linien.

f. Die Biegung des Stabes sei von der Art, dass die für die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben innerhalb der Elasticitätsgrenze geltenden Gesetze ihre volle Giltigkeit behalten.

Obwohl diesen Voraussetzungen ein eingespannter und belasteter Stab niemals mathematisch genau entsprechen wird, so mussten denn doch diese Annahmen vorausgeschickt werden, weil bei starken Belastungen und bei einem leicht zusammendrückbaren Materiale so complicirte Molekularverschiebungen und Formveränderungen eintreten, dass es ganz unmöglich ist, diese durch Rechnung zu bestimmen. Die gemachten Annahmen haben aber zugleich eine wichtige praktische Bedeutung; denn sie sprechen die Bedingungen aus, denen jeder auf Biegungsfestigkeit beanspruchte Bestandtheil genügen muss, um als solides Glied irgend einer Construction betrachtet werden zu können.

A. Wir werden zuerst einen Stab betrachten, der an dem einen Ende festgehalten und an dem anderen Ende belastet erscheint.

Obwohl dieser Fall in der Wirklichkeit verhältnissmässig selten vorkommt, so wollen wir denn doch von demselben ausgehen, weil sich auf ihn alle anderweitigen Biegungsfälle zurückführen lassen.

Gleichgewichtsbedingungen. Soll in einem Stabstücke, das zwischen einem beliebigen Querschnitte F_1 und dem Stabende liegt, Gleichgewicht stattfinden, so müssen selbstverständlich die in diesem Querschnitte durch die Belastung und durch die hiermit im Zusammenhange stehende Formveränderung (Biegung) wachgerufenen Kräfte, welche theils in der Ebene des Querschnittes, theils senkrecht auf dieselbe, jedoch parallel zur Biegungsebene, wirken, mit den äusseren Kräften im Gleichgewichte sein.

Die Bedingungen, die zu erfüllen sein werden, damit der Gleichgewichtszustand eintrete, lassen sich kurz folgend zusammenfassen.

Denken wir uns nämlich jede einzelne Kraft in zwei beliebige Kräfte zerlegt, deren Richtungen zweckmässigerweise so gewählt werden können, dass sie mit den Coordinatenaxen OX und OY (der Ursprung derselben werde mit O bezeichnet) zusammenfallen oder zu denselben parallel sind und in der Biegungsebene liegen, so muss:

a) die Summe der Componenten aller Kräfte geschätzt nach zwei beliebigen Richtungen gleich Null sein, und

b) die algebraische Summe ihrer statischen Momente in Bezug auf eine durch den betreffenden Punkt der Axenfaser gehende, auf der Ebene der Figur senkrecht stehende Axe gleich Null sein.

Die Momente der Kräfte werden als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Drehung im Sinne von der positiven Abscissenaxe zur positiven Ordinatenaxe, oder umgekehrt geschieht.

Um einen ersten Ausdruck für jene inneren Kräfte zu erhalten, wird die Betrachtung eines zweiten, dem ersten unendlich nahen Querschnittes F_2 und die der Aenderung ihrer gegenseitigen Lage nach der Biegung nöthig sein.

Der ursprüngliche Zustand des Stabes heisse der erste, jener nach der Biegung der neue oder zweite.

Im ersten Zustande schneiden sich die Querschnitte F_1 und F_2 in einer Geraden, welche auf der Hauptbiegungsebene senkrecht steht und letztere im Punkte A_1 trifft. Versteht man unter F_1 und F_2 zugleich die Schwerpunkte der zwei vorerwähnten Querschnitte, so ist offenbar A_1 der Krümmungsmittelpunkt der Axenfaser für das Intervall $F_1 F_2$ und $A_1 F_1$ und $A_1 F_2$ als die Durchschnittslinien der Querschnittsebenen mit der Biegungsebene, deren Krümmungshalbmesser, welche den unendlich kleinen Winkel α_1 einschliessen und die wir mit ϱ_1 bezeichnen werden.

Im zweiten Zustande wollen wir die correspondirenden Grössen mit $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$, A, α und ϱ benennen.

Was von der Schwerpunktsfaser gilt, hat selbstverständlich auch bezüglich aller übrigen Fasern seine Richtigkeit. Die Krümmungsmittelpunkte derselben werden sämmtlich auf der in A_1 zur Hauptbiegungsebene errichteten Normalen liegen und wieder als die Durchschnittspunkte jener Geraden mit den respectiven Biegungsebenen erscheinen.

Denken wir uns durch F_1 eine auf die Biegungsebene senkrechte Gerade gezogen (in der Folge werden wir diese Gerade kurz mit F_1 benennen) und betrachten wir ein unendlich kleines Faserstück zwischen den beiden vorgenannten Profilen von der Länge λ_1 und dem sehr kleinen Querschnitte ∂f, so wird, wenn wir dessen Entfernung von der erwähnten Geraden u heissen:

$$\lambda_1 = (\varrho_1 \mp u)\, \alpha_1.$$

Das negative oder positive Vorzeichen wird zu wählen sein, je nachdem die Faser auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite mit dem

Krümmungsmittelpunkte liegt. Da sich zufolge der getroffenen Annahme das α nach der Biegung nicht ändert, wird auch

$$\lambda = (\varrho_1 \mp u)\,\alpha,$$

wobei λ für den zweiten Zustand dieselbe Bedeutung, wie λ_1 für den ersten hat. Die Faser hat also eine Längenänderung

$$\lambda - \lambda_1 = (\varrho \mp u)\,\alpha - (\varrho_1 \mp u)\,\alpha_1$$

erlitten. Hiernach wird die Kraft ∂p, mit welcher die Faser dieser Aenderung widersteht, durch den Ausdruck

$$\partial p = \partial f \,\frac{(\lambda - \lambda_1)\,E}{\lambda_1} = E\partial f\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\varrho + u}{\varrho_1 + u} - 1\right)$$

dargestellt, wo u schon das Zeichen in sich schliesst und E den Elasticitätsmodul für das Material des Stabes bezeichnet.

Dieser Ausdruck lässt sich unter der Voraussetzung, dass u gegen ϱ und ϱ_1 sehr klein ist, in einen für die Folge bequemeren verwandeln; es ist nämlich:

$$\frac{\varrho + u}{\varrho_1 + u} = \frac{\varrho\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)}{\varrho_1\left(1 + \frac{u}{\varrho_1}\right)} = \frac{\varrho}{\varrho_1}\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)\left(1 + \frac{u}{\varrho_1}\right)^{-1}.$$

Vernachlässigt man die zweiten und höheren Potenzen von u, so erhält man:

$$\frac{\varrho + u}{\varrho_1 + u} = \frac{\varrho}{\varrho_1}\left(1 + \frac{u}{\varrho} - \frac{u}{\varrho_1}\right),$$

und daher

$$\partial p = E\partial f\left[\frac{\alpha\varrho}{\alpha_1\varrho_1}\left(1 + \frac{u}{\varrho} - \frac{u}{\varrho_1}\right) - 1\right].$$

Nun sind aber $\alpha\varrho$ und $\alpha_1\varrho_1$ nichts Anderes, als die Längen ∂s und ∂s_1 des betrachteten Elementes der Axe zwischen den Punkten F_1 und F_2 in beiden Zuständen des Stabes, daher wird

$$1)\qquad \partial p = E\partial f\cdot\frac{ds}{ds_1}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)u + E\partial f\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial s_1} - 1\right),$$

welcher Ausdruck die in einem Flächenelemente des Querschnittes senkrecht auf dessen Ebene wirkende Kraft repräsentirt.

Die zweite in der Ebene des Flächenelementes (gegen das Abscheren oder Abschieben) wirkende Kraft, deren Zahlwerth wir einstweilen nicht näher bestimmen, heisse ∂q.

Bezeichnet φ den Winkel, den die Richtung von ∂p mit der positiven Abscissenaxe einschliesst, und ψ den Winkel mit ∂q, und sind $X\,Y$, $X_1\,Y_1$ etc. die Componenten der äusseren Kräfte, so hat man für das Gleichgewicht die Bedingungsgleichungen:

$$2)\qquad \Sigma\,\partial p.\cos\varphi + \Sigma\partial q.\cos\psi + \Sigma X = 0,$$

$$3)\qquad \Sigma\,\partial p.\sin\varphi + \Sigma\partial q.\sin\psi + \Sigma Y = 0,$$

wo sich die Summenzeichen beiderseits auf alle Kräfte erstrecken.

Um ∂q zu eliminiren, multiplicire man die Gleichung 2) mit $cos\,\varphi$, die Gleichung 3) mit $sin\,\varphi$ und addire dieselben, so wird:

$$\Sigma\,\partial p\,(cos^2\varphi+sin^2\varphi)+\Sigma\partial q\,(cos\,\varphi\,cos\,\psi+sin\,\varphi+sin\,\psi)$$
$$+cos\,\varphi\,\Sigma X+sin\,\varphi\,\Sigma\,Y=0;$$

oder, da

$$cos\,\varphi\,\,cos\,\psi+sin\,\varphi\,\,sin\,\psi=0$$

ist, wird

$$\Sigma\partial p+cos\,\varphi\,\Sigma X+sin\,\varphi\,\Sigma\,Y=0. \tag{4}$$

Obwohl, um die Gleichung für die statischen Momente der den Körper beeinflussenden Kräfte aufzustellen, die Drehungsaxe beliebig gewählt werden könnte, so dürfte es denn doch zweckdienlich erscheinen, um die bisher nicht ermittelten Abschiebungskräfte ∂q hierauf ausser Einfluss zu bringen, die Drehungsaxe als im Querschnitte $\mathfrak{F}_1$ liegend und senkrecht auf die Biegungsebene anzunehmen. Es stellt sich diesfalls von selbst als das Einfachste dar, sie durch den Schwerpunkt zu führen, weil dann nur die Coordinaten der Axe, deren Veränderungen wir eigentlich zu bestimmen haben, in die Rechnung eintreten.

Diesem Umstande zufolge denken wir uns auch die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte in die Stabaxe verlegt.

Seien die Coordinaten der Letzteren allgemein ξ und η, die Coordinaten von $\mathfrak{F}_1$ x und y, so ist die Momentengleichung:

$$\Sigma\,\partial p.u+\Sigma\,Y\,(\xi-x)-\Sigma x\,(\eta-y)=0, \tag{5}$$

wobei das Vorzeichen des ersten Gliedes noch zu bestimmen ist.

Setzt man in die Gleichungen 4) und 5) für ∂p den gefundenen Werth, ersetzt man ferner die Summenzeichen durch Integrale und bedenkt man, dass, wenn der Bogen der Axenfaser von dem betrachteten Querschnitte an gegen das Ende zu wächst,

$$cos\,\varphi \text{ und } sin\,\varphi \text{ beziehungsweise in } -\frac{\partial x}{\partial s} \text{ und } -\frac{\partial y}{\partial s}$$

übergeht, und dass endlich die Drehungsaxe, auf welche sich die Abstände u beziehen, eine Schweraxe des Querschnittes sei und folglich in Bezug auf dieselbe das Integral

$$\int u\,\partial f=0$$

ist, so ergiebt sich:

$$\int E\,\partial f\left(\frac{\partial s}{\partial s_1}-1\right)-\frac{\partial x}{\partial s}\Sigma X-\frac{\partial y}{\partial s}\Sigma\,Y=0, \tag{6}$$

$$\int E\,\partial f\,\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)u^2+\Sigma\,Y\,(\xi-x)'-\Sigma\,X(\eta-y)=0, \tag{7}$$

oder, da $\int\partial f$ die Fläche f des Querschnittes, und $\int u^2\,\partial f$ das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ desselben in Bezug auf die Schweraxe bedeutet,

$$Ef\left(\frac{\partial s}{\partial s_1}-1\right)-\frac{\partial x}{\partial s}\Sigma X-\frac{\partial y}{\partial s}\Sigma\,Y=0 \tag{6a}$$

$$7a)\qquad \pm E.\mathfrak{T}\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)+\Sigma Y(\xi-x)-\Sigma X(\eta-y)=0.$$

Die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ_1 sind hier absolut genommen; ersetzt man dieselben durch

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} \text{ und } \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_1}.$$

oder auch, da α und α_1 die Contingenzwinkel in beiden Zuständen sind, durch

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} \text{ und } \frac{\partial s_1}{\partial \varphi_1},$$

so übergehen die Gleichungen in:

$$8)\qquad \frac{\partial s}{\partial s_1}-1=\frac{1}{Ef}\left(\frac{\partial x}{d s}\Sigma X+\frac{\partial x}{d s}\Sigma Y\right),$$

$$9)\ \pm\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)=\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}-\frac{\partial \varphi'}{\partial s_1}\right)=\frac{1}{E.\mathfrak{T}}[\Sigma Y(\xi-x)-\Sigma X(\eta-y)].$$

Weil die Drehungsrichtung der positiven Momente mit der positiven Zunahme des Neigungswinkels (d. i. mit $\partial\varphi-\partial\varphi_1$) übereinstimmt, so ergiebt sich durch einfache Betrachtungen mit Leichtigkeit, dass in der Gleichung 9) das positive Vorzeichen beizubehalten sei.

Um zur endlichen Gleichung der Axenfaser zu gelangen, müssten zuerst, damit die vollständige Integration vorliegender Differentialgleichungen nicht zu grosse Schwierigkeiten darbiete, die Coordinaten, welche sich auf den ursprünglichen Zustand des stabförmigen Körpers beziehen, durch Elimination entfernt werden. Begnügt man sich jedoch mit zulässigen Annäherungen, so sind die durch die Biegung herbeigeführten Aenderungen der Coordinaten mit Rücksicht darauf, dass die Formveränderung überhaupt als sehr klein vorausgesetzt wird, leicht zu erhalten.

Die zweiten Glieder der Gleichungen sind sodann sehr geringfügige Grössen derselben Ordnung als die Coordinatenänderungen.

Setzt man in obige Gleichungen statt der neuen Coordinaten die ursprünglichen, welche sich von ersteren nur sehr wenig unterscheiden, so begeht man allerdings einen Fehler, doch ist dieser Fehler, als durch Vernachlässigung sehr kleiner Ausdrücke zweiter und höherer Ordnung entstanden, ein bei einer ersten Annäherung erlaubter, und man erreicht dadurch den Vortheil, dass die rechtsstehenden Theile obiger Gleichungen 8) und 9) durchgehend bekannte Grössen enthalten.

Setzt man also:

$$\frac{1}{Ef}\left[\frac{\partial x}{\partial s}\Sigma X+\frac{\partial y}{\partial s}\Sigma Y\right]=a,$$

und

$$\frac{1}{E\mathfrak{T}}[\Sigma Y(\xi-x)-\Sigma X(\eta-y)]=b,$$

so übergehen die Gleichungen 8) und 9) in:

$$10) \qquad \partial s - \partial s_1 = a\,\partial s_1,$$
$$11) \qquad \partial \varphi - \partial \varphi_1 = a\,\partial \varphi_1 + b\,\partial s_1.$$

Die einzelnen Bogenelemente der Axe und die zugehörigen Contingenzwinkel erfahren also Aenderungen, welche durch die rechtsstehenden Glieder der Gleichungen 10) und 11) ausgedrückt werden; es handelt sich somit nur darum, aus diesen unendlich kleinen Aenderungen jene der entsprechenden endlichen Grössen herzuleiten.

Die Gleichungen 10) und 11) lassen sich unmittelbar getrennt integriren, wodurch man die endlichen Ausdrücke für $s - s_1$ und $\varphi - \varphi_1$ erhält. Diese Grössen sind aber für die Anwendung nicht so bequem, wie $x - x_1$ und $y - y_1$, wenn sich auch letztere auf verschiedene Weise aus ersteren entwickeln lassen. Der in Folgendem eingeschlagene Weg scheint daher den Vorzug auch schon deswegen zu verdienen, weil hier auch die Bedeutung der in den Resultaten vorkommenden doppelten Integrale, sowie die Grenzen, zwischen welchen sie zu nehmen sind, mit grösserer Klarheit erkannt werden kann.

Die letztangeführten Gleichungen drücken aus, dass die Längen der unendlich kleinen Bogen ∂s_1 und $\partial s - \partial s_1$ verändert, und die Winkel $\partial \varphi_1$, welche zwei solche aufeinanderfolgende Elemente einschliessen, um $\partial \varphi - \partial \varphi_1$ vergrössert oder vermindert werden.

Denkt man sich nun statt der continuirlich gekrümmten Axe des Stabes zwischen $n+1$ Punkten

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots n-1, \quad n,$$

deren Coordinaten

$$x_0, y_0; \quad x_1, y_1; \quad x_2, y_2 \ldots x_{n-1}, y_{n-1}; \quad x_n, y_n$$

sein mögen, ein Polygon von n endlichen Seiten

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ldots s_{n-1}, \quad s_n,$$

welche mit der Abscissenaxe die Winkel

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}, \quad \varphi_n$$

und unter einander (jede vorhergehende mit der nachfolgenden) die Winkel

$$\Delta\varphi_1, \quad \Delta\varphi_2, \quad \Delta\varphi_3 \ldots \Delta\varphi_{n-1}$$

einschliessen (letztere so genommen, dass eine Seite um den ihr zugehörigen $\sphericalangle\, \Delta\varphi_r$ im Sinne von der positiven OX zur positiven OY gedreht werden muss, um mit der Verlängerung der vorhergehenden zusammenzufallen), und durch irgend eine Ursache die Gestalt des Polygons so verändert, dass die bezeichneten Polygonseiten in:

$$s_1 + \delta s_1, \quad s_2 + \delta s_2, \quad s_3 + \delta s_3 \ldots s_n + \delta s_n,$$

die Winkel in

$$\varphi_1 + \delta\varphi_1, \quad \varphi_2 + \delta\varphi_2, \quad \varphi_3 + \delta\varphi_3 \ldots \varphi_n + \delta\varphi_n,$$

und die Contingenzwinkel in

$$\Delta\varphi_1 + \delta\Delta\varphi_1, \quad \Delta\varphi_2 + \delta\Delta\varphi_2, \quad \Delta\varphi_3 + \delta\Delta\varphi_3 \ldots \Delta\varphi_n + \delta\Delta\varphi_n$$

übergehen, so besteht die Aufgabe einfach darin, aus der bekannten neuen

Lage $(x_0+\delta x_0, y_0+\delta y_0)$ des Punktes 0 und der gegebenen Grössen die Lage $(x_n+\delta x_n, y_n+\delta y_n)$ des Endpunktes n zu finden.

Man hat bekanntlich die Gleichung:

$$x_n - x_0 = s_1 \cos\varphi_1 + s_2 \cos\varphi_2 + \ldots + s_n \cos\varphi_n,$$

und eine ähnliche Gleichung für den zweiten Zustand.

Werden diese beiden Gleichungen von einander abgezogen, so ist:

$$12) \qquad \delta x_n - \delta x_0 = \Sigma_1^n \left[(s_r+\delta s_r)\cos(\varphi_r+\delta\varphi_r) - s_r \cos\varphi_r\right]$$

und analog

$$13) \qquad \delta y_n - \delta y_0 = \Sigma_1^n \left[(s_r+\delta s_r)\sin(\varphi_r+\delta\varphi_r) - s_r \sin\varphi_r\right]$$

Ebenso wird

$$\varphi_r = \varphi_1 + (\varphi_2-\varphi_1) + (\varphi_3-\varphi_2) + \ldots\ldots + (\varphi_{r-1}-\varphi_{r-2}) + (\varphi_r-\varphi_{r-1}) =$$
$$= \varphi_1 + \varDelta\varphi_1 + \varDelta\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varDelta\varphi_{r-2} + \varDelta\varphi_{r-1}$$

und die Differenzen genommen:

$$14) \ \delta\varphi_r = \delta\varphi_1 + \delta\varDelta\varphi_1 + \delta\varDelta\varphi_2 + \ldots + \delta\varDelta\varphi_{r-1} = \delta\varphi_1 + \Sigma_1^{n-1}\delta\varDelta\varphi_s$$

Werden $\delta\varphi_r$ und δs_r als sehr kleine Grössen erster Ordnung angesehen und ihre Potenzen sowie deren Producte vernachlässigt, so gestalten sich die Ausdrücke wie folgt:

$$12a) \qquad \delta x_n = \delta x_0 + \Sigma_1^n (\delta s_r \cos\varphi_r - s_r \sin\varphi_r . \delta\varphi_r),$$

$$13b) \qquad \delta y_n = \delta y_0 + \Sigma_1^n (\delta s_r \sin\varphi_r + s_r \cos\varphi_r \ \delta\varphi_r).$$

Substituirt man statt $\delta\varphi_r$ aus 14) den Werth, so ist:

$$15) \ \delta x_n = \delta x_0 + \Sigma_1^n (-s_r \sin\varphi_r \delta\varphi_1 + \delta s_r \cos\varphi_r - s_r \sin\varphi_r \Sigma_1^{r-1}\delta\varDelta\varphi_s),$$

$$16) \ \delta y_n = \delta y_0 + \Sigma_1^n (s_r \cos\varphi_r \delta\varphi_1 + \delta s_r \sin\varphi_r + s_r \cos\varphi_r \Sigma_1^{r-1}\delta\varDelta\varphi_s).$$

Wie ersichtlich, drücken in diesen beiden Gleichungen die ersten Glieder den Einfluss der Verrückung des ersten Punktes im Polygone, die zweiten Glieder (innerhalb der Summen) hingegen jenen aus, welcher von der Drehung des ganzen Polygons um den Winkel $\delta\varphi_1$ herrührt; die dritten Glieder bestimmen den Einfluss, der aus der Veränderung der einzelnen Seitenlängen entspringt, und die letzten Glieder endlich bezeichnen die Coordinatenveränderungen des Endpunktes, die aus den kleinen Drehungen der einzelnen Seiten um die zugehörigen Polygonecke entstehen.

Um auf unser Problem zurückzukommen, denke man sich innerhalb des in Betrachtung stehenden Axenstückes einen Punkt (x, y), dessen Coordinatenveränderung man erfahren will; (x_0, y_0) sei der Punkt, dessen Lage bekannt ist.

Ersetzt man die Summe durch Integrale, und

$$s_r \quad „ \quad \partial s,$$

$$\cos\varphi_r \quad „ \quad \frac{\partial x_1}{\partial s_1}$$

$$\sin\varphi_r \quad „ \quad \frac{\partial y_1}{d s_1}$$

$$\delta\varphi_1 \quad „ \quad \delta\varphi_0$$

$$\delta s_r \quad „ \quad \partial s - \partial s_1$$

$$\delta\varDelta\varphi_s \quad „ \quad \partial\varphi - \partial\varphi_1,$$

so ist

$$17)\quad \delta x = \delta x_0 - (y - y_0)\,\delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x}\left(a\,\partial x - \partial y \int_{x_0}^{x'}[a\,\partial\varphi + b\,\partial s]\right),$$

$$18)\quad \delta y = \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x}\left(a\,\partial y + \partial x \int_{x_0}^{x'}[a\,\partial\varphi + b\,\partial s]\right),$$

$$19)\quad \delta\varphi = \delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x}(a\,\partial\varphi + b\,\partial s).$$

Die Grössen in den zweiten Theilen vorstehender Gleichungen beziehen sich auf den ursprünglichen Zustand.

War der Stab anfänglich gerade, so ist $\partial\varphi = 0$, daher unter dieser Voraussetzung die Gleichungen übergehen in:

$$20)\quad \delta x = \delta x_0 - (y - y_0)\,\delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x}\left(a\,\partial x - \partial y \int_{x_0}^{x'} b\,ds\right),$$

$$21)\quad \delta y = \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x}\left(a\,\partial y + \partial x \int_{x_0}^{x'} b\,\partial s\right),$$

$$22)\quad \delta\varphi = \delta\varphi_0 + \int_{x_0}^{x} b\,\partial s.$$

Diese Gleichungen sind dieselben, welche auch bereits, mit Ausnahme der Glieder in a, anderwärts gefunden wurden. Letztere können übrigens im Allgemeinen, da sie gegen die vorhergehenden sehr klein sind, oft vernachlässigt werden.

Die auf diese Weise erhaltenen neuen Coordinaten der Axe könnten in a und b substituirt, diese Functionen sodann in die Integrale gesetzt und dieses Verfahren öfters wiederholt werden, wodurch man immer mehr und mehr genäherte Werthe von δy und δx erhielte, die in Beziehung auf den früher begangenen Fehler sich von den wahren Werthen stets weniger und weniger unterscheiden würden. Letzteres ist jedoch nur bis zu einem gewissen Grade erreichbar, indem in der Entwickelung die Cosinus kleiner Winkel der Einheit, und die Sinus derselben den Winkeln selbst gleichgesetzt wurden, welcher Fehler durch jenes Näherungsverfahren nicht behoben wird.

Was die Anwendung der gefundenen Formeln betrifft, sei noch bemerkt, dass die Functionen a und b nicht immer continuirlich sind. Wirken nämlich mehrere endliche Kräfte an verschiedenen Stellen auf den stabförmigen Körper, so werden besagte Functionen für jedes Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Angriffspunkten durch andere Formeln ausgedrückt, und die Gestalt der Axenfaser wird an diesen Stellen eine Unterbrechung der Continuität erleiden, weshalb man sich veranlasst sehen wird, jedes von diesen Curvenintervallen für sich abgesondert zu betrachten.

Werden diese Angriffspunkte der Reihe nach mit

$$1, 2, 3 \ldots . r, \quad r+1, \ldots . n,$$

und ihre respectiven Coordinaten mit

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots . . (x_0, y_r) \ldots . . (x_n, y_n)$$

bezeichnet, so bestimme man nach der Formel mit den bekannten Anfangswerthen $x_0, y_0, \delta\varphi_0$ zuerst $\delta x_1, \delta y_1, \delta\varphi_1$, betrachte sodann diese Grössen als Anfangswerthe für die Bestimmung von $\delta x_2, \delta y_2, \delta\varphi_2$, verfahre mit letzteren auf ähnliche Weise und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man endlich die Ausdrücke $\delta x_r, \delta y_r, \delta\varphi_r$ für einen Angriffspunkt (r) gefunden hat. Letztere Werthe werden sodann zur Berechnung der Lage des erwählten Punktes, welcher hier in dem Intervalle (r) und $(r+1)$ liegend gedacht wird, dienen.

Die Ausführung des Gesagten wird unmitelbar das Gesuchte liefern, wenn man die Kräfte in der Reihenfolge ihrer Angriffspunkte successive wirken lässt, und wenn man die durch den Einfluss der Kräfte hervorgebrachten Coordinatenveränderungen des bezogenen Punktes einzeln, ohne Rücksicht auf die übrigen Kräfte, in Rechnung zieht, was wegen der linearen Form der Resultate gestattet erscheint.

Beziehen sich also die Functionen

a_1 und b_1 nur auf die im Punkte (1) wirkenden Kräfte,
a_2 und b_2 „ „ „ „ „ (2) „ „
a_3 und b_3 „ „ „ „ „ (3) „ „ .
....
....
....
a_r und b_r nur auf die im Punkte (r) wirkenden Kräfte und
a und b auf alle vom Punkte $(r+1)$ an wirkenden, sowie auf alle jenen Kräfte, für welche diese Functionen nach der ganzen Stablänge continuirlich sind, so erhält man:

$$23)\left\{\begin{aligned}
&\delta y = \delta y_0 + (x - x_0)\,\delta\varphi_0 + \\
&+\int_{x_0}^{x_1}\Big(a_1\,\partial y + \partial x\int_{x_0}^{x_1}(a_1\,\partial\varphi + b_1\,\partial s)\Big) + (x - x_1)\int_{x_0}^{x_1}(a_1\,\partial\varphi + b_1\,\partial s) + \\
&+\int_{x_0}^{x_2}\Big(a_2\,\partial y + \partial x\int_{x}^{x'}[a_2\,\partial\varphi + b_2\,\partial s]\Big) + (x - x_2)\int_{x_0}^{x_2}(a_2\,\partial\varphi + b_2\,\partial s) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\int_{x_0}^{x_r}\Big(a_r\,\partial y + \partial x\int_{x_0}^{x'}[a_r\,\partial\varphi + b_r\,\partial s]\Big) + (x - x_r)\int_{x_0}^{x_r}(a_r\,\partial\varphi + b_r\,\partial s) + \\
&+\int_{x_0}^{x}\Big(a\,\partial y + \partial x\int_{x_0}^{x'}[a\,\partial\varphi + b\,\partial s]\Big).
\end{aligned}\right.$$

und ebenso für ∂x und $\partial\varphi$ analoge Ausdrücke.

Mitunter enthalten a und b noch unbekannte Grössen, welche erst gesucht werden müssen.

Wären z. B. die Formänderungen eines wie immer gestalteten geschlossenen Ringes zu bestimmen, der an einer Stelle eingeklemmt ist, so kann man die feste Stelle des Stabes als den Anfangspunkt, dessen Coordinaten x_0 und y_0 sich nicht ändern, ansehen, die Integration über dessen ganze Länge erstrecken und als Endpunkt wieder (x_0, y_0) wählen, auf welchen noch die Kräfte $\Sigma\partial p$ und $\Sigma\partial q$, sowie das Drehungsmoment $\Sigma u\partial p$ (einem Kräftepaare äquivalent) wirkend gedacht werden. Durch Vollziehung der Integrationen erhält man Ausdrücke für $\delta x, \delta y, \delta\varphi$ des Endpunktes, die jenen für den Anfangspunkt gleich, also Null sind. Aus diesen so erhaltenen Gleichungen findet man die gesuchten Werthe für $\Sigma\partial p$, $\Sigma\partial q$ und $\Sigma u\partial p$, welche in die Integralformel von Neuem eingeführt die Berechnung der Aenderungen für jeden beliebigen Punkt des Stabes möglich machen.

Durch ein ähnliches, jedoch entsprechend modificirtes Verfahren werden sich alle Aufgaben dieser Art lösen lassen.

Einige Beispiele werden den Gebrauch der aufgestellten Gleichungen und Formeln erleichtern helfen.

Beispiel 1. Es ist ein gerader Stab von der Länge l an einem Ende festgeklemmt und am freien Ende dem Einflusse einer Kraft, deren Componenten X und Y sind, ausgesetzt.

Die positive Abscissenaxe falle mit dessen Axenfaser, der Ursprung mit dem festen Punkte zusammen. Hiernach ist:

$$\partial y = 0, \quad \partial s = \partial x, \quad \delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta\varphi_0 = 0.$$

$$a = \frac{1}{E.f} X, \quad b = \frac{1}{E.\mathfrak{T}} Y(l - x),$$

und

$$\delta x = \int_0^x \frac{1}{Ef} X \partial x = \frac{1}{Ef}.X.x,$$

$$\delta y = \int_0^x \partial x \int_0^x \frac{1}{E.\mathfrak{T}} Y(l-x)\,\partial x = \frac{Yx^2}{2E.\mathfrak{T}}\left(l - \frac{x}{3}\right).$$

Die neuen Coordinaten sind somit:

$$x' = x\left(1 + \frac{X}{Ef}\right),$$

und

$$y' = \frac{Y}{2E.\mathfrak{T}}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Eliminirt man hieraus x, so ergiebt sich die Gleichung der gegebenen Axenfaser.

Die grösste Ausbiegung findet an der Einmauerungsstelle, d. i. für $x=l$ statt, und ist ihrem Zahlwerthe nach $c=\frac{Yl^3}{3E.\mathfrak{T}}$.

Beispiel 2. Unter Beibehaltung derselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Beispiele, sei noch die Annahme beigefügt, dass der vorgegebene stabförmige Körper noch an einer Stelle in der Entfernung e vom Ursprung durch einen horizontalen Schraubenbolzen, welcher durch seine Axe geht, befestigt sei.

An letztbezeichneter Stelle können sich also nicht die Coordinaten, wohl aber kann sich die Neigung der Stabaxe ändern.

Die Schraube wird gegen den Stab einen Druck äussern, dessen Grösse und Richtung vorläufig unbekannt sind. Die Componenten des Letzteren mögen durch X_1, Y_1 repräsentirt erscheinen.

Hiernach hat man für das Stabstück von 0 bis e:

$$a=\frac{1}{Ef}(X+X_1),\quad b=\frac{1}{E.\mathfrak{T}}[Y(l-x)+Y_1(e-x)],$$

$$\delta x=\frac{X+X_1}{Ef}x,\quad \delta y=\frac{Y}{E\mathfrak{T}}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{Y_1}{E.\mathfrak{T}}\left(\frac{ex^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

$$\delta\varphi=\frac{Y}{E\mathfrak{T}}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{Y_1}{E.\mathfrak{T}}\left(ex-\frac{x^2}{2}\right).$$

Für die Stelle $x=e$ ist $\delta x=0$ und $\delta y=0$, hiernach also:

$$X_1=-X,\quad Y_1=\frac{-Y}{2e}(3l-e),$$

und

$$\delta\varphi_e=\frac{Ye}{4E.\mathfrak{T}}(l-e).$$

Endlich ergiebt sich für das Stabstück e bis l:

$$a=\frac{1}{Ef}.X,\text{ und } b=\frac{Y}{E.\mathfrak{T}}(l-x);$$

ferner

$$\delta y=(x-e)\frac{Ye}{4E.\mathfrak{T}}(l-e)+\frac{Y}{E.\mathfrak{T}}\int_e^x\partial x'\int_e^{x'}(l-x)\partial x$$

$$=\frac{Y}{E.\mathfrak{T}}\left[\frac{-x^3}{6}+\frac{lx^2}{2}-\frac{ex}{4}(3l-e)+\frac{e^2l}{4}\right]-\frac{e^3}{12},$$

und

$$\delta x=\frac{X}{Ef}(x-e).$$

Für $x=l$ ist der Pfeil

$$c_2=\frac{Y}{E.\mathfrak{T}}\left(\frac{l^3}{3}-\frac{3el^2}{4}+\frac{e^2l}{2}-\frac{e^3}{12}\right)$$

und für $e=\frac{l}{2}$ ist:

$$c_2 = \frac{7}{96} \cdot \frac{Y l^3}{E.\mathfrak{T}},$$

d. i. im Vergleiche zu dem im vorhergehenden Beispiele gefundenen Resultate der $\frac{7}{32}$ste Theil.

Der Pfeil für das Stabstück 0 bis e lässt sich ebenso einfach finden. Es ist nämlich:

$$\delta y = \frac{Y}{E.\mathfrak{T}}\left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{Y(3l - e)}{2e.E.\mathfrak{T}}\left(\frac{e x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

oder

$$\delta y = \frac{-Y}{4e.E.\mathfrak{T}}(l - e).(e x^2 - x^3);$$

daher wie bekannt

$$\frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0 = 2ex - 3x^2,$$

woraus

$$x = \tfrac{2}{3} e.$$

Demzufolge ist:

$$c'_2 = \frac{-Y(l-e)e^2}{27 E.\mathfrak{T}}.$$

Hieraus folgt für $e = \frac{l}{2}$ oder $x = \frac{l}{3}$

$$c'_2 = \frac{-Y l^3}{216\, E.\mathfrak{T}}.$$

Beispiel 3. Es ruhe ein Stab von der Länge l auf zwei Stützen horizontal auf, über welchen eine Last als gleichförmig vertheilt vorausgesetzt wird, die per Längeneinheit mit Einschluss des eigenen Gewichts g sei. Den Ursprung des Coordinatensystems wollen wir mit dem einen Unterstützungspunkte zusammenfallend, und die positive Ordinatenaxe mit der Richtung der Schwere übereinstimmend annehmen.

Es wird diesfalls:

$$a = 0, \text{ und } b = \frac{1}{E\mathfrak{T}}\left[\int_x^l g\,\partial x'(x' - x) - \frac{gl}{2}(l - x)\right].$$

Der Druck auf jeden der beiden Stützpunkte beträgt $\frac{gl}{2}$.

Es wird also

$$b = \frac{g}{2E.\mathfrak{T}}(x^2 - lx).$$

Ferner ist:

$$\delta x = 0,$$

und

$$\delta y = x\delta\varphi_0 + \frac{g}{2E.\mathfrak{T}}\int_0^x \partial x \int_0^x x^2 - lx))\,\partial x = x\delta\varphi_0 - \frac{g x^3}{24\, E\mathfrak{T}}(2l - x).$$

Für $x=l$ ist $\delta y=0$, daher auch

$$l\delta\varphi_0-\frac{gl^3}{24E.\mathfrak{T}}.l=0,$$

und

$$\delta\varphi_0=\frac{gl^3}{24E.\mathfrak{T}}.$$

Hiernach ist allgemein:

$$\delta y=\frac{g}{24E\mathfrak{T}}(x^4-2x^3l+xl^3).$$

Die grösste Einbiegung lässt sich auf bekannte Weise leicht ermitteln. Wir finden nämlich:

$$l^3-6lx^2+4x^3=0,$$

woraus folgt, dass:

$$x=\frac{l}{2},$$

oder dass die grösste Senkung in der Mitte stattfinde.

Hiernach ergiebt sich der Pfeil

$$c_3=\frac{5}{384}\frac{gl.l^3}{E.\mathfrak{T}}.$$

Auch kann man sich sehr leicht die Ueberzeugung verschaffen, dass δy für $x=\frac{l}{2}-\alpha$ und $x=\frac{l}{2}+\alpha$ dasselbe bleibt, und folglich die Gestalt der Axe gegen eine durch die Mitte des Balkens gezogene Vertikale symmetrisch ist, was übrigens unter den gemachten Voraussetzungen schon an und für sich einleuchtend ist.

Beispiel 4. Ein geradliniger horizontaler Stab von der Länge l ist an beiden Enden eingemauert und in einer Entfernung e vom linksseitigen Ende mit einem Gewichte $-P$ belastet. Der Ursprung des Coordinatensystems stimme mit jener Stelle überein, von welcher aus die Entfernung e gemessen wird, die positive Abscissenaxe falle mit der Axenfaser des Stabes zusammen und die positive Ordinatenaxe sei der Richtung der Schwere direct entgegengesetzt.

Zum Behufe der Lösung vorstehender Aufgabe denken wir uns am rechtsseitigen Stabende eine Kraft, deren Componenten X_1 und Y_1 sind, und ein Kräftepaar, dessen Moment M heissen möge, wirkend.

Wir haben sonach für einen Punkt, dessen $x>e$ ist

$$\delta y=-\frac{P}{E.\mathfrak{T}}\int_0^e\partial x\int_0^x(e-x)\,\partial x-\frac{(x-e)P}{E.\mathfrak{T}}\int_0^e(e-x)\,\partial x$$

$$+\frac{1}{E\mathfrak{T}}\int_0^x\partial x\int_0^x\{M+Y_1(l-x)\}\,\partial x$$

$$=Y_1\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{Mx^2}{2}+P\left(\frac{e^3}{6}-\frac{e^2x}{2}\right),$$

und

$$\delta\varphi = \frac{-P}{E.\mathfrak{T}}\int_0^e (e-x)\partial x + \frac{1}{E\mathfrak{T}}\int_0^x [M+Y_1(l-x)]\,\partial x$$

$$= Y_1\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Mx - \frac{Pe^2}{2}.$$

Für den Endpunkt ergiebt sich hiernach:

$$\delta\varphi_e = 0 = Ml + \frac{Y_1 l^2}{2} - \frac{Pe^2}{2},$$

und

$$\delta y_e = 0 = \frac{Ml^2}{2} + \frac{Y_1 l^3}{3} + P\left(\frac{e^3}{6} - \frac{e^2 l}{2}\right),$$

woraus

$$Y_1 = \frac{Pe^2}{l^3}(3l-2e)$$

und

$$M = -\frac{Pe^2}{l^2}(l-e).$$

Der Zahlwerth von x_i ist offenbar gleich Null.

Durch Substitution findet man:

$$\delta y = \frac{P}{E\mathfrak{T}}\left[\frac{-e^2(3l-2e)x^3}{6l^3} + \frac{e^2(2l-e)x^2}{2l^2} - \frac{e^2 x}{2} + \frac{e^3}{6}\right].$$

Der Pfeil ist für

$$\frac{\partial\delta y}{\partial x} = 0 = \frac{(3l-2e)x^2}{3l^3} - \frac{(2l-e)x}{l^2} + \frac{1}{2};$$

daher

$$x = \frac{(2l-e) \mp \sqrt{l^2(2l-e)^2 - l^3(3l-2e)}}{(3l-2e)},$$

und da das obere Zeichen zu wählen ist, wird:

$$x = \frac{l^2}{3l-2e}.$$

Für $e = \frac{l}{2}$ wird $x = \frac{l}{2}$ und

$$c_4 = \frac{-1}{192}\cdot\frac{Pl^3}{E.\mathfrak{T}}.$$

Beispiel 5. Ein kreisförmiger Ring vom Halbmesser r werde um seinen vertikalen Durchmesser als Axe gedreht.

Die positive Ordinatenaxe gehe von dem Endpunkte der Drehungsaxe aus, stimme mit deren Richtung überein und die Abscissenaxe tangire den Ring an eben dieser Stelle.

Durch die Einwirkung der Centrifugalkraft wird er abgeplattet. Offenbar wird der Ring gegen die Vertikale eine symmetrische Gestalt annehmen, weshalb wir nur dessen eine Hälfte zu betrachten brauchen.

Die in jedem Punkte thätige Fliehkraft wird dargestellt durch die Gleichung $f\mu.\partial s.v^2.x$, worin μ die Masse der Volumeinheit und v die Rotationsgeschwindigkeit bedeutet. Im obersten Punkte des Ringes werden wir uns aus leicht begreiflichen Gründen eine horizontale Kraft X_1 und ein Moment M wirkend annehmen.

Nachdem den Ring keine vertikalen Kräfte beeinflussen, so erscheint es überflüssig, sich im letztbezeichneten Punkte eine Kraft $\Sigma\partial q$ angebracht zu denken.

Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir die von a abhängigen Glieder als so unbedeutend an, dass sie, als das Resultat nicht beeinträchtigend, vernachlässigt werden können, wie es beispielsweise bei einem Metallringe der Fall sein wird, und führen als unabhängige Variable den Winkel ein, welchen der irgend einem Punkte entsprechende Radius im Kreise mit jenem Radius bildet, der dem tiefsten Punkte entspricht. Dieser Winkel heisse allgemein α.

Es wird hiernach:

$$x = r\sin\alpha, \quad \partial x = r.\cos\alpha.\partial\alpha$$
$$\partial s = r.\partial\alpha,$$
$$y = r(1-\cos\alpha), \quad \partial y = r.\sin\alpha.\partial\alpha$$

und

$$b = \frac{1}{E.\mathfrak{T}}\left[-\Sigma X(y'-y) - X'(2r-y)\right] + M$$
$$= \frac{1}{E.\mathfrak{T}}\left[M - X_1(2r-y) - \mu f v^2 r^2 \int_\alpha^\pi \sin\alpha\,(r - r\cos\alpha - y)\,\partial\alpha\right];$$

ferner

$$\frac{\delta\varphi}{E.\mathfrak{T}} = \int_0^\alpha \frac{b}{E\mathfrak{T}}\,\partial s = Mr\int_0^\alpha \partial\alpha - r^2 X_1 \int_0^\alpha (1+\cos\alpha)\,\partial\alpha$$
$$-\mu f v^2 r^4 \int_0^\alpha \left(1+\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)\partial\alpha$$
$$= Mr\alpha - r^2 X_1(\alpha+\sin\alpha) - \mu f v^2 r^4\left(\frac{3\alpha}{4} + \sin\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4}\right)$$

und

$$\frac{\delta x}{E.\mathfrak{T}} = \frac{-1}{E.\mathfrak{T}}\int_0^y \partial y\,\delta\varphi = \frac{-r}{E\mathfrak{T}}\int_0^\alpha \sin\alpha.\delta\varphi.\partial\alpha$$
$$= -Mr^2(-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha) + r^3 X_1\left(-\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right)$$
$$+ \mu f v^2 r^5\left(\frac{-3}{4}\alpha\cos\alpha + \frac{3}{4}\sin\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} + \frac{\sin^3\alpha}{12}\right).$$

Für $\alpha = \pi$ ist $\delta\varphi = 0$ und $\delta x = 0$; daher:

$$\delta\varphi_\pi = 0 = Mr\pi - r^2 X_1\pi - \tfrac{3}{4}\mu f v^2 r^4 \pi$$

und ebenso

$$\delta x_{\pi} = 0 = -Mr^2\pi + r^3 X_1\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \mu f v^2 r^5 \pi \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Als die Centrifugalkraft eines Ringquadranten ergiebt sich:

$$X_1 = -\mu f v^2 r^2$$

und für M findet man

$$M = -\frac{\mu f v^2 r^3}{4}.$$

Substituirt man die gefundenen Zahlwerthe, so ist:

$$\delta\varphi = \frac{-\mu f v^2 r^4}{4E\mathfrak{T}}.\sin\alpha.\cos\alpha,$$

$$\delta x = r\int_0^\alpha \sin\alpha.\delta\varphi.\partial\alpha = \frac{\mu f v^2 r^5}{12E.\mathfrak{T}}\sin^3\alpha,$$

$$\partial y = r\int_0^\alpha \cos\alpha.\delta\varphi.\partial\alpha = -\frac{\mu f v^2 r^5}{12E.\mathfrak{T}}(1-\cos^3\alpha);$$

folglich die neuen Coordinaten:

$$x = r\sin\alpha + \frac{\mu f v^2 r^5}{12E\mathfrak{T}}\sin^3\alpha$$

$$y = r - r\cos\alpha + \frac{\mu f v^2 r^5}{12E\mathfrak{T}}(\cos^3\alpha - 1).$$

Wie leicht ersichtlich, ist die Verkürzung der kleinen Axe gleich der Verlängerung der grossen und zwar beträgt die Abplattung

$$\frac{\mu f v^2 r^5}{6E.\mathfrak{T}}.$$

Beispiel 6. Ein gerader Stab, welcher auf n Stützen frei aufruht, wird einer über seine Länge gleichförmig vertheilten Belastung ausgesetzt und ausserdem dem Einflusse von Kräften unterworfen, deren Angriffspunkte zwischen je zwei Stücken liegen.

Die Stabaxe im ungebogenen Zustande sei zugleich Abscissenaxe, und

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3\ldots.P_{n-2},\quad P_{n-1}$$

die vertikal nach abwärts wirkenden Kräfte, während

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3\ldots.\alpha_{n-2},\quad \alpha_{n-1}$$

die zugehörigen Abscissen ihrer Angriffspunkte, und

$$Q_0,\quad Q_1,\quad Q_2\ldots.Q_{n-1}$$

die nahezu vertikalen Drücke auf die Stützen, oder richtiger, die aus den Pressungen gegen die Stützpunkte entspringenden vertikalen Componenten sind; ferner seien

$$0,\quad \beta_1,\quad \beta_2\ldots.\beta_{n-2},\quad \beta_{n-1}$$

die Entfernungen der Stützen vom Ursprung, und g die veränderliche Belastung pro Längeneinheit.

Man hat sodann für den r^{ten} Stützpunkt:

$$0=\int_0^{\beta_r}\partial x\int_0^x\partial x\,[P_{r+1}(\alpha_{r+1}-x)+P_{r+2}(\alpha_{r+2}-x)+\ldots$$

$$\ldots+P_{n-1}(\alpha_{n-1}-x)+\int_x^{\beta_{n-1}}g\,(x'-x)\,\partial x']+Q_{r+1}(\beta_{r+1}-x)+Q_{r+1}(\beta_{r+2}-x)+\ldots$$

$$\ldots+Q_{n-1}(\beta_{n-1}-x)+\int_0^{\alpha_r}\partial x\int_0^x P_r(\alpha_r-x)\,\partial x+(\beta_r-\alpha_r)\int_0^{\alpha_r}P_r(\alpha_r-x)\,\partial x$$

$$+\int_0^{\beta_r}\partial x\int_0^x Q_r(\beta_r-x)\,\partial x+(\beta_r-\beta_r)\int_0^{\beta_r}Q_r(\beta_r-x)\,\partial x$$

$$+\int_0^{\alpha_{r-1}}\partial x\int_0^x P_{r-1}(\alpha_{r-1}-x)\,\partial x+(\beta_r-\alpha_{r-1})\int_0^{\alpha_{r-1}}P_{r-1}(\alpha_{r-1}-x)\,\partial x$$

$$+\int_0^{\beta_{r-1}}\partial x\int_0^{\alpha}Q_{r-1}(\beta_{r-1}-x)\,\partial x+(\beta_r-\beta_{-1})\int_0^{\beta_{r-1}}Q_{r-1}(\beta_{r-1}-x)\,\partial x+\ldots$$

$$\ldots+\beta_r.\partial\varphi_0.E.\mathfrak{T}$$

oder, wenn man die Integrationen theilweise ausführt, die Ausdrücke zusammenzieht und vom Summenzeichen Gebrauch macht:

$$0=\int_0^{\beta_r}\partial x\int_0^x\partial x\int_x^{\beta_{r-1}}g\,(x'-x)\,\partial x'+\frac{\beta_r^2}{2}\Sigma_{r+1}^{n-1}\left\{\left(P_s\alpha_s-\frac{\beta_r}{3}\right)+Q_s\left(\beta_s-\frac{\beta_r}{3}\right)\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}\Sigma_1^r\left\{P_s\alpha^2\left(\beta_r-\frac{\alpha_s}{3}\right)+Q_s\beta_s^2\left(\beta_r-\frac{\beta_s}{3}\right)\right\}+\beta_r.\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}.$$

Substituirt man in diese Gleichung für r alle Werthe von 1 bis $(n-1)$, und beachtet hierbei, dass nothwendigerweise

$$\Sigma_1^{n-1}P_r+\Sigma_1^{n-1}Q_r+\int_0^{\beta_{n-1}}g\,\partial x=0$$

und

$$\Sigma_1^{n-1}P_r\,\alpha_r+\Sigma_0^{n-1}Q_r\beta_r+\int_0^{\beta_{n-1}}g\,x\,\partial x=0$$

sein muss, so können durch Auflösung dieser $n+1$ Gleichungen, welche in Bezug auf die Unbekannten Q_0 bis Q_{n-1} linear sind, letztere auf allgemeine Art gefunden werden.

Ist jedoch

$$P_1=P_2=P_3=\ldots P_{n-1}=0,$$

und

$$\beta_{n-1}-\beta_{n-2}=\beta_{n-2}-\beta_{n-3}=\ldots\beta_1-0=\beta$$

und g constant, so werden jene Gleichungen allgemein in folgende übergehen:

$$g\int_0^{r\beta}\partial x\int_0^x\partial x\int_x^{(n-1)\beta}(x'-x)\,\partial x'+\frac{r^2\beta^3}{2}\Sigma_{r+1}^{s-1}Q_s\left(s-\frac{r}{3}\right)+\frac{\beta^3}{2}\Sigma_1^r Q_s.s\left(r-\frac{s}{3}\right)$$

$$+\beta_r\,\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}=0,$$

oder:

$$\Sigma_1^{n-1}\left\{2\beta g\left[\frac{r^2(n-1)^2}{4}-\frac{r^3(n-1)}{6}+\frac{r^4}{24}\right]+Q_1\left(r-\frac{1}{3}\right)+Q_2\left(r-\frac{2}{3}\right)2^2\right.$$

$$+Q_3\left(r-\frac{3}{3}\right)3^2+\ldots+Q_r\left(r-\frac{r}{3}\right)r^2+Q_{r+1}\left(r+1-\frac{r}{3}\right)r^2$$

$$\left.+Q_{r+2}\left(r+2-\frac{r}{3}\right)r^2+\ldots+Q_{n-1}\left(n-1-\frac{r}{3}\right)r^2+\frac{2r.\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}}{\beta^2}\right\}=0$$

und

$$(n-1)\beta g+\Sigma_1^{n-1}Q_s=0,$$

ferner ebenso:

$$\frac{(n-1)^2\beta^2 g}{2}+\Sigma_1^{n-1}Q_s\beta_s=0.$$

Ruht beispielsweise der gleichförmig belastete Balken auf 3 Stützen auf, so ergeben sich hierfür nachstehende Gleichungen:

$$\frac{2}{3}Q_1+\frac{5}{3}Q_2+\frac{17g}{12}+2\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}=0,$$

$$\frac{5}{3}Q_1+\frac{16}{3}Q_2+\frac{12g}{3}+4\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}=0,$$

$$Q_1+2Q_2+2g=0,$$

$$Q_0+Q_1+Q_2+2g=0,$$

woraus folgt, dass

$$Q_0=Q_2=-\frac{3}{8}g;\quad Q_1=-\frac{10}{8}g.$$

Wäre hingegen

$$g=0 \text{ und } P_1=P_2=\ldots=P_{n-1}=P$$

$$\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}=\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3}=\ldots\alpha_2-\alpha_1=\alpha=\beta,$$

so erhält man:

$$r^2\Sigma_{r+1}^{n-1}\left\{P\left(s-\frac{1}{2}-\frac{r}{3}\right)+Q_s\left(s-\frac{r}{3}\right)\right\}+\Sigma_1^r\left\{P\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\left(r-\frac{s-\frac{1}{2}}{3}\right)\right.$$

$$\left.+Q_s s^2\left(r-\frac{s}{3}\right)\right\}+\frac{2r\,\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}}{\beta^2}=0,$$

oder:

$$P\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(r-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(r-\frac{3}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2\left(r-\frac{2r-1}{6}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+r^2\left(\frac{2r+1}{2}-\frac{r}{3}\right)+r^2\left(\frac{2r+3}{2}-\frac{r}{3}\right)+\ldots+r^2\left(\frac{2n-3}{2}-\frac{r}{3}\right)\right\}$$

$$+Q_1 1^2\left(r-\frac{1}{3}\right)+Q_2 2^2\left(r-\frac{2}{3}\right)+\ldots+Q_r r^2\left(r-\frac{r}{3}\right)+Q_{r+1}r^2\left(r+1-\frac{r}{3}\right)$$

$$+Q_{r+2}r^2\left(r+2-\frac{r}{3}\right)+\ldots+Q_{n-1}r^2\left(n-1-\frac{r}{3}\right)+\frac{2r.\delta\varphi_0.E.\mathfrak{T}}{\beta^2}=0.$$

Bemerkung. Die Spannungen in den einzelnen Punkten eines Querschnittes sind selbstverständlich verschieden. Es wird jedoch im Allgemeinen auch solche Punkte geben, wo die Spannungen gleich Null

werden. Diese ergeben sich sehr einfach; denn wir hatten gefunden, dass, wenn die Krümmungsradien absolut genommen werden

$$\frac{\partial p}{\partial f} = E\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)u + E\left(\frac{\partial s}{\partial s_1} - 1\right).$$

Es ist aber auch

$$\frac{\partial s}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = \pm b,$$

und

$$\frac{\partial s}{\partial s_1} - 1 = a,$$

daher:

$$\frac{\partial p}{E\partial f} = \pm b.u + a.$$

Die besagten Punkte befinden sich also in einer Entfernung von der Axe, die ausgedrückt wird durch

$$u = \mp \frac{a}{b}.$$

Hierbei ist das obere oder das untere Zeichen zu wählen, je nachdem der Neigungswinkel φ von dem betrachteten Querschnitte gegen das Ende zu- oder abnimmt.

Für jeden Querschnitt wird es somit eine zu seiner Biegungsschweraxe parallele Gerade geben, welcher besagte Eigenschaft zukömmt.

Alle derartigen Geraden im Stabe bilden eine Cylinderfläche, welcher man den Namen neutrale Schichte beilegt. Wie ersichtlich, wird diese nur in einzelnen Fällen und zwar dort, wo $\alpha = 0$ ist oder wo alle Kräfte senkrecht auf die Richtung der Tangente in diesem Punkte wirken, durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber eine das Hyperboloid betreffende Aufgabe. In seiner Abhandlung „*On a new geometry of space*“ (*Transactions of the Royal Society*, 2 *Febr*. 1865) löst Herr Plücker die Aufgabe, aus den Gleichungen dieser Complexe die Gleichung des Hyperboloids zu finden, welches aus den ihnen gemeinsamen Geraden gebildet wird. Ich gebe im Folgenden eine Lösung dieser und der umgekehrten Aufgabe, welche in symmetrischer Form erscheint, indem ich mich homogener (Tetraeder-) Coordinaten bediene, wie solche schon Herr Lüroth (Crelle's Journal, Bd. 67) in die Plücker'sche Theorie der Raumgeraden eingeführt hat.

Sind $x_1 x_2 x_3 x_4$ und $y_1 y_2 y_3 y_4$ die Coordinaten zweier Punkte im Raume (x, y) und setzt man

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k, \qquad (p_{ik} = -p_{ki}),$$

so kann man die sechs Grössen p_{ik} als die homogenen Coordinaten der Geraden x, y bezeichnen. Zwischen denselben besteht die Gleichung:

$$1) \qquad P = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23}.$$

Man erhält aus dem ersten Gliede dieser Gleichung die übrigen, indem man den ersten Index festhält und die übrigen cyclisch permutirt (vergl. Jacobi, Crelle's Journal Bd. 2, p. 355). Wegen der Gleichung 1) repräsentiren die Verhältnisse der p nur vier von einander unabhängige Grössen, die Bestimmungsstücke der Geraden.

Fasst man statt dieser die Gerade als Schnitt zweier Ebenen u, v auf, deren Coordinaten $u_1 u_2 u_3 u_4$ und $v_1 v_2 v_3 v_4$ sind, so erhält man ebenso als Coordinaten der Geraden u, v die sechs Grössen:

$$q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k, \qquad (q_{ik} = -q_{ki}),$$

zwischen denen die Relation besteht:

$$Q = q_{12} q_{34} + q_{13} q_{42} + q_{14} q_{23}.$$

Und zwar sind diese sechs Coordinaten q den sechs Coordinaten p einzeln proportional, in der Weise, dass:

$$2) \qquad \mu p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = q_{i'k'} \qquad \nu q_{ik} = \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = p_{i'k'},$$

wobei μ, ν unbestimmte Factoren bedeuten, und die Indices $i'k'$ mit den Indices ik in der durch die Formeln ausgedrückten Beziehung stehen.

Entsprechend den Definitionen des Herrn Plücker bilden nun alle Geraden, zwischen deren Coordinaten p eine Gleichung n^{ter} Ordnung besteht:

$$\varphi(p)=0$$

einen Complex n^{ter} Ordnung; diejenigen, zwischen deren Coordinaten zwei Gleichungen bestehen:

$$\varphi(p)=0, \quad \psi(p)=0$$

bilden eine Congruenz. Endlich bilden eine windschiefe Fläche alle Geraden, zwischen deren Coordinaten drei Gleichungen

$$\varphi(p)=0, \quad \psi(p)=0, \quad \chi(p)=0$$

stattfinden. Man kann dies auch so ausdrücken, dass die zwei Complexen gemeinschaftlicher Geraden eine Congruenz, die dreien gemeinschaftlichen eine Fläche bilden.

Den linearen Complex

$$3) \qquad a_{34}p_{12}+a_{12}p_{34}+a_{42}p_{13}+a_{13}p_{42}+a_{23}p_{14}+a_{14}p_{23}=0$$

will ich einen speciellen nennen, wenn zwischen den $a(a_{ik}=-a_{ki})$ die Gleichung besteht:

$$a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}=0.$$

Die a sind dann Coordinaten einer Geraden, und die Gleichung 3) umfasst die Gesammtheit aller Geraden, welche die Gerade a schneiden. Zwei lineare Complexe kann man nach Plücker immer auf zwei Arten so combiniren, dass sie in specielle übergehen; so dass also die durch zwei lineare Complexe gegebene Congruenz aus allen Geraden besteht, die zwei gegebene Gerade schneiden.

Endlich also müssen alle drei linearen Complexen gleichzeitig angehörende Gerade drei feste Gerade schneiden, und also eine Schaar von Erzeugenden eines Hyperboloides sein.

Hieran anknüpfend will ich im Folgenden die beiden Aufgaben behandeln.

I. Wenn eine Fläche 2ten Ordnung $f=0$ gegeben ist, Complexe zu finden, auf denen die erste, und solche, auf denen die zweite Schaar ihrer Erzeugenden liegt.

II. Wenn drei lineare Complexe gegeben sind, die Gleichung des Hyperboloids zu finden, dessen eine Schaar von Erzeugenden diesen Complexen gemeinsam ist.

I.

Die Gleichung $f=\Sigma a_{ik}x_i x_k=0$ möge symbolisch geschrieben werden

$$a_x^2=0, \quad (a_x=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)$$

wobei die Producte $a_i a_k$ die Coefficienten a_{ik} vertreten; ebenso mögen die Buchstaben b, c, d etc. statt a gesetzt werden können. Sind dann x und y

irgend zwei Punkte einer Erzeugenden L, deren Coordinaten durch p_{ik} bezeichnet werden mögen, so ist:

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k.$$

Sind x die laufenden Coordinaten, so haben die Tangentenebenen der Punkte xy die Gleichungen:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} X_i = a_x a_X = 0, \quad \Sigma \tfrac{1}{2} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} X_i = a_y a_X = 0.$$

Nun kann man leicht einsehen, dass diese Tangentenebenen sich in der Erzeugenden (xy) schneiden, mithin ist:

$$q_{ik} = a_x b_y (a_i b_k - b_i a_k) = \tfrac{1}{4} \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f(y)}{\partial y_k} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \right\}$$

und man hat nach Gleichung 2)

4) $$a_x b_y (a_i b_k - b_i a_k) = \mu (x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'})$$

als die Gleichungen von linearen Complexen, auf denen L liegt.

Der Proportionalitätsfactor μ ist hier nicht unbestimmt, man kann ihn auf folgende Weise finden.

Ist M irgend eine Erzeugende derselben Schaar, wie L, und sind zwei ihrer Punkte ξ, η, so liegt M auf den Complexen:

5) $$a_\xi b_\eta (a_i b_k - b_i a_k) = \mu_M (\xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k).$$

Den Proportionalitätsfactor, durch den sich höchstens die Complexe, denen die Geraden L und M angehören, unterscheiden können, habe ich in der zweiten Relation μ_M genannt und will ihn in der ersten mit μ_L bezeichnen.

Um diese Grössen in Beziehung zu einander zu setzen, bilde ich die Identität:

$$\begin{vmatrix} a_x a_1 & a_x a_2 & a_x a_3 & a_x a_4 \\ b_y b_1 & b_y b_2 & b_y b_3 & b_y b_4 \\ c_\xi c_1 & c_\xi c_2 & c_\xi c_3 & c_\xi c_4 \\ d_\eta d_1 & d_\eta d_2 & d_\eta d_3 & d_\eta d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung geht aber, wenn man die Determinante als Summe von Producten von Unterdeterminanten darstellt, die aus den ersten beiden und den letzten beiden Horizontalreihen gebildet werden, und wenn man alsdann die Werthe der ersten aus 4, die der letzten aus 5 entnimmt, in folgenden Ausdruck über:

$$\mu_L \mu_M \Sigma (x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'}) (\xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k) = \mu_L \mu_M \Sigma \pm x_1 y_2 \xi_3 \eta_4.$$

Indem man also in der obigen Gleichung die Determinante der x, y, ξ, η forthebt, bleibt

6) $$\mu_L \mu_M = \Delta$$

wobei Δ die Determinante der Fläche ist und den Werth hat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Schreibt man die Gleichung 6) in der Form $\mu_M = \frac{\Delta}{\mu_L}$, so sieht man, dass für jede Gerade derselben Schaar μ_M denselben Werth hat und dass also auch $\mu_L = \mu_M$ sein muss, so dass

$$\mu_L = \sqrt{\Delta}.$$

Die Erzeugenden des Hyperboloides $f=0$ liegen also auf den Complexen:

$$7) \qquad a_x b \quad (a_i b_k - b_i a_k) = \sqrt{\Delta}\,(x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'})$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f(y)}{\partial y_k} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}\right\}$$

und zwar entsprechen den Zeichen der Quadratwurzel die beiden Schaaren der Erzeugenden. Je drei der sechs in dieser Formel enthaltenen Gleichungen bilden eine Lösung der gestellten Aufgabe.

An die Form der Gleichung 7) kann man folgende Bemerkung knüpfen.

Gehört die Gerade L ausser der Oberfläche $f=0$ noch einer zweiten Oberfläche $\varphi=0$ an, so liegt sie auf allen Flächen der Schaar:

$$f + \lambda\varphi = 0$$

und für zwei Punkte x, y derselben besteht nach 7), und zwar unabhängig von λ, die Gleichung:

$$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x)+\lambda\varphi(x)]\,\frac{\partial}{\partial y_k}[f(y)+\lambda\varphi(y)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_k}[f(x)+\lambda\varphi(x)]\,\frac{\partial}{\partial y_i}[f(y)+\lambda\varphi(y)]\right\} = \sqrt{\Delta_{f+\lambda\varphi}}\,(x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'}).$$

Da hier die linke Seite für λ rational ist, muss es auch die rechte sein. In diesem Falle aber, wo f, φ eine Gerade gemein haben, zerfällt die Schnittcurve von f und φ in diese und in eine Raumcurve dritter Ordnung.

Man hat also den bekannten Satz vor sich, dass in diesem Falle die Determinante Δ in das vollständige Quadrat eines Ausdruckes zweiten Grades in λ übergehen muss, und zugleich giebt die obige Gleichung für die Wurzel dieses Quadrats einen rationalen Ausdruck.

II.

Es seien nun die drei linearen Complexe

$$8) \qquad A = \Sigma a_{ik}\, q_{ik} = 0, \quad B = \Sigma b_{ik}\, q_{ik} = 0, \quad C = \Sigma c_{ik}\, q_{ik} = 0$$

gegeben. Man sucht die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, welche die ihnen gemeinschaftlichen Geraden enthält.

Sind nun x und y irgend zwei Punkte einer dieser Geraden L, dann wird nach 2):

$$q_{ik} = \mu\,[x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'}],$$

$$A = \Sigma a_{ik}\,(x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'}) = 0, \quad B = \Sigma b_{ik}\,(x_{i'} y_{k'} - y_{i'} x_{k'}) = 0,$$

wo die Indices $i'k'$ die nämliche Bedeutung haben, wie in Formel 2).

Diese beiden Gleichungen gelten, wenn man den Punkt x irgendwie auf L fixirt hat, noch für jeden veränderlichen Punkt y der Geraden L; sie erscheinen, falls wir die y als laufende Coordinate ansehen, als die Gleichungen zweier Ebenen, die sich in L schneiden und die Coordinaten haben:

$$\frac{\partial A}{\partial y_1}, \frac{\partial A}{\partial y_2}, \frac{\partial A}{\partial y_3}, \frac{\partial A}{\partial y_4},$$

$$\frac{\partial B}{\partial y_1}, \frac{\partial B}{\partial y_2}, \frac{\partial B}{\partial y_3}, \frac{\partial B}{\partial y_4}.$$

Hieraus folgt, dass:

$$\nu q_{ik} = \frac{\partial A}{\partial y_i}\frac{\partial B}{\partial y_k} - \frac{\partial B}{\partial y_i}\frac{\partial A}{\partial y_k}$$

und wenn wir diese Werthe in die Gleichung $C = 0$ eintragen:

$$9) \qquad \Sigma c_{ik} \left\{\frac{\partial A}{\partial y_i}\frac{\partial B}{\partial y_k} - \frac{\partial B}{\partial y_i}\frac{\partial A}{\partial y_k}\right\} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Fläche.

Die beiden Theile des auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruckes, nämlich:

$$\Sigma c_{ik} \frac{\partial A}{\partial y_i}\frac{\partial B}{\partial y_k} \quad \text{und} \quad -\Sigma c_{ik} \frac{\partial A}{\partial y_k}\frac{\partial B}{\partial y_i}$$

stimmen mit einander überein, da sie durch Vertauschung der Indices in einander übergehen, man kann also statt der Summe beider Glieder eines derselben setzen, und daher der Gleichung die kürzere Form geben:

$$\Sigma c_{ik} \frac{\partial A}{\partial y_i}\frac{\partial B}{\partial y_k} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur scheinbar unsymmetrisch; denn man kann leicht nachweisen, dass sie durch andere Anordnung der Glieder auf der linken Seite die Form annehmen kann:

$$\Sigma a_{ik} \frac{\partial B}{\partial y_i}\frac{\partial C}{\partial y_i} = 0; \quad \Sigma b_{ik} \frac{\partial C}{\partial y_i}\frac{\partial A}{\partial y_k} = 0,$$

welche sich von der ersten Form nur durch Vertauschung der Buchstaben a, b, c unterscheiden.

Giessen. Prof. Dr. GORDAN.

II. Zur Anwendung der Kettenbrüche. Von JOHANN LIEBLEIN, a. o. Professor am Polytechnikum zu Prag. In einem früheren Aufsatze („Geometrische Deutung der Kettenbrüche", XII. Jahrg. 3. Heft dieser Zeitschrift) habe ich den Kettenbruch

$$\frac{(p_{n-1}\,q_2):(p_2'q_1)}{(p_1\,q_{n-1}):(p_2\,q_1)} = \cfrac{(p_2 q_3):(p_2 q_1)}{(p_3 q_1):(p_2 q_1) + \cfrac{(p_3 q_4):(p_3 q_2)}{(p_4 q_2):(p_3 q_2) + \cdots \atop \vdots \quad \vdots \atop + \cfrac{(p_{n-2}\,q_{n-1}):(p_{n-2}\,q_{n-3})}{(p_{n-1}\,q_{n-3}):(p_{n-2}\,q_{n-3})}}}$$

aufgestellt und aus demselben eine Reihe geometrischer Sätze abgeleitet. Dieser Kettenbruch gestattet eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung. Wenn man nämlich statt der p und q neue Grössen x einführt durch die Substitution

$$p_r = \frac{x_{r+1,1}}{x_{r+1,3}} - \frac{x_{1,1}}{x_{1,3}}, \qquad q_r = \frac{x_{r+1,2}}{x_{r+1,3}} - \frac{x_{1,2}}{x_{1,3}},$$

und sodann successive

$$x_{r+1,f} = \frac{x'_{r+2,f}}{x'_{r+2,4}} - \frac{x'_{1,f}}{x'_{1,4}},$$

$$x'_{r+2,g} = \frac{x''_{r+3,g}}{x''_{r+3,5}} - \frac{x''_{1,g}}{x''_{1,5}},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x^{(m-4)}_{r+m-3,h} = \frac{x^{(m-3)}_{r+m-2,h}}{x^{(m-3)}_{r+m-2,m}} - \frac{x^{(m-3)}_{1,h}}{x^{(m-3)}_{1,m}}$$

setzt, so findet man nach leichter Rechnung einen Kettenbruch, in welchem sämmtliche Glieder Quotienten von Determinanten m^{ten} Grades sind. Diese Determinanten sind in der Form

$$\Sigma \pm x^{(m-3)}_{1,1}\,x^{(m-3)}_{2,2} \ldots x^{(m-3)}_{m-2,m-2}\,x^{(m-3)}_{r,m-1}\,x^{(m-3)}_{s,m}$$

enthalten, die ohne Abbruch der Deutlichkeit kurz durch $(1\,2\,3 \ldots m-2\;r\,s)$ bezeichnet werden kann, da in der Folge die Reihe der zweiten Stellenzeiger ungestört bleibt. Wenn man überdies nur die ersten $n-m$ Glieder des Kettenbruches beibehält, so lautet die neue Relation:

$$1)\quad \frac{(1\ldots m\text{-}2\;n\,m):(1\ldots m\text{-}2\;m\text{-}1\;m)}{(1\ldots m\text{-}2\;m\text{-}1\,n):(1\ldots m\text{-}2\;m\text{-}1\;m)} = \cfrac{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;m\;m+1)}{(1\ldots m\text{-}2\;m\;m-1)}}{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;m+1\;m\text{-}1)}{(1\ldots m\text{-}2\;m\;m\text{-}1)} + \cfrac{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;m+1\;m+2)}{(1\ldots m\text{-}2\;m+1\;m)}}{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;m+2\;m)}{(1\ldots m\text{-}2\;m+1\;m)} + \atop \vdots \atop + \cfrac{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;n\text{-}1\;n)}{(1\ldots m\text{-}2\;n\text{-}1\;n\text{-}2)}}{\dfrac{(1\ldots m\text{-}2\;n\,n\text{-}2)}{(1\ldots m\text{-}2\;n\text{-}1\;n\text{-}2)}}}},$$

in welcher die Stellenzeiger auf irgend eine Art unter einander vertauscht werden können.

Die Elemente der Determinanten bilden ein System von n Reihen zu je m Gliedern $(n > m)$, aus welchem sich demnach im Ganzen $(n)_m$ von einander verschiedene Determinanten m^{ten} Grades bilden lassen, wenn man hierzu je m Reihen so oft als möglich benutzt. Durch die obige Relation ist eine nicht uninteressante Eigenschaft dieser Determinanten bewiesen; diese nämlich, dass sich aus je $2(n-m)+1$ von einander unabhängigen Determinanten, deren Elementensysteme in $m-2$ Reihen übereinstimmen, ein Kettenbruch bilden lasse, derart, dass seine Näherungsbrüche Quotienten von Determinanten derselben Art sind. Auch ersieht man, dass durch $2(n-m)+1$ von einander unabhängige Determinanten der eben angegebenen Art alle übrigen bestimmt sind. Denn aus 1) erhält man, successive $n = m+2$, $m+3 \ldots n$ setzend, zunächst $2(n-m)-3$ weitere, und sodann die noch übrigen durch eine zweckmässige Vertauschung der Stellenzeiger. Für die wirkliche Berechnung empfiehlt sich die indirecte Bestimmung der Zähler und Nenner der Partialbrüche. Schreibt man die Gleichung:

$$\frac{(1\ldots m-2\; m+r\; m)}{(1\ldots m-2\; m-1\; m)} = \frac{(1\ldots m-2\; m+r\; m+r-2)}{(1\ldots m-2\; m+r-1\; m+r-2)} \cdot \frac{(1\ldots m-1\; m+r-1\; m)}{(1\ldots m-2\; m-1\; m)}$$
$$+ \frac{(1\ldots m-2\; m+r-1\; m+r)}{(1\ldots m-2\; m+r-1\; m+r-2)} \cdot \frac{(1\ldots m-2\; m+r-2\; m)}{(1\ldots m-2\; m-1\; m)},$$

welche den Zusammenhang von drei aufeinanderfolgenden Zählern ausdrückt, in der Form

$$\begin{aligned}
&(1\ldots m-2 m\; m+r-1)(1\ldots m-2 m+r-2\; m+r) \\
2) \quad &= (1\ldots m-2 m\; m+r-2)(1\ldots m-2\; m+r-1\; m+r) \\
&+ (1\ldots m-2\; m+r-2\; m+r-1)(1\ldots m-2 m\; m+r),
\end{aligned}$$

so erhält man eine Beziehung zwischen sechs Determinanten m^{ten} Grades, welche aus $m+2$ Elementenreihen des obigen Systems gebildet werden können, wenn $m-2$ dieser Reihen allen Determinanten gemeinschaftlich sein sollen, und die Gleichung 2) lehrt, aus fünf solchen Determinanten die sechste zu finden. Dasselbe Ergebniss würde die Berechnung des Nenners irgend eines Partialbruches liefern, und man ist daher berechtigt, folgenden Satz auszusprechen:

> „Wenn man aus einem Systeme von n Elementenreihen mit je m Gliedern $(n > m)$ alle möglichen Determinanten m^{ten} Grades bildet, deren Systeme dieselben $m-2$ Reihen gemeinschaftlich haben, so lassen sich aus den Werthen von $2(n-m)+1$ von einander unabhängigen Determinanten die Werthe aller übrigen durch wiederholte Anwendung der Gleichung 2) finden.“

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern. Man denke sich nämlich aus den obigen Elementarreihen sämmtliche Determinanten gebildet und

nehme von diesen vorläufig alle jene als bekannt an, deren Systeme $k+1$ bestimmte, übrigens willkürlich ausgewählte Reihen gemeinschaftlich haben.

Diese Determinanten sind demnach in der Form

$$(a_1 a_2 \dots a_{k+1} x y \dots u v w)$$

enthalten, und es giebt $n-(m-1)$ solche unter ihnen, in welchen $xy \dots uv$ bestimmte Werthe $bc \dots fg$ besitzen, die immer so gewählt werden können, dass sämmtliche $n-(m-1)$ Determinanten von einander unabhängig sind. Nimmt man also $n-m$ von einander unabhängige Determinanten neu an, deren Systeme die $a_1 . a_2 \dots a_k . b . c \dots g^{te}$ Reihe enthalten, so hat man $2(n-m)+1$ Determinanten, welche in $m-2$ Reihen übereinstimmen und aus welchen alle in der Form

$$(a_1 a_2 \dots a_k b c \dots f g v w)$$

enthaltenen berechnet werden können. Nun sind aber auch alle Determinanten von der allgemeinen Form

$$(a_1 a_2 \dots a_k x y \dots v w)$$

bestimmt; denn zu ihrer Kenntniss gelangt man durch wiederholte Anwendung der Gleichung 2) auf bereits bekannte Determinanten. So z. B. würde man aus

$$a_1 a_2 \dots a_k bc \dots f u a_{k+1} g), \quad (a_1 a_2 \dots a_k bc \dots f u a_{k+1} v),$$
$$(a_1 a_2 \dots a_k b c f u a_{k+1} w), \quad (a_1 a_2 \dots a_k bc \dots f u g v)$$

und

$$(a_1 a_2 \dots a_k b e \dots f u g w)$$

zunächst

$$(a_1 a_2 \dots a_k b c \dots f u v w)$$

und aus

$$(a_1 a_2 \dots a_k b c \dots e t u a_{k+1} f), \quad (a_1 a_2 \dots a_k e t u a_{k+1} v),$$
$$(a_1 a_2 \dots a_k b c \dots e t u a_{k+1} w), \quad (a_1 a_2 \dots a_k b c \dots e t u f v)$$

und

$$(a_1 a_2 \dots a_k e t u f w)$$

ferner

$$(a_1 a_2 \dots a_k b c \dots e t u v w),$$

d. h. eine beliebige von jenen Determinanten finden, in deren Systemen an die Stelle zweier bestimmter zwei beliebige Reihen getreten sind u. s. f. Also sind die Werthe aller in der Form

$$(a_1 a_2 \dots a_k x y \dots v w)$$

enthaltenen Determinanten durch die Werthe von

$$(a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} y \dots v w) \text{ und } n-m$$

schicklich gewählten neuen Determinanten und folglich auch durch die Determinanten

$$(a_1 a_2 \dots a_{m-2} v w) \quad \text{und} \quad (m-k-2)(n-m)$$

zweckmässig gewählte andere vollständig bestimmt. Da nun zur Bestimmung der Determinanten

$$(a_1 a_2 \dots a_{m+2} v w);$$

wie oben gezeigt wurde, $2(n-m)+1$ von einander unabhängige hinreichen, so hat man den allgemeinen Satz:

„Wenn man aus einem Systeme von n Elementenreihen zu je m Gliedern $(n>m)$ alle Determinanten m^{ten} Grades ableitet, deren Systeme dieselben k Reihen besitzen, so sind durch die Werthe von $(m-k)(n-m)+1$ von einander unabhängigen Determinanten die Werthe aller übrigen vollständig bestimmt."

Ist $k=0$, d. h. hat man sämmtliche Determinanten ohne Einschränkung gebildet, so sind demnach $m(n-m)+1$ Determinanten zur Bestimmung der übrigen erforderlich.

Dieses letztere Resultat hat schon Stern gefunden und vor Kurzem in der Abhandlung „Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung" bekannt gemacht.

Der vorstehende Satz ist nicht der einzige, welchen die Relation 1) liefert; man kann vielmehr noch mehrere geometrische Sätze aus derselben ableiten, wenn man m den besonderen Werth 3 annehmen lässt. Für diesen Werth nämlich und wenn man überdiess $n-1$ an die Stelle von n treten lässt, übergeht 1) in

$$3)\quad \frac{(1\,n-1\,3):(1\,2\,3)}{(1\,2\,n-1):(1\,2\,3)}=\cfrac{(1\,3\,4):(1\,3\,2)}{(1\,4\,2):(1\,3\,2)+\cfrac{(1\,4\,5):(1\,4\,3)}{(1\,5\,3):(1\,4\,3)+\cdots+\cfrac{(1\,n-2\,n-1):(1\,n-2\,n-3)}{(1\,n-1\,n-3):(1\,n-2\,n-3)}}}$$

und die hier vorkommenden Determinanten bedeuten bekanntlich doppelte Rauminhalte von dreiseitigen Pyramiden, wenn man die Elemente rechtwinklige Coordinaten von Punkten des Raumes darstellen lässt. Ist also O der Anfangspunkt des Coordinatensystems und bezeichnet M_r den Punkt

$$\left(x_{r1}^{(m-3)},\quad x_{r2}^{(m-3)},\quad x_{r3}^{(m-3)}\right),$$

so lässt sich 3) auch schreiben:

$$4)\quad \frac{OM_1M_{n-1}M_3:OM_1M_2M_3}{OM_1M_2M_{n-1}:OM_1M_2M_3}=\cfrac{OM_1M_3M_4:OM_1M_3M_2}{OM_1M_4M_2:OM_1M_3M_2+\cfrac{OM_1M_4M_5:OM_1M_4M_3}{OM_1M_5M_3:OM_1M_4M_3+\cdots+\cfrac{OM_1M_{n-2}M_{n-1}:OM_1M_{n-2}M_{n-3}}{OM_1M_{n-1}M_{n-3}:OM_1M_{n-2}M_{n-3}}}}.$$

Die der Relation 2) entsprechende Gleichung lautet jetzt:

$$5)\quad OM_1M_3M_{r+2}.OM_1M_{r+1}M_{r+3}=OM_1M_3M_{r+1}.OM_1M_{r+2}M_{r+3}+OM_1M_{r+1}M_{r+2}.OM_1M_3M_{r+3}$$

und liefert einen bekannten geometrischen Satz, welcher bereits von Möbius

gefunden wurde (siehe dessen baryc. Calcul pag. 225). Der rechte Theil der Gleichung 4) enthält $2n-7$ von einander unabhängige Rauminhalte von jenen dreiseitigen Pyramiden, welche durch ein System von n Punkten des Raumes bestimmt sind. Diese Volumina als gegeben angenommen findet man, n nach und nach $=6, 7 \ldots\ldots - n$ setzend, zunächst $2n-11$ weitere, und sodann durch zweckmässige Vertauschung der Stellenzeiger $2, 3 \ldots n-1$ die Inhalte aller noch übrigen Pyramiden, welche mit den bereits vorhandenen die Kante OM_1 gemeinschaftlich haben. Vertauscht man dagegen die Stellenzeiger 1 und 2 mit einander, so erhält man aus 4) eine Relation zur Berechnung der Inhalte jener Pyramiden, welche die Kante OM_2 gemeinschaftlich haben aus $2n-7$ gegebenen dieser Art. Man bemerke nun, dass aus den bereits bekannten Werthen der Inhalt einer jeden noch unbekannten, die Spitze O enthaltenden Pyramide mit Hilfe der Gleichung 5) berechnet werden kann. So würde man z. B. $OM_rM_sM_t$ aus $OM_rM_1M_2$, $OM_rM_2M_3$, $OM_rM_1M_t$, $OM_rM_1M_s$ und $OM_rM_2M_t$ finden. Erwägt man ferner, dass unter den Pyramiden mit der Kante OM_1 sich bereits $n-3$ vorfinden, welche die Kante OM_2 gemeinschaftlich haben und ihrem Inhalte nach von einander unabhängig sind, und dass das Volumen einer jeden den Scheitel O nicht besitzenden Pyramide durch die Inhalte von Pyramiden mit diesem Scheitel ausgedrückt werden kann, so hat man den Satz:

> „Wenn von den dreiseitigen Pyramiden, welche durch ein System von n Punkten des Raumes bestimmt sind, irgend $3n-11$ $(=2n-7+n-4)$ von einander unabhängige ihrem Inhalte nach gegeben sind, so kann man daraus die Inhalte aller übrigen berechnen."

Durch eine ebenso einfache Betrachtung könnte man sich überzeugen, dass $3n-12$ von einander unabhängige Verhältnisse zwischen den Inhalten dieser Pyramiden ausreichen zur Berechnung aller übrigen Verhältnisse dieser Art.

Je zwei der Pyramiden, deren Verhältnisse in der Gleichung 4) auftreten, besitzen eine gemeinschaftliche Basis; daher ist das Verhältniss ihrer Inhalte jenem Verhältnisse gleich, nach welchem die gemeinschaftliche Basis die Gerade theilt, welche die Scheitel der beiden Pyramiden verbindet.

Bezeichnet also D den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Basis mit der Verbindungslinie der Schenkel, und $\left(\frac{M_3 D}{D M_t}\right)_{1r}$ das Verhältniss, welches den Quotienten $\frac{OM_1M_rM_s}{OM_1M_tM_r}$ ersetzt, so nimmt die Gleichung 4) folgende Gestalt an:

$$6)\quad \frac{\left(\frac{M_{n-1}D}{M_2 D}\right)_{13}}{\left(\frac{D M_{n-1}}{D M_3}\right)_{12}} = \left(\frac{D M_3}{M_2 D}\right)_{1\,n-1} = \cfrac{\left(\frac{D M_4}{D M_2}\right)_{13}}{\left(\frac{M_4 D}{M_3 D}\right)_{12} + \cfrac{\left(\frac{D M_s}{D M_3}\right)_{14}}{\left(\frac{M_5 D}{M_4 D}\right)_{13} + \cfrac{\vdots}{\left(\frac{M_{n-2}D}{M_{n-3}D}\right)_{m-4} + \cfrac{\left(\frac{D M_{n-1}}{D M_{n-3}}\right)_{1\,n-2}}{\left(\frac{M_{n-1}D}{M_{n-2}D}\right)_{1\,n\,3}}}}},$$

und an die Stelle von 5) tritt

$$7)\quad \left(\frac{M_{r+3}D}{M_2 D}\right)_{13} = \left(\frac{M_{r+3}D}{M_{r+2}D}\right)_{1\,r+1} \cdot \left(\frac{M_{r+2}D}{M_2 D}\right)_{13} + \left(\frac{M_{r+3}D}{M_{r+1}D}\right)_{1\,r+2} \cdot \left(\frac{M_{r+1}D}{M_2 D}\right)_{13}.$$

Man denke sich durch je drei Eckpunkte eines vollständigen n-Eckes im Raume Ebenen gelegt. Von den Verhältnissen, in denen die Seiten durch diese Ebenen getheilt werden, kommen im rechten Theile der Gleichung 6) $2n-8$ von einander unabhängige vor, für welche die getheilten Seiten weder den Punkt O, noch den Punkt M_1, die theilenden Ebenen dagegen eben diese beiden Punkte enthalten, und man überzeugt sich leicht, dass aus diesen $2n-8$ Verhältnissen alle übrigen derselben Art gefunden werden können. Auf gleiche Weise sind also durch $2n-8$ von einander unabhängige Verhältnisse, für welche die getheilten Seiten weder O noch M_k, die Theilungsebenen dagegen OM_k enthalten, alle übrigen Verhältnisse dieser Art bestimmt. Aber die in den Formen

$$\left(\frac{M_r D}{M_s D}\right)_{1\,t} \text{ und } \left(\frac{M_r D}{M_s D}\right)_{k\,t}$$

enthaltenen Verhältnisse sind ausreichend zur Berechnung der noch übrigen unbekannten. So würde man aus

$$\left(\frac{M_r D}{M_l D}\right)_{t1}, \quad \left(\frac{M_r D}{M_u D}\right)_{tk}, \quad \left(\frac{M_u D}{M_l D}\right)_{t1} \text{ und } \left(\frac{M_k D}{M_l D}\right)_{t1}$$

mit Hilfe der Gleichung 7) das Verhältniss $\left(\frac{M_r D}{M_k D}\right)_{tu}$, und aus der Gleichung

$$\left(\frac{M_r D}{D M_k}\right)_{tu} \cdot \left(\frac{M_k D}{D M_s}\right)_{tu} \cdot \left(\frac{M_s D}{D M_r}\right)_{tu} = -1,$$

welche eine bekannte Eigenschaft des ebenen Dreiecks ausdrückt und aus 6) gefolgert werden kann, ferner $\left(\frac{M_s D}{M_r D}\right)_{tu}$ finden. Die Berechnung der noch übrigen Verhältnisse geschieht nun auf die bekannte Weise, und es

mag deshalb nur bemerkt werden, dass man die betreffenden Gleichungen aus der Relation

$$M_r M_s M_t M_u + M_s M_t M_u O + M_t M_u O M_r + M_u O M_r M_s + O M_r M_s M_t = 0$$

abzuleiten hat. Erwägt man nun, dass unter dem in der Form

$$\left(\frac{M_r D}{M_s D}\right)_{1t}$$

enthaltenen Verhältniss bereits $n-4$ von einander unabhängige vorkommen, welche gleichzeitig der Form

$$\left(\frac{M_r D}{M_s D}\right)_{kt}$$

angehören, so ist man berechtigt, folgenden Satz auszusprechen:

„Wenn bei einem Systeme von n Punkten im Raume je drei Punkte durch Ebenen verbunden werden und es sind von den Verhältnissen, in welchen die Durchschnittslinien je zweier Ebenen von den jeweilig übrigen Ebenen geschnitten werden, irgend $3n-12$ $(=2n-8+n-4)$ von einander unabhängige gegeben, so kann daraus jedes Verhältniss dieser Art gefunden werden."

Die Gleichung 4) lässt sich noch auf eine andere Weise umgestalten, die wieder zu einem Satze führt. Man bringe nämlich den Kettenbruch auf die Form

$$\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\cfrac{\cdots}{1+a_{n-4}}}}};$$

die Grössen a sind sodann, mit Ausnahme von $a_1 = \frac{O M_1 M_3 M_4}{O M_1 M_4 M_2}$, Doppelverhältnisse und durch die Gleichung

$$a_r = \frac{O M_1 M_{r+2} M_{r+3}}{O M_1 M_{r+3} M_{r+1}} : \frac{O M_1 M_{r+2} M_r}{O M_1 M_{r+1} M_r} = -\left(\frac{M_{r+2} D}{D M_{r+1}}\right)_{1\,r+3} : \left(\frac{M_{r+2} D}{D M_{r+1}}\right)_{1r}$$

bestimmt. Verbindet man nun a_1 mit dem linken Theile der Gleichung, wodurch dieselbe in

$$\frac{1}{\left(\frac{M_2 D}{D M_3}\right)_{1\,n-1} : \left(\frac{M_2 D}{D M_3}\right)_{14}}$$

übergeht, und bezeichnet man ein Doppelverhältniss, in welchem die Strecke $M_r M_s$ durch die Ebenen $M_i M_k M_l$ und $M_i M_k M_m$ getheilt wird, kurz durch $(r s l m)_{ik}$; so erhält man aus 4) die neue Relation

$$7)\qquad (2\,3\,n-1\,4)_{01} = 1 - \cfrac{(4\,3\,5\,2)_{01}}{1-\cfrac{(5\,4\,6\,3)_{01}}{1-\cfrac{(6\,5\,7\,4)_{01}}{1-\cfrac{\vdots}{1-(n-2\;n-3\;n-1\;n-4)_{01}}}}}$$

Durch dieselbe ist die Aufgabe gelöst, aus $n-5$ von einander unabhängigen Doppelverhältnissen alle übrigen zu finden, in welchen die durch irgend eine Gerade (hier OM_1) des Systems der n Punkte hindurchgehenden Ebenen die nicht in ihnen liegenden Geraden theilen.

Man nehme nun $3n-15$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse als gegeben an; von welchen in jeder der drei Formen $(rstu)_{ak}$, $(rstu)_{al}$, $(rstu)_{bm}$ $n-5$ enthalten sind; so sind hierdurch nicht nur, alle übrigen Doppelverhältnisse dieser Art, sondern überhaupt alle Doppelverhältnisse bestimmt, nach welchen irgend eine Gerade von irgend welchen Ebenen des Systems geschnitten wird. Denn aus $(rslw)_{ak}$ und $(rskw)_{al}$ findet man durch Elimination des dritten gemeinschaftlichen Elementes $(rsw_{ak}w_{al})=(rskl)_{aw}$ und leitet hieraus durch zweckmässig gewählte r und s $n-5$ von einander unabhängige Doppelverhältnisse ab zur Berechnung aller übrigen in der Form $(rstu)_{aw}$ enthaltenen. Auf gleiche Weise gelangt man von den Formen $(rsmu)_{ab}$ und $(rsa_{bm}u)_{bm}$ zu den Doppelverhältnissen $(rstv)_{bu}$, und sodann von $(rsav)_{bu}$ und $(rsbv)_{au}$ zu $(rstw)_{av}$, d. h. zu jedem Doppelverhältniss, für welches die schneidenden Ebenen durch eine beliebige Gerade $(M_u M_v)$ des Systems hindurchgehen. Da nun alle noch übrigen Doppelverhältnisse aus bereits vorhandenen durch Elimination gemeinschaftlicher Elemente abgeleitet werden können, so ist die obige Behauptung gerechtfertigt, und hiermit der folgende Satz bewiesen:

> „Wenn bei einem Systeme von Ebenen, welches entsteht, indem man je drei von n Punkten des Raumes durch Ebenen verbindet, von den Doppelverhältnissen, welche in den Durchschnitten je zweier Ebenen durch die Schnitte mit den jeweilig übrigen Ebenen entstehen, irgend $3n-15$ von einander unabhängige gegeben sind, so lassen sich hieraus alle übrigen finden."

Die vorstehenden geometrischen Sätze hat bereits Möbius gefunden (Der barycentrische Calcul pag. 211, 222 und 260).

Schliesslich erlaube ich mir noch, die beiden Identitäten

$$8)\quad \frac{OM_1M_4M_{n-1}}{OM_1M_2M_{n-1}\,.\,OM_1M_2M_4}=\frac{OM_1M_4M_5}{OM_1M_2M_4\,.\,OM_1M_2M_5}+\frac{OM_1M_5M_6}{OM_1M_2M_5\,.\,OM_1M_2M_6}+\ldots+\frac{OM_1M_{n-2}M_{n-1}}{OM_1M_2M_{n-2}\,.\,OM_1M_2M_{n-1}}$$

und

$$9)\quad \frac{(1\ldots m-2\;m+1\;n)}{(1\ldots m-2\;m-1\;n)(1\ldots m-2\;m-1\;m+1)}=$$
$$=\frac{(1\ldots m-2\;m+1\;m+2)}{(1\ldots m-2\;m-1\;m+1)(1\ldots m-2\;m-1\;m+2)}+\frac{(1\ldots m-2\;m+2\;m+3)}{(1\ldots m-2\;m-1\;m+2)(1\ldots m-2\;m-1\;m+3)}+\frac{(1\ldots m-2\;n-1\;n)}{(1\ldots m-2\;m-1\;n-1)(1\ldots m-2\;m-1\;n)}$$

anzuführen, von welchen die erstere ein specieller Fall der letzteren ist. Man erhält dieselben durch Verwandlung der Kettenbrüche 8) und 1) in Reihen nach einfacher Reduction. Setzt man die Punkte M_1, $M_2 \ldots . M_{n-1}$ als in derselben Ebene liegend voraus, so erhalten sämmtliche Glieder in 8) einen gemeinschaftlichen Factor — die Höhe der Pyramiden —, und man gelangt durch dessen Entfernung zu der in meinem früheren Aufsatze angeführten Flächenrelation von Oscar Werner.

III. Neues Flintglas. In der Sitzung vom 6. Juni d. J. legte Prof. SCHRÖTTER der Wiener Akademie Proben eines neuen von Herrn Prof. Lamy in Paris dargestellten Flintglases vor, das in vieler Hinsicht die Aufmerksamkeit der Physiker und Chemiker verdient und die er der Güte des Letzteren verdankt. Dieses neue Flintglas ist so zusammengesetzt, wie das gewöhnliche, nur enthält es statt Kalium die äquivalente Menge Thallium, und bildet so einen neuen Beleg für die Richtigkeit der zuerst von Lamy ausgesprochenen Ansicht, dass das Thallium seinem chemischen Charakter nach den Alkalimetallen an die Seite zu stellen ist.

Das Thalliumflintglas ist härter und schwerer, als das gewöhnliche. Seine Dichte beträgt 4·18 und diese kann bis zu 5·6 steigen, wenn die Menge des Thalliums vermehrt wird; in dem Maasse, als diese steigt, nimmt das specifische Gewicht und das Brechungsvermögen zu, die Härte hingegen, sowie auch die Unveränderlichkeit an der Luft ab.

Nach Lamy beträgt das Brechungsvermögen des Thalliumflintglases von der Dichte 4·18

für die rothen Strahlen (B) 1·661,
„ „ gelben „ (D) 1·673,
„ „ violetten „ (H) 1·710.

Die Dispersion $N_h - N_b$ beträgt also 0·049, während diese bei einem stark brechenden Flintglas von Fraunhofer nur = 0·037 ist. Dieses bedeutende Farbenzerstreuungsvermögen liess sich auch an dem von Lamy in Paris ausgestellten Prisma und den nach Art der Schmucksteine facettirten Stücken durch das lebhafte Farbenspiel sogleich erkennen.

Die vorgelegten Proben zeigen eine schwach gelbe, etwas ins Grünliche spielende Farbe, welche Lamy dem Umstande zuschreibt, dass er sich des kohlensauren Thalliumoxyds zur Bereitung bediente, bei dessen Zerlegung sich etwas Peroxyd bildet, welches die schwache Färbung bedingt. In der That erhielt er bei Anwendung des schwefelsauren Salzes statt des kohlensauren ein farbloses Glas.

Der Vortragende legt auch noch unter Wasser aufbewahrtes Thallium von schönem Metallglanz und krystallinischer Textur, sowie ein etwa einen Centimeter hohes vollkommen ausgebildetes Octaëder des von Lamy zuerst dargestellten Thalliumalauns vor, in welchem ebenfalls das Kalium durch Thallium vertreten ist. (Wiener Akad.)

Berichtigung: S. 22 Z. 1 v. o. ist zu lesen: „dagegen“ anstatt „daher“.

III.

Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie.

Von

FRIEDRICH ROBERT HELMERT,

Geodät zu Dresden.

Einleitung.

Gegenwärtig giebt es wohl kaum einen modernen Culturstaat, in welchem nicht geodätische Triangulationen zum Zwecke einer genauen Landesvermessung oder als Theil einer Gradmessung ausgeführt werden oder schon beendet sind. Trotzdem ist, soviel ich weiss, nur Weniges über solche Grundsätze bekannt worden, durch deren Befolgung man in den Stand gesetzt ist, die Vermessung möglichst rationell auszuführen, d. h. einen nothwendigen Genauigkeitsgrad derselben mit möglichst wenig Zeit und Geld zu erreichen. Nun erheischt freilich das Terrain in jedem einzelnen Falle besondere Maassregeln; doch lässt sich aber auch nicht verkennen, dass stets eine gewisse Freiheit bei der Wahl derselben stattfinden wird und es ist die Aufgabe des Geodäten, diese auf's vortheiltheilhafteste auszunutzen. Abstrahirt man zunächst von den besondern Terrainverhältnissen, bildet sich somit ein allen Anforderungen genügendes ideales Terrain, so kann es nicht schwer fallen, zu einigen Sätzen zu gelangen, die gewiss auch in manchen praktisch vorkommenden Fällen Anwendung finden können. Hieran wird sich eine Untersuchung über die Abnahme des Genauigkeitsgrades schliessen müssen, welche die Triangulation erleidet, wenn das Terrain Abweichungen von den Bedingungen der günstigsten Triangulation fordert, und es wird sich weiterhin damit ein Urtheil darüber bilden, wieweit man erhöhten Zeit- und Geldaufwand an einzelnen Stellen anzubringen habe, um sich jenen Bedingungen möglichst zu nähern und doch im Ganzen zu gewinnen.

Verschiedene interessante Bemerkungen meines verehrten Lehrers, des Herrn Professor Nagel am hiessigen Polytechnicum, erregten in mir den Vorsatz, dem eben entwickelten Gedanken gemäss, Studien über die Einschaltung der Punkte niederster Ordnung einer Landestriangulation

anzustellen, um zugleich zur Entscheidung der Frage, ob die allgemeinere Anwendung der Pothenotschen Aufgabe hierbei wirklich so vortheilhaft sei, wie es nach den Resultaten der von Herrn Prof. Nagel im erzgebirgschen Kohlenbassin ausgeführten Arbeiten erschien, einen Beitrag zu liefern. Im zweiten der folgenden Hauptabschnitte befindet sich das Endresultat dieser Studien, während der erste mehr vorbereitende Bedeutung hat. Der dritte Hauptabschnitt ist den Basisnetzen gewidmet und der vierte enthält einige Bemerkungen zu den günstigsten Formen grosser Dreiecksnetze.

I. Allgemeine Bemerkungen über die Genauigkeit eines Punktes.

1.

Die Lage eines Punktes wird bekannt, sobald zwei sich schneidende geometrische Oerter desselben gefunden werden. Meistens begnügt man sich nicht, nur zweien solchen die Bestimmung zu überlassen und ermittelt daher noch mehrere. Insofern nun jeder derselben etwas fehlerhaft sein wird, werden paarweise Combinationen verschiedener geometrischer Oerter verschiedene Punktlagen ergeben, die sämmtlich von der wahren Lage abweichen, sodass es einer Ausgleichungsrechnung überlassen bleiben muss, aus der Vergleichung aller Bestimmungen wenigstens eine wahrscheinlichste Lage zu ermitteln. Die Grösse der einzelnen Abweichungen giebt dabei ein Mittel an die Hand, die Genauigkeit der wahrscheinlichsten Lage, ihre Abweichung von der Wahrheit zu schätzen. Hat man nur zwei geometrische Oerter, so ist ihr Durchschnitt schon die wahrscheinlichste Lage des Punktes und es kann von weiterer Ausgleichung nicht die Rede sein; es wäre also auch ein Schluss auf die Genauigkeit dieser Bestimmung nicht möglich, wenn nicht in den meisten Fällen die wahrscheinlichen Fehler der geometrischen Oerter selbst durch die Art und Weise ihrer Auffindung bekannt würden. Aus diesen Angaben die Genauigkeit der Bestimmung zu folgern, ist sonach eine erste Aufgabe, an welche als nächste sich diejenige anschliesst: die Lösung für die Bestimmung aus mehreren geometrischen Oertern zu verallgemeinern. Werden hierbei dieselben als unabhängig von einander bestimmt angenommen, so ist es endlich noch nothwendig, auch den allgemeinsten Fall gegenseitig bedingter geometrischer Oerter in's Auge zu fassen.

Man bezeichnet nun stets die Lage eines Punktes durch zwei Coordinaten und giebt die wahrscheinlichen Fehler derselben an, sodass sich die gestellten Aufgaben zum Theil darauf reduciren, aus jenen auf die Genauigkeit der Bestimmung überhaupt zu schliessen.

Für die hier anzustellenden Untersuchungen wird es genügen, die geometrischen Oerter als G e r a d e zu betrachten, die sich bei eintretenden

Fehlern parallel verschieben. Durch Einführung hinreichend scharfer Näherungswerthe für die Coordinaten reducirt sich nämlich die Gleichung jedes beliebig gestalteten geometrischen Ortes in Bezug auf die kleinen noch anzubringenden Verbesserungen der Coordinaten auf den ersten Grad, da man deren höhere Potenzen vernachlässigen darf. Ebenso ist es ferner auch zulässig, den wahrscheinlichen Fehler des geometrischen Ortes an der Stelle der genähert richtigen Lage des Punktes für die ganze unendliche Länge der substituirten Geraden beizubehalten, da wirklich eintretende Fehler sehr klein sind und für geringe Verschiebungen des Punktes auf dem geometrischen Orte sich dessen wahrscheinlicher Fehler nur wenig ändert. Die genauere Ausführung hiervon kann wohl unterbleiben und nur darauf sei noch hingewiesen, dass im Folgenden an den Stellen, wo durch die soeben gemachten Voraussetzungen die allgemeine Gültigkeit eines Resultats einer wesentlichen Beschränkung bedarf, dieses auch besonders erwähnt worden ist.

Bestimmung der Genauigkeit der Lage eines Punktes aus den von einander unabhängigen wahrscheinlichen Abweichungen zweier Geraden.

2.

Ist der Punkt durch die beiden Geraden AA' und BB' (Fig. 1) bestimmt, welche sich unter dem Winkel φ in O schneiden, so ist O seine wahrscheinlichste Lage. Sind

$$OM = -OM' = r_1, \quad ON = -ON' = r_2$$

die wahrscheinlichsten Abweichungen des Punktes von AA' und BB' zunächst an der Stelle O selbst, so kann man nach dem Vorigen r_1 und r_2 auch die wahrscheinlichen parallelen Verschiebungen der Geraden nennen, und wären gerade diese Fehler begangen worden, so würde der Punkt in eine der vier Ecken des aus den Parallelenpaaren zu AA' und BB' durch M und M', N und N' gebildeten Parallelogramms zu liegen kommen*). Hingegen entsteht die beliebige Lage P in der Entfernung Δ von O durch das gleichzeitige Eintreffen von Fehler $PC = u$ senkrecht zu AA' und $PD = v$ senkrecht zu BB'.

Sind w_1 und w_2 die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens von $u = 0$ resp. $v = 0$, h und k beziehendlich die Maasse der Genauigkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von u resp. v.

$$w_u = w_1 \cdot e^{-h^2 u^2}, \quad w_v = w_2 \cdot e^{-k^2 u^2} \text{ **)},$$

daher die Wahrscheinlichkeit der besonderen Lage P bei gleichzeitigem Eintreffen von u und v

---

*) Dies Parallelogramm ist in Fig. 1 mit angegeben.

**) Hierüber, sowie über die Formeln in Abschn. 11. vergleiche man: „Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1834" oder „Navier, Differentialrechnung etc. übersetzt von Wittstein," Anhang zum II. Bande von Wittstein.

$$1)\quad w_{\Delta} = w_u \,.\, w_v = w_1 \,.\, w_2 \,.\, e^{-(h^2u^2 + k^2v^2)},$$

wobei zwischen h und r_1, k und r_2 die bekannte Relation stattfindet:

$$2)\quad r_1 h = r_2 k = \varrho = 0{,}47694\,.$$

w_{Δ} bleibt nach Gleichung 1) constant, so lange P sich auf dem Umfange einer Ellipse bewegt, für welche AA' und BB' die Richtungen conjugirter Durchmesser sind, weil dabei für u und v die Gleichung besteht: $3)\quad h^2u^2 + k^2v^2 = c^2$, worin c eine Constante bezeichnet. Oder um auf übliche Coordinaten überzugehen, betrachte man AA' und BB' als Achsen eines schiefwinkligen Systems der ξ und η (Fig. 1) und hat alsdann

$$4)\left\{\begin{array}{l} v = \xi \sin\varphi \qquad u = \eta \sin\varphi, \\ \xi^2 (k \sin\varphi)^2 + \eta^2 (h \sin\varphi)^2 = c^2, \text{ oder} \\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 = 1\,,\quad a = \frac{c}{k \sin\varphi}\,,\quad b = \frac{c}{h \sin\varphi}\,, \end{array}\right.$$

worin a und b die halben Längen der conjugirten Durchmesser AA' und BB' bedeuten. P fällt in die Endpunkte der letzteren, wenn resp.

$$\eta = 0,\ \xi = \pm a,\ \text{also } u = 0,\ v = v_o = \pm \frac{c}{k}\,,\ \text{oder}$$

$$\xi = 0,\ \eta = \pm b,\ \text{also } v = 0,\ u = u_o = \pm \frac{c}{h}\ \text{wird.}$$

Man sieht hieraus, dass immer

$$5)\quad u_0 \,.\, h = v_0 \,.\, k = c\,,$$

und dass die zu verschiedenen w_{Δ} gehörigen Ellipsen alle ähnlich sind und um ihren Mittelpunkt O herum auch ähnlich liegen, wobei für die conjugirten Durchmesser in Richtung AA' und BB' die Proportion gilt:

$$2a : 2b = a : b = r_2 : r_1\,.$$

Den vier Punkten M_1, M_1', N_1, N_1' insbesondere, in welchen die Parallelen zu den bestimmenden Geraden im Abstande $\pm r_1$ resp. $\pm r_2$ dieselben schneiden, kommt die Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 \,.\, w_2 \,.\, e^{-\varrho^2}$$

zu und sie liegen daher auf dem Umfange Einer Ellipse, welche die Hauptellipse genannt werden soll und in ihren Durchschnitten M_1, M'_1, N_1, N'_1 mit AA' und BB' von obigen 4 Parallelen tangirt wird.

3.

Denkt man sich die Wahrscheinlichkeit w_{Δ} des Eintretens der Lage P senkrecht zur Papierebene in P aufgetragen und bewegt sich P auf der etwa horizontal liegenden Papierebene, so beschreibt gleichzeitig der Endpunkt der Senkrechten eine Oberfläche mit der Gleichnng

$$6)\quad w_{\Delta} = w_1 \,.\, w_2 \,.\, e^{-(h^2u^2 + k^2v^2)} \text{ oder } w_{\Delta} = \zeta = e^{-(\xi^2k^2 + \eta^2h^2)\sin^2\varphi}\,.$$

ζ ist in O ein Maximum und nimmt von hier aus nach allen Seiten stetig ab bei

asymptotischer Annäherung der Oberfläche an die Papierebene. Alle horizontalen Querschnitte der Fläche sind Ellipsen, alle verticalen Querschnitte durch O unter der Neigung v gegen AA' von der Form der bekannten Wahrscheinlichkeitscurve nach der Gleichung

$$\zeta = w_1 . w_2 . e^{-\Delta^2 . (h^2 \sin^2 v + k^2 \sin^2 (\varphi - v))},$$

und da, wie bekannt, alle diese Querschnitte einen Wendepunkt haben, so hat die Oberfläche eine Wendelinie mit den Gleichungen

$$7)\quad 1 = 2\ \Delta^2\ (h^2 \sin^2 v + k^2 \sin^2 (\varphi - v)),\quad \zeta = w_1 . w_2 . e^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Wendelinie ist hiernach eine ebene Curve und es liegt dieselbe parallel der Papierebene. Die erste der Gleichungen 7), die Projection der Wendelinie auf die Papierebene bezeichnend, geht durch Transformation über in

$$8)\quad \begin{cases} 1 = 2\ (h^2 u'^2 + k^2 v'^2) \quad \text{oder } 1 = \left(\frac{\xi}{a'}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b'}\right)^2, \\ a' = 1 : (k \sin \varphi \sqrt{2});\ b' = 1 : (h \sin \varphi \sqrt{2}). \end{cases}$$

4.

Um nun die **Wahrscheinlichkeit des Vorkommens** von P **auf einer Ellipsenfläche um** O **überhaupt** zu ermitteln, ist es nöthig, zunächst eine endliche Anzahl Lagen von P zu betrachten, die in der Art gleichmässig über die Papierebene vertheilt sind, dass sowohl der einer Lage entsprechende Fehler OP als auch die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens innerhalb einer sehr kleinen, mit den andern gleichräumigen Fläche als constant angesehen werden dürfen. Offenbar verhalten sich dann die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von P innerhalb zweier solcher Flächen wie die betreffenden w_Δ um so genauer, je kleiner die Räume der Flächen genommen werden. Die Zerlegung der Papierebene geschehe wie folgt:

Man theile MOM' und NON' in eine gleiche Anzahl sehr kleiner Theile (Fig. 2):

$$9)\quad MOM' = 2r_1 = 2n\delta;\quad NON' = 2r_2 = 2n\delta',$$

trage diese Theile noch über die Punkte M, M', N und N' hinaus beliebig oft auf und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen zu AA' resp. BB'. So entstehen zwei Systeme von äquidistanten Parallelen, deren sämmtliche Durchschnitte das Vorkommen von Fehlern bezeichnen, für welches der Abstand ζ die Wahrscheinlichkeit ist. Denkt man sich ζ körperlich etwa vom Querschnitte eines Elementarparallelogrammes $\left(\text{gleich } \frac{\delta\delta'}{\sin \varphi}\right)$, so hat man damit ein Bild der Häufigkeit des Vorkommens der Fehler, zwar nicht von absolutem, aber doch relativem Werthe; denn es leuchtet ein, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen innerhalb zweier beliebigen Stücke der Papierebene sich wie die darüber befindlichen cubischen Räume

verhalten, wenn man nur (Gleichung 9) n unendlich anwachsen lässt. Sind W_1 und W_2 die Wahrscheinlichkeiten, dass P auf den Ellipsenflächen mit den Abschnitten a_1 und b_1, a_2 und b_2 liegt, so ist also streng

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{w_1 . w_2 . \int_0^{a_1}\int_0^{\eta_1} e^{-(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi} d\xi . d\eta \sin\varphi}{w_1 . w_2 . \int_0^{a_2}\int_0^{\eta_2} e^{-(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi} d\xi . d\eta \sin\varphi},$$

worin für $\frac{\delta\delta'}{\sin\varphi}$ noch $d\xi . d\eta . \sin\varphi$ gesetzt wurde. Die Grenzen beziehen sich auf den Umfang von Ellipsen, deren Gleichungen aus Gleichung 4) durch Anbringen der Indices 1 resp. 2 an a und b hervorgehen.

Das Doppelintegral im Zähler und Nenner wird leicht durch Einführung anderer Grenzen gefunden. Doch möge die Transformation des Zusammenhanges wegen nicht nach dem üblichen Verfahren, sondern wie folgt geschehen:

Man denke sich (wie in Fig. 3) durch entsprechende Theilpunkte von AA' und BB' die ähnlichen Ellipsen gezogen und die Papierebene also in schmale elliptische Ringe getheilt. Geht man von einer beliebigen Ellipse zu einer benachbarten, so ändert sich c (Gl. 5) um gleichviel, welche der Ellipsen man auch als Ausgang annimmt. Für jeden der Ringe kann man die zu integrirende Function, ursprünglich ζ, als constant ansehen und zwar um so mehr, je dichter das System Ellipsen gezogen wird. Bedeutet $d\varepsilon$ den Inhalt eines elementaren Ringes innerhalb des Winkelraumes AOB, so ist nun jedes der Doppelintegrale auf die Form gebracht

$$\int_0^c e^{-c^2} . d\varepsilon .$$

ε, der elliptisch begrenzte Winkelraum AOB, beträgt

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} . ab \sin\varphi ,$$

also ist

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{4} (a . db + b . da) \sin\varphi ,$$

und sofern

$$da = \frac{\delta'}{\sin\varphi}, \quad db = \frac{\delta}{\sin\varphi}, \quad a\delta = b\delta',$$

auch

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{2} . a\delta = \frac{\pi}{2} . b\delta' = \frac{\pi}{2} . b \sin\varphi \, da,$$

d. i. nach Gleichung 4)

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{4} . \frac{d(c^2)}{hk \sin\varphi} .$$

Damit wird das Integral gleich

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{hk \sin \varphi} \cdot \int\limits_0^c e^{-c^2} \cdot d(c^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1 - e^{-c^2}}{hk \sin \varphi},$$

und wenn man der Ellipse 2. unendliche Ausdehnung giebt, $W_2 = 1$ setzt, wird

$$10) \quad W_1 = W_2 \cdot \left(1 - e^{-c_1^2}\right) = 1 - e^{-c_1^2}. \text{*)}$$

5.

W_1 wird $\frac{1}{2}$ für $c_1 = C = 0{,}83254$, $\log C = 0{,}92040 - 1$.

Die halben Längen der conjugirten Durchmesser der zugehörigen Ellipse, welche die wahrscheinlichste heissen mag, sind

$$11) \quad A = \frac{V}{\sin \varphi}, \quad B = \frac{U}{\sin \varphi}, \text{ worin } V = r_2 \cdot \frac{C}{\varrho}, \quad U = r_1 \cdot \frac{C}{\varrho}, \frac{C}{\varrho} = 1{,}7456$$

zu setzen sind.

6.

Die Wahrscheinlichkeit, dass P innerhalb eines Parallelogrammes um O, nämlich gleichzeitig zwischen zwei Parallelenpaaren in den Entfernungen $\pm u$ von AA', $\pm v$ von BB' liegt, ist gleich

$$^{u}W_{-u} \cdot {}^{v}W_{-v} = \left\{ \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^u e^{-h^2 u^2} du \right\} \cdot \left\{ \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^v e^{-k^2 v^2} dv \right\},$$

wobei jeder Factor einzeln die Wahrscheinlichkeit der Lage von P innerhalb eines der Parallelenpaare bezeichnet.

Nimmt man u und v gleich r_1 resp. r_2, so wird die Wahrscheinlichkeit für P innerhalb des die Hauptellipse in ihren Schnittpunkten mit AA' und BB' tangirenden Parallelogramms (vergl. Abschnitt 2)

$$^{r_1}W_{-r_1} \cdot {}^{r_2}W_{-r_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

nimmt man aber u und v nur proportional r_1 und r_2 und ausserdem so gross, dass obiges Product gleich $\frac{1}{2}$ wird, so müssen folgende Beziehungen bestehen:

---

*) Unter Bezugnahme auf Abschnitt 1 sei hier bemerkt: Sind AA' und BB' nur substituirte Gerade, so ist Gleichung 10) nicht streng, da zwar $W_2 = 1$ wird, aber nicht proportional dem Doppelintegrale im Nenner bleibt. Nimmt man jedoch für die 2. Ellipse c_2 nicht unendlich, sondern nur $\geq 8\varrho$, so ist es auch erlaubt $W_1 = W_2 \cdot \frac{1 - e^{-c_1^2}}{1 - e^{-c_2^2}} = W_2 \cdot \left(1 - e^{-c_1^2}\right)$, auf 7 Decimalen genau, zu setzen und man folgert leicht weiter, dass W_2 selbst auf 7 Decimalen genau gleich 1 ist,

$$ {}^{u}W_{-u} = {}^{v}W_{-v} = 1 : \sqrt{2} = 0{,}707\,; \quad \frac{hu}{\varrho} = \frac{kv}{\varrho} = \frac{u}{r_1} = \frac{v}{r_2} = 1{,}560.\ ^{*)} $$

Wie zu erwarten war, ist dieser Werth etwas kleiner, als $\frac{C}{\varrho}$ in Gleichung 11).

7.

Die Wahrscheinlichkeit, dass P zwischen zwei Ellipsen 1. und 2. liegt, ist

$$ W_1 - W_2 = e^{-c_2^2} - e^{-c_1^2}, $$

wenn die erste Ellipse die zweite umschliesst. Wählt man die zweite Ellipse der ersten unendlich benachbart, so ist auch

$$ W_1 - W_2 = 2e^{-c_1^2} . c_1 . dc_1 = W_1'. $$

Für zwei andere benachbarte Ellipsen 3. und 4. ist in gleicher Weise

$$ W_3 - W_4 = 2e^{-c_3^2} . c_3 . dc_3 = W_3' $$

und da nach Gleichung 5) $dc_1 = dc_3$ ist, wenn man das Ellipsensystem nur wie in Fig. 2 und 3 (Abschn. 4.) gezogen denkt, gilt die Proportion:

$$ 12) \quad W_1' : W_3' = c_1 . e^{-c_1^2} : c_2 . e^{-c_2^2} $$

und zwar um so genauer, je dichter das Ellipsensystem angenommen wird. Lässt man endlich n (Gleichung 9) unendlich anwachsen, so geht der Flächenstreifen zwischen 2 benachbarten Ellipen in einen Contour von verschwindender Dicke über, die jedoch an jeder Stelle eine andere und proportional der Entfernung von O ist **). Die Gleichung 12) sagt daher auch aus, wie sich die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von P auf den Peripherien der Ellipsen 1. und 3. verhalten, sobald man diese Peripherien als Contouren im obigen Sinne betrachtet.

Unter dieser Annahme mag auch die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von P auf einem Ellipsenbogen RS (Fig. 2) berechnet werden, sodass derselbe als Theil eines derartigen Contours betrachtet wird.

8.

Das zwischen den Ordinaten von R und S befindliche Stück der Ellipsenfläche ist, wenn $R = (\xi_1, \eta_1)$, $S = (\xi_2, \eta_2)$, bekanntlich

$$ \varepsilon' = \frac{b}{a} \sin\varphi \left\{ \frac{\xi_2}{2}\sqrt{a^2 - \xi_2^2} - \frac{\xi_1}{2}\sqrt{a^2 - \xi_1^2} + \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{\xi_2}{a} - \arcsin\frac{\xi_1}{a} \right) \right\}. $$

---

*) Zur Berechnung dieses Werthes diente eine der bekannten Tafeln für das betreffende Integral.

**) Bedürfte man der Wahrscheinlichkeit in Bezug auf eine mathematische Linie, so würde als Maass dafür der Flächenraum anzusehen sein, welchen ζ beschreibt, wenn P sich auf jener Linie bewegt. Hier können derartige Betrachtungen ausgeschlossen werden, da sie das Verständniss der Vertheilung der Fehler nicht fördern.

Durch Differentiation nach b und a, wobei aber $\frac{b}{a}$, ξ_1 und ξ_2 constant bleiben, erhält man den elementaren Flächenstreifen, welcher an RS angrenzt (in Fig. 2 schraffirt):

$$d\varepsilon' = b \sin\varphi \left(arc \sin \frac{\xi_2}{a} - arc \sin \frac{\xi_1}{a} \right) da.$$

Derselbe Werth von $d\varepsilon'$ würde sich ergeben haben, wenn man anstatt der ξ die η oder auch die Richtung der Radien OR und OS als constant angesehen hätte, denn es ist auch

$$d\varepsilon' = b \sin\varphi \left(arc \sin \frac{\eta_1}{b} - arc \sin \frac{\eta_2}{b} \right) da, \text{ sowie}$$

$$d\varepsilon' = b \sin\varphi \;.\; arc \sin \left(\frac{\text{Dreieck } ROS}{\text{Dreieck } AOB} \right) \;.\; da, \text{ etc.}$$

Hiermit ergiebt sich nun die Wahrscheinlichkeit, dass P auf dem an RS angrenzenden Flächenstückchen $d\varepsilon'$ liegt, im Verhältniss zu derjenigen, dass P überhaupt auf dem schmalen elliptischen Ringe liegt, von dem $d\varepsilon'$ ein Theil ist,

$$13)\quad \frac{W(RS)}{W(AB)} = \frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\left(arc \sin \frac{\xi_2}{a} - arc \sin \frac{\xi_1}{a} \right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(arc \sin \frac{\eta_1}{b} - arc \sin \frac{\eta_2}{b} \right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\; arc \sin \left(\frac{\text{Dreieck } ROS}{\text{Dreieck } AOB} \right).$$

Hierbei ist stillschweigend RS als Theil von dem innerhalb des Winkelraumes AOB gelegenen Ellipsencontour betrachtet worden. Auch bedarf es keiner weiteren Erörterung für andere Fälle.

Die Construction solcher Bögen RS derselben Ellipse, welche gleiche Wahrscheinlichkeit ergeben, ist mit Hilfe von Kreisen um O mit den Radien a und b sehr leicht. Von derselben wird in Abschnitt 10. Gebrauch gemacht werden.

Nach dem letzten der Ausdrücke für das Wahrscheinlichkeitsverhältniss in Gleichung 13 bleibt dieses auch constant für Bogen RS verschiedener Ellipsen, wenn sie zwischen denselben Radien von O aus liegen. Vergleicht man daher zwei solche Bögen mit einander, so gilt für sie Gleichung 12) wie für die ganzen resp. Peripherien.

9.

Für kleine Bögen RS darf man Dreieck ROS mit dem Sector ROS vertauschen. Construirt man nun wie in Fig. 3 zu der mehrfach erwähnten Ellipsenschaar Radien derartig, dass je zwei benachbarte gleiche Sectorenflächen einschliessen, so erlangt man mit Hilfe der Figur einen Ueberblick über die Vertheilung der Fehler um O. Denn die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von P ist dieselbe 1) für alle elementaren

Flächenstückchen zwischen denselben Ellipsen und beliebigen benachbarten Radien (z. B. für 1, 2, 3... oder für 1′, 2′, 3′...) und 2) für alle Sectoren zwischen benachbarten Radien und derselben Ellipse, woraus man durch Combination noch verschiedene andere Sätze ableiten kann. Zieht man überdiess die Peripherien von verschiedener Stärke an verschiedenen Stellen, entsprechend dem Abstande von O, so ist auch die Wahrscheinlichkeit dieselbe für alle Bogenstücke desselben Ellipsencontours.

Endlich besteht für die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von P auf zwei Bogenstücken verschiedener Contoure oder innerhalb der angrenzenden Flächenstückchen die Gleichung 12). Z. B. in Bezug auf Theile der Ellipsencontoure AB und $A_1\,B_1$ in Fig. 3 oder in Bezug auf die angrenzenden Flächenstückchen ist das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten

$$c\,.\,e^{-c^2} : c_1\,.\,e^{-c_1^2}\,.$$

10.

Als wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung von O wird man, ebenso wie bei Betrachtung der Fehler u und v allein, denjenigen bezeichnen, welcher ebenso oft überschritten, als nicht erreicht wird, und als mittlern Fehler denjenigen, dessen Quadrat das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate ist. Es wird sich zeigen, dass zwischen beiden Grössen eine constante Beziehung stattfindet.

Der wahrscheinliche Fehler ist nach verschiedenen Richtungen von O aus verschieden, denn verschiedene Punkte der wahrscheinlichsten Ellipse haben von O verschiedenen Abstand. Will man nun nicht diese Ellipse, nämlich ihre grosse und kleine Halbachse als grössten und kleinsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers, angeben, so muss ein mittlerer Werth des letztern abgeleitet werden. Es findet sich dieser zu

$$14)\quad R = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{U^2+V^2}{2}\right)} : \sin\varphi\,,$$

wo A, B, U und V dieselben Werthe wie in Gleichung 11) haben.

Geht man nämlich wieder von einer grossen Zahl endlicher Fehler aus, so ist, wenn AB in Fig. 3 die wahrscheinlichste Ellipse bedeutet, der cubische Raum über dem an AB angrenzenden elliptischen Ringe der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des wahrscheinlichen Fehlers überhaupt, und es ist erlaubt, für jedes der Flächenstückchen 1, 2, 3, etc. den Fehler von der Länge des Radius von O aus nach einem beliebigen Punkte der Fläche, etwa dem rechten äussern Eckpunkte (von O aus gesehen) zu nehmen. Für je drei benachbarte dieser Punkte ist nach Gleichung 13)

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{\xi_2}{A} - \operatorname{arc\,sin}\frac{\xi_1}{A} = \operatorname{arc\,sin}\frac{\xi_3}{A} - \operatorname{arc\,sin}\frac{\xi_2}{A}\,,$$

Bezeichnet man diese Differenzen mit $d\psi$ und ist AB in n Theile zerlegt worden, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichungen:

$$n.d\psi = \frac{\pi}{2}, \quad arc\ sin\ \frac{\xi_p}{A} = p.d\psi = \psi,$$

wobei ψ von $1.d\psi$ bis $n.d\psi$ oder von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bei unendlich wachsendem n geht.

Es wird ferner $\xi_p = A sin\psi$, $\eta_p = B cos\psi$

$$\Delta^2_p = A^2 sin^2\psi + B^2 cos^2\psi + 2AB cos\varphi\ cos\psi\ sin\psi$$

und daher $R^2 = \frac{\sum^{2n} \Delta^2_p}{2n}$, worin der Zähler die Summe der Fehlerquadrate für die halbe Ellipse über AOA', der Nenner die Anzahl dieser Quadrate bezeichnet. Für unendlich wachsendes n und bei gleichzeitigem Uebergange von dem elliptischen Streifen zum Ellipsencontour selbst wird

$$R^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \Delta^2_p \, . \, d\psi = \frac{A^2 + B^2}{2}, \text{ oder nach Gleichung 11) auch}$$

$$15) \quad R^2 = \frac{C^2}{2\varrho^2} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{sin^2\varphi} = 1{,}5236 \, . \, \frac{r_1^2 + r_2^2}{sin^2\varphi} \, .$$

11.

Nimmt man u und v allein in Betracht, so bestimmt sich bekanntlich das mittlere Fehlerquadrat für u oder v nach den Formeln

$$16) \begin{cases} m_1^2 = \dfrac{w_1 \, . \int_0^\infty u^2 \, . \, e^{-h^2u^2} du}{w_1 \int_0^\infty e^{-h^2u^2} du} = \dfrac{1}{2h^2} = \dfrac{r_1^2}{2\varrho^2} \\ m_2^2 = \dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{r_2^2}{2\varrho^2} \, . \end{cases}$$

$\eta_0 = \frac{m_1}{sin\ \varphi}$ und $\xi_0 = \frac{m_2}{sin\ \varphi}$ sind dabei bekanntlich die Abscissen der Inflexionspunkte der Wahrscheinlichkeitscurven über BB' und AA' (Abschn. 3.). Im Falle gleichzeitigen Vorkommens von u und v gestaltet sich die Rechnung sehr ähnlich, wenn man nur vorher die gleichwahrscheinlichen Fehlerquadrate je zweier Punkte mit den Coordinaten ξ, η und $(-\xi)$, η vereinigt zu

$$2\,(\xi^2 + \eta^2)\,.$$

Dieser Summe entspricht die Wahrscheinlichkeit w_Δ und es ist daher für die halbe Papierebene über AA'

$2\,\Sigma \left\{w_\Delta\,(\xi^2 + \eta^2)\right\}$ die Summe der Fehlerquadrate, wenn

$2\,\Sigma\, w_\Delta$ als deren Anzahl angenommen wird.

Hiermit ist das mittlere Fehlerquadrat

$$M^2 = \frac{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty w_\Delta\,(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,.\,d\eta}{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty w_\Delta\,.\,d\xi\,.\,d\eta},$$

oder unter Benutzung der bekannten Formeln

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2\mu^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu} \text{ und } \int\limits_0^\infty t^2.e^{-t^2\mu^2}\,dt = \frac{1}{2\mu^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\mu},$$

auch

$$M^2 = \frac{\pi}{4hk\sin^4\varphi}\left(\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2k^2}\right) : \frac{\pi}{4hk\sin^2\varphi} = \frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2k^2},$$

oder endlich

$$17)\ \begin{cases} M^2 = \dfrac{m_1^2+m_2^2}{\sin^2\varphi} = \dfrac{r_1^2+r_2^2}{2\varrho^2\,.\,\sin^2\varphi}, \text{ daher} \\ M^2 = R^2 : C^2;\quad R^2 = 0{,}69312\,M^2;\quad R = 0{,}83254\,M\,.\text{*)} \end{cases}$$

Dagegen ist bekanntlich allgemein

$$r = 0{,}67449\,m\,.$$

12.

Gab die wahrscheinlichste Ellipse in Verbindung mit Fig. 3 über die Vertheilung der Fehler Aufschluss, so ist jetzt in R oder M ein Maass für die Genauigkeit der Bestimmung von O gefunden. Es fragt sich nun aber noch, ob man durch die in der Praxis üblichen Genauigkeitsangaben (den mittlern Fehlern der Coordinaten von O) immer M ableiten kann. Jedenfalls wäre dies möglich, wenn O auf ein den Geraden AA' und BB' paralleles Coordinatensystem bezogen würde. Es sei daher in Fig. 4 $\mathfrak{AOB}$ ein solches System; die Coordinaten des Punktes O, welcher hier mit P bezeichnet ist, mögen abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche als senkrechte Abstände von den Achsen angenommen werden, damit für sie m_1 und m_2 die resp. mittleren Fehler sind. Für eine andere Achse $\mathfrak{OA}_1$ unter der Neigung ψ zu $\mathfrak{OA}$ wird

$$x' = \frac{x\sin(\varphi-\psi) - y\sin\psi}{\sin\varphi},$$

daher ist auch

$$18)\quad \mathfrak{m}_1^2 = \frac{m_1^2\sin^2(\varphi-\psi)+m_2^2\sin^2\psi}{\sin^2\varphi},$$

wenn $\mathfrak{m}_1$ den mittlern Fehler in x' bezeichnet. Für eine zweite zu $\mathfrak{OA}_1$ senkrechte Achse $\mathfrak{OB}_1$ ist

*) In Bezug auf die Berechnung von M lässt sich eine ähnliche Bemerkung machen, wie bei Abschnitt 4. geschehen ist.

$$\mathfrak{m}_2{}^2 = \frac{m_1{}^2 \cos^2(\varphi - \psi) + m_2{}^2 \cos^2\psi}{\sin^2\varphi},$$

daher

$$\mathfrak{m}_1{}^2 + \mathfrak{m}_2{}^2 = \frac{m_1{}^2 + m_2{}^2}{\sin^2\varphi} = M^2;$$

d. h. „ein rechtwinkliges Coordinatensystem gestattet immer die Berechnung des mittlern Fehlers M."

13.

Wählt man $\mathfrak{O}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{B}_1$ so, dass sie einem beliebigen Paare conjugirter Durchmesser der Ellipsen parallel werden, so kann M ebenfalls wie oben aus den mittlern Fehlern der Coordinaten berechnet werden. Dem Achsenpaare $\mathfrak{O}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ mögen in Fig. 5 die conjugirten Durchmesser OA_1 und OB_1 entsprechen, die Ellipse daselbst aber die Hauptellipse vorstellen. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass P auf dem unendlich langen Streifen zwischen den beiden zu OB_1 parallelen Ellipsentangenten durch A_1 und A_1' liegt

$$W = \frac{4hk \sin\varphi}{\pi} \cdot \int_0^\infty \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2)\sin^2\varphi}\, d\xi\, d\eta \sin\varphi,$$

worin η_1 und η_2 die Ordinaten der demselben ξ entsprechenden beiden Parallelenpunkte sind. Betraehtet man $A_1 A_1'$ und $B_1 B_1'$ als Achsen der ξ' und η', so ergeben sich nach und nach folgende Formeln:

$$(\xi^2.k^2 + \eta^2.h^2)\sin^2\varphi = (\xi'^2.k'^2 + \eta'^2.h'^2)\sin^2\varphi'$$

$$d\xi.d\eta.\sin\varphi = d\xi'.d\eta'\sin\varphi',$$

$$W = \frac{4hk \sin\varphi}{\pi} \cdot \int_0^\infty \int_{-b'}^{+b'} e^{-(\xi'^2 k'^2 + \eta'^2 h'^2)\sin^2\varphi'}\, d\xi'\, d\eta' \sin\varphi'$$

oder

$$W = \frac{2hk \sin\varphi}{k'.\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-b'}^{+b'} e^{-\eta'^2 h'^2 \sin^2\varphi'}\, d\eta'.$$

Hierin bedeuten a' und b' die Abschnitte der conjugirten Durchmesser $A_1 A_1'$ und $B_1 B_1'$, φ' den Conjugationswinkel derselben; ferner ist für h' und k'

$$a' = \frac{c}{k'\sin\varphi'}; \quad b' = \frac{c}{h'\sin\varphi'}, \quad c = \varrho.$$

Man hat weiter

$$\int_{-b}^{+b} e^{-\eta^2 h^2 \sin^2\varphi}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4h\sin\varphi}, \quad \text{wenn } bh\sin\varphi = \varrho,$$

und zufolge der vorhergehenden Gleichungen für a' und b', h' und k' wird auch

$$\int_{-b'}^{+b'} e^{-\eta'^2 h'^2 \sin^2 \varphi'} d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{4h' \sin \varphi'}, \quad \text{da } b'h' \sin \varphi' = \varrho .$$

Dies giebt zusammen

$$W = \frac{1}{2}.$$

Denselben Betrag würde man erhalten haben, wenn ursprünglich als bestimmende Gerade die conjugirten Durchmesser A_1A_1' und B_1B_1' mit den wahrscheinlichen Abweichungen $\pm r_1' = \pm b' \sin \varphi'$ und $\pm r_2' = \pm a' \sin \varphi'$ oder den Präcisionen h' und k' gegeben gewesen wären. Ueberhaupt erhellt, dass sich die Geraden AA' und BB' immer durch beliebige Paare von Geraden ersetzen lassen, wenn dieselben und ihre wahrscheinlichen Abweichungen so gewählt werden, wie A_1A_1' und B_1B_1' mit $\pm r_1'$ und $\pm r_2'$. Denn zunächst geben dieselben auch dieselbe Hauptellipse wie die ursprünglichen bestimmenden Geraden und daher geben sie auch dieselbe Vertheilung der Fehler und dieselben Werthe M und R. Zugleich ist soviel ersichtlich, dass zwei bestimmende Gerade sich immer nur auf eine Weise durch zwei andere, senkrecht zu einander befindliche Gerade ersetzen lassen. Um z. B. zu zeigen, dass man den Werth M auch durch Anwendung von A_1A_1' und B_1B_1' erhält, hat man folgende Rechnung.

Aus den Werthen der wahrscheinlichen Fehler senkrecht A_1A_1' und B_1B_1', nämlich

$$r_1' = b' \sin \varphi', \quad r_2' = a' \sin \varphi',$$

und dem entsprechenden mittlern Fehler

$$m_1' = \frac{r_1'}{\varrho\sqrt{2}}, \quad m_2' = \frac{r_2'}{\varrho\sqrt{2}}$$

folgt mit Hilfe der bekannten Relation

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{r_1'^2 + r_2'^2}{\sin^2 \varphi'}; \quad \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{m_1'^2 + m_2'^2}{\sin^2 \varphi'} = M^2.$$

m_1' und m_2' genügen selbstverständlich auch der Gleichung 18), wenn man die Achse der x' resp. mit OA_1 oder OB_1 parallel nimmt. Im erstern Falle ergiebt sich z. B. succesive:

$$m_1'^2 = \frac{r_1'^2}{2\varrho^2}; \quad r_1' = b' \sin \varphi' \text{ und da } a'b' \sin \varphi' = ab \sin \varphi, \text{ auch}$$

$$r_1' = \frac{ab \sin \varphi}{a'}, \quad m_1'^2 = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{2\varrho^2} \cdot \frac{1}{a'^2}.$$

Die Ellipsengleichung liefert ferner für den letzten Factor

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{a^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{daher ist}$$

$$m_1'^2 = \frac{(b^2 \sin^2(\varphi - \psi) + a^2 \sin^2 \psi) \sin^2 \varphi}{2\varrho^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{m_1^2 \sin^2(\varphi - \psi) + m_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} = \mathfrak{m}_1^2.$$

14.

Lässt man den Endpunkt Q des zu $\mathfrak{m}_1$ gehörigen wahrscheinlichen Fehlers $OQ = r_1'$, der allgemein mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet werden mag, alle Lagen um O durchlaufen, so beschreibt er für die Hauptellipse die bekannte Fusspunktcurve (Fig. 5) mit der Gleichung

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{r_1^2 . \sin^2(\varphi - \psi) + r_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

worin $\mathfrak{r}$ und ψ variabel sind und $\mathfrak{r}$ die wahrscheinliche parallele Verschiebung von $A_1 A_1'$ unter der Neigung ψ gegen AA' bedeutet. An den Endpunkten der Hauptachsen tangiren sich beide Curven, $\mathfrak{r}$ wird dabei ein Minimum resp. Maximum. Der spitze Winkel ψ aus der Gleichung

$$19) \quad r_1^2 . \sin 2(\varphi - \psi) = r_2^2 \sin 2\psi$$

entspricht der Lage der grossen Achse, falls φ selbst spitz ist.

Im Allgemeinen lässt sich für Q noch die leicht beweisliche Proportion angeben (Fig. 5):

$$QQ' : QO : Q'O = Q_1 Q_1' : Q_1 O : Q_1' O,$$

wobei OQ senkrecht QQ_1.

15.

Wie schon bemerkt, lässt sich die specielle Vertheilung der Fehler mit Hilfe von Coordinatenachsen parallel irgend welchen conjugirten Ellipsendurchmessern stets angeben. In der Praxis ist man jedoch auf rechtwinklige Coordinatenachsen angewiesen und diese gestatten nur die Berechnung von M, da man kein Mittel hat, die Ellipse aus zwei beliebigen zu einander senkrechten Radien ihrer Fusspunktcurve zu finden. Wollte man dennoch z. B. aus OQ und OQ_1 die Fehlervertheilung ableiten, also damit verfahren wie in Fig. 2 mit OM und ON, so würde man um so grössere Abweichungen von der Wirklichkeit erhalten, je weiter sich QOQ_1 von den Ellipsenachsen entfernt.

Liegt z. B. QOQ_1 in den Halbirungslinien der Winkel zwischen den Hauptachsen, so werden $OQ = OQ_1 = \mathfrak{r}$, $OQ' = OQ_1'$,

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi (\varphi - \psi) + r_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} = \frac{r_1^2 \cos^2(\varphi - \psi) + r_2^2 \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

$$\mathfrak{r}^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \sin^2 \varphi}, \quad \mathfrak{m}^2 = \frac{1}{2} M^2.$$

OQ und OQ_1, in der angegebenen Weise benutzt, würden für gleichwahrscheinliche Lagen von P Kreise um O anstatt Ellipsen ergeben

Bedarf man daher einer genauen Einsicht in die Gruppirung gleichwahrscheinlicher Lagen von P um O, so muss auch für eine Coordinate von P in Bezug auf eine dritte Achse der mittlere oder wahrscheinliche

Fehler berechnet werden, was, wie sich später zeigen wird, nicht viel Mühe macht. Ist die Neigung einer der drei Coordinatenachsen gegen die Hauptachse der Ellipse gleich ψ', so ist für die betreffende Coordinate das Quadrat des mittlern Fehlers

$$20)\quad \mathfrak{m}^2 = m_1^2 \,.\, cos^2\, \psi' + m_2^2 \,.\, sin^2\, \psi',$$

wenn m_1 und m_2 die den Hauptachsen entsprechenden mittlern Fehler bedeuten.

Setzt man nun für drei Coordinatenachsen resp. $\psi' = \psi$, $\psi' = \psi + 45^0$ und $\psi' = \psi + 90^0$, so hat man zur Besimmung von m_1 m_2 und ψ

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{m}_1^2 = m_1^2\, cos\, ^2\psi + m_2^2\, sin\, ^2\psi = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \,.\, cos\, 2\psi, \\ \mathfrak{m}_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2}\, sin\, 2\psi, \\ \mathfrak{m}_3^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2}\, cos\, 2\psi. \end{array}\right.$$

Führt man abkürzungsweise noch $\mathfrak{m}_4$ für $\psi' = \psi + 135^0$ ein, wo

$$\mathfrak{m}_4^2 = \mathfrak{m}_1^2 + \mathfrak{m}_3^2 - \mathfrak{m}_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2}\, sin\, 2\psi,$$

so wird

$$\left\{\begin{array}{l} (m_1^2 - m_2^2)^2 = (\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{m}_3^2)^2 + (\mathfrak{m}_2^2 - \mathfrak{m}_4^2)^2 \\ (m_1^2 + m_2^2) = (\mathfrak{m}_1^2 + \mathfrak{m}_3^2) = (\mathfrak{m}_2^2 + \mathfrak{m}_4^2) \end{array}\right.$$

zur Berechnung von m_1 und m_2. Damit besimmt sich auch ψ aus einer der obigen Gleichungen. Die zu m_1 und m_2 gehörigen r sind die Hauptachsen der Ellipse.

16.

Nur selten kommen in der Praxis schiefwinklige Coordinatensysteme vor. Die wahrscheinlichen Fehler der Coordinaten gestatteten hier auch die Berechnung von M nicht und liefern nur zwei Paare gegenüberliegender Punkte der Fusspunktcurve, wenn die Achsen nicht zufällig parallel conjugirten Durchmessern liegen, was man indess nicht wissen kann.

Polarcoordinaten, überhaupt alle solche Coordinatensysteme, welche am Punkte zwei zu einander senkrechte Richtungen markiren, ersetzen in jeder Beziehung rechtwinklige Coordinaten.

Bestimmung der Genauigkeit eines Punktes aus der Angabe mehrerer von einander unabhängiger Geraden.

17.

Benutzt man zunächst ein schiefwinkliges Coordinatensystem mit dem Neigungswinkel φ, so sind die Gleichungen der Geraden im Anschluss an Fig. 6, wenn p und q die Abschnitte der Geraden auf den zu den x und y senkrechten Achsen bezeichnen:

$$21)\quad \frac{x_1}{q_1} + \frac{y_1}{p_1} = \sin\varphi, \; \ldots\ldots, \; \frac{x_n}{q_n} + \frac{y_n}{p_n} = \sin\varphi.$$

Ferner mögen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ die n Abstände eines Punktes P mit den Coordinaten x, y von den Geraden sein, und $m_1 \ldots m_n$ die mittlern Fehler, $h_1 \ldots h_n$ die Maasse der Genauigkeit — in Zukunft kurz Präcisionen genannt — der einzelnen Geraden bedeuten. Dann ist zunächst irgend ein Abstand ε (Fig. 6)

$$22)\quad \begin{cases} \varepsilon = \left(\frac{y}{\sin\varphi} - p\right)\sin\gamma + \frac{x}{\sin\varphi}\,.\,\sin(\gamma-\varphi) \\ \varepsilon = x\,.\,\frac{p}{l} + y\,.\,\frac{q}{l} - \frac{pq\sin\varphi}{l}, \end{cases}$$

oder auch

$$23)\quad \varepsilon = -\lambda + x\,.\,\frac{p}{l} + y\,.\,\frac{q}{l},$$

worin der Abstand λ der Geraden vom Coordinaten-Anfange als Beobachtungsgrösse, zu der m als mittlerer Fehler gehört, erscheint, l aber die Länge der Geraden zwischen den Achsen bezeichnet. Bekanntlich werden x und y so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens aller Fehler, nämlich der Abstände ε, ein Maximum wird; also, wenn $w_1 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten der Fehler Null senkrecht zu den verschiedenen Geraden bezeichnen, und e Basis der natürlichen Logarithmen ist,

$$(w_1\,.\,w_2\,.\,\ldots\,.\,w_n) = e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2)} = Max.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $\sum_1^n (h^2\varepsilon^2) = Min.$

Daraus finden sich für die wahrscheinlichsten Coordinaten x und y die Gleichungen

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial y} = 0, \quad \text{oder ausgeführt}$$

$$24)\quad \begin{cases} x\,.\,\Sigma\left(\frac{pp}{ll}\,.\,h^2\right) + y\,.\,\Sigma\left(\frac{pq}{ll}\,.\,h^2\right) - \Sigma\left(\frac{\lambda p}{l}\,.\,h^2\right) = 0, \\ x\,.\,\Sigma\left(\frac{pq}{ll}\,.\,h^2\right) + y\,.\,\Sigma\left(\frac{qq}{ll}\,.\,h^2\right) - \Sigma\left(\frac{\lambda q}{l}\,.\,h^2\right) = 0. \end{cases}$$

Für andere Lagen des Punktes P, dessen Coordinaten mit $x+u$, $y+v$ bezeichnet werden mögen, ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens

$$W_{u,v} = Max\,.\,e^{-\sum_1^n (h^2\,.\,\Delta\varepsilon^2)}$$

wenn $Max.$ den Werth der Wahrscheinlichkeit für die wahrscheinlichste Lage (x, y) des Punktes P bezeichnet und

$$\Delta\varepsilon^2 = \left\{(x+u)\frac{p}{l} + (y+v)\frac{q}{l} - \lambda\right\}^2 - \left\{x\frac{p}{l} + y\frac{q}{l} - \lambda\right\}^2$$

ist, woraus mit Hilfe von 24) hervorgeht

$$25)\ \begin{cases} W_{u,v} = Max\,.\,e^{-\sum\limits_1^n \left(u\,.\,\frac{p}{l} + v\,.\,\frac{q}{l}\right)^2 h^2} \\ \qquad = Max\,.\,e^{-\sum\limits_1^n (\varepsilon'^2 h^2)}\,. \end{cases}$$

Die ε' sind hierbei die Abstände des Punktes $(x+u,\ y+v)$, oder kurz (u, v), von Parallelen zu den bestimmenden Geraden, gezogen durch die wahrscheinlichste Lage (x, y).

Für das *Max.* selbst ergiebt sich noch

$$26)\ Max. = (w_1\,.\,w_2\,.\,.\,.\,w_n)\,.\,e^{-\Sigma(-\lambda\varepsilon h^2)}$$

worin ε die der wahrscheinlichsten Lage entsprechenden Abstände von den Geraden bedeuten.

Man sieht leicht ein, dass diese Resultate unabhängig von der besonderen Lage der Coordinatenachsen sind und ist daher zu dem Satze berechtigt:

> Ist ein Punkt durch mehrere Gerade bestimmt, so liegen (nach Gleichung 25) um den wahrscheinlichsten Ort desselben alle Lagen gleicher Wahrscheinlichkeit auf concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.

Damit ist in der Hauptsache der allgemeinere Fall auf den besonderen zweier Geraden zurückgeführt.

18.

Für die weitere Ausführung möge zu rechtwinkligen Coordinatenachsen übergegangen werden, da schiefwinklige sich nach Abschnitt 16. weniger empfehlen. Indem $\varphi = 90^0$ wird, gehen die Gleichungen 21), 23), 24), 25) über in

27) $0 = -\lambda - x\cos\gamma + y\sin\gamma$, (allgemeine Form der Gleichung einer Geraden),

28) $\varepsilon = -\lambda - x\cos\gamma + y\sin\gamma$, (Fehlergleichung), und

$$29)\ \begin{cases} x\,.\,\Sigma(h^2\cos^2\gamma) - y\,.\,\Sigma(h^2\cos\gamma\sin\gamma) + \Sigma(h^2\lambda\cos\gamma) = 0, \\ -x\,.\,\Sigma(h^2\cos\gamma\sin\gamma) + y\,.\,\Sigma(h^2\sin^2\gamma) - \Sigma(h^2\lambda\sin\gamma) = 0, \end{cases}$$

worin γ den Neigungswinkel der Geraden gegen die zu den Coordinaten x senkrechte x-Achse bezeichnet.

Hieraus folgen

$$30)\ \begin{cases} x = N\,.\,\Sigma\left[h^2_\alpha\, h^2_\beta(\lambda_\alpha\sin\gamma_\beta - \lambda_\beta\sin\gamma_\alpha)\sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)\right], \\ y = N\,.\,\Sigma\left[h^2_\alpha\, h^2_\beta(\lambda_\alpha\cos\gamma_\beta - \lambda_\beta\cos\gamma_\alpha)\sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)\right], \\ N = 1 : \Sigma\left[h^2_\alpha\, h^2_\beta\sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)\right], \end{cases}$$

Σ in Bezug auf alle paarweisen Combinationen der Zahlen $1\ldots n$ (ohne Wiederholung).

Ferner ist

31) $W_{u,v} = Max\,.\,e^{-\Sigma\left[h^2(-u\cos\gamma + v\sin\gamma)^2\right]}$, und

für das Maximum von W oder für das Minimum der Fehlerquadrate nach Gleichung 26)

$$\Sigma(-\lambda\varepsilon h^2) = -N.\frac{1}{2}.\Sigma\left\{\begin{array}{r} h_\alpha^2 h_\beta^2 h_\gamma^2 \lambda_\gamma sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)[\lambda_\alpha sin(\gamma_\gamma - \gamma_\beta) + \lambda_\beta sin(\gamma_\alpha - \gamma_\gamma) \\ + \lambda_\gamma sin(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)] \end{array}\right\},$$

wobei die Indices $\alpha\, \beta\, \gamma$ unter den Zahlen 1 bis n alle Combinationen zu drei mit Wiederholung bilden. (Index γ und Winkel γ können nicht wohl verwechselt werden, sodass die Bezeichnungsweise auch nicht zu Irrthümern Veranlassung giebt.) Zieht man zusammen, so wird für Combinationen ohne Wiederholung in der Summe rechts

$$\Sigma(-\lambda\varepsilon h^2) = N\,.\,\Sigma\left\{\begin{array}{r} (h_\alpha^2\, h_\beta^2\, h_\gamma^2).[\lambda_\alpha\, sin\,(\gamma_\beta - \gamma_\gamma) + \lambda_\beta\, sin\,(\gamma_\gamma - \gamma_\alpha) \\ + \lambda_\gamma\, sin\,(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)]^2 \end{array}\right\}.$$

Speciell für 3 Gerade sind die wahrscheinlichsten drei Abstände ε

$$\varepsilon_1 = N.h_2^2.h_3^2 sin\,(\gamma_3 - \gamma_2).\{\lambda_1.sin(\gamma_2 - \gamma_3) + \lambda_2 sin(\gamma_3 - \gamma_1) + \lambda_3 sin(\gamma_1 - \gamma_2)\},$$
$$\varepsilon_2 = N.h_1^2.h_3^2.sin(\gamma_1 - \gamma_3).\{\quad \div \quad\quad \div \quad\quad \div \quad\},$$
$$\varepsilon_3 = N.h_1^2.h_2^2.sin(\gamma_2 - \gamma_1).\{\quad \div \quad\quad \div \quad\quad \div \quad\},$$

woraus die Proportion folgt, wenn man nur die absoluten Werthe der ε berücksichtigt,

$$\varepsilon_1\, h_1^2 : \varepsilon_2\, h_2^2 : \varepsilon_3\, h_3^2 = s_1 : s_2 : s_3\,,$$

wo s_1, s_2, s_3 die 3 Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks gegenüber den Winkeln $\gamma_3 - \gamma_2$, $\gamma_1 - \gamma_3$ und $\gamma_2 - \gamma_1$ (ohne Rücksicht auf den Quadranten) bezeichnen. Die wahrscheinlichste Lage des Punktes lässt sich hiernach leicht construiren. *)

19.

Um die Lage der Ellipsenhauptachsen zu erhalten, werde das nach der wahrscheinlichsten Punktlage verschobene Coordinatensystem um den Winkel ψ gedreht; es ist dann zu setzen für die ursprünglichen u und v ausgedrückt in den neuen Coordinaten u' und v'

$$u = u'\, cos\, \psi + v'\, sin\, \psi\,; \quad v = -\, u'\, sin\, \psi + v'\, cos\, \psi.$$

Wählt man nun ψ so, dass der Exponent von $W_{u,v}$ rein quadratisch wird, so bezeichnet das neue Coordinatensystem auch die Lage der Hauptachsen. Aus Gleichung 31) folgt

$$32)\ \left\{\begin{array}{l} tan\, 2\psi = \Sigma\,(h^2\, sin\, 2\gamma) : \Sigma\,(h^2\, cos\, 2\gamma) \text{ und der Exponent wird gleich} \\ c^2 = u'^2\,.\,\Sigma\,[h^2\, cos^2\,(\psi - \gamma)] + v'^2\,.\,\Sigma\,[h^2\, sin^2\,(\psi - \gamma)]. \end{array}\right.$$

Die Coefficienten von u'^2 und v'^2 sind die Präcisionen in der Bestimmung der Lagen der Achsen der u' und v', oder der

*) Dasselbe ist bei n Geraden immer dadurch zu ermöglichen, dass man mit Hilfe der Hauptellipse für zunächst zwei Gerade 1 und 2 zwei andere substituirt, deren eine parallel einer dritten geht, mit der sie sodann zu einer einzigen bestimmenden Geraden vereinigt wird. Man bemerkt leicht, wie dieses Verfahren zum gewünschten Ziele zu führen im Stande ist.

Hauptachsen selbst, und die diesen Präcisionen entsprechenden wahrscheinlichen Fehler gehören als Hauptachsen zu der Hauptellipse. Führt man den Werth von ψ ein, so ergiebt sich die Präcision für die Achse der u', d. i. auch die Präcision in der Bestimmung der Coordinate u' senkrecht zu dieser Achse, gleich

$$33)\quad \frac{1}{2}\left\{ \Sigma h^2 + \sqrt{[\Sigma (h^2 \sin 2\gamma))^2 + (\Sigma (h^2 \cos 2\gamma)]^2} \right\};$$

für die Präcision in der Lage der Achse der v' ist die Wurzel des letzten Ausdrucks negativ zu nehmen.

Lage und Grösse der Ellipse sind unabhängig von der Wahl des Coordinatensystemes; für die Grösse der Hauptachsen ist dies unmittelbar klar. Die erste der Gleichungen 32) zeigt ferner, dass $(\psi - \gamma)$ für Drehungen des rechtwinkligen Systemes constant bleibt, daher gilt der Satz in der That auch für die Lage der Ellipse.

20.

Zur Berechnung der Präcision in der Bestimmung einer der ursprünglichen Coordinaten, etwa des x, suche man zuerst die zur Richtung der x-Achse (oder Achse der u) conjugirte Richtung, indem man die y-Achse (oder Achse der v) um $\psi - 90^0$ dreht und ψ so wählt, dass c^2, der Exponent von e in dem mit *Max.* bezeichneten Ausdrucke rein quadratisch wird. Es ergiebt sich nach und nach

$$u = u', \quad v = u' \cot \psi + v' \csc \psi,$$

$$c^2 = \Sigma \left\{ h^2 \,.\, \left(\frac{- u' \sin(\psi - \gamma) + v' \sin \gamma}{\sin \psi}\right)^2 \right\}$$

und für

$$34)\quad \begin{cases} c^2 = u'^2 \,.\, \Sigma \left(\dfrac{h^2 \sin^2 (\psi - \gamma)}{\sin^2 \psi}\right) + v'^2 \,.\, \Sigma \left(\dfrac{h^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2 \psi}\right) \\ \quad \text{wird} \\ \tan \psi = \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) : \Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma). \end{cases}$$

Der Factor von u'^2 ist das Quadrat der Präcision in der Bestimmung von x und werde mit H_1^2 bezeichnet. H_1' sei die Präcision in v' und H_2 diejenige in der Bestimmung von y, welche Grösse H_2 aus H_1 durch Vertauschung von γ mit $90^0 + \gamma$ hervorgeht. Indem nun

$$\sin^2 \psi = [\Sigma (h^2 \sin^2 \gamma)]^2 : \left\{[\Sigma (h^2 \sin^2 \gamma)]^2 + [\Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma)]^2\right\},$$

giebt eine leichte Zwischenrechnung

$$35)\quad \begin{cases} H_1^2 = \left\{\Sigma (h^2 \cos^2 \gamma) \,.\, \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) - \Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma)\right\} : \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) \\ \quad \text{oder} \quad H_1^2 = 1 : N \,.\, \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) \end{cases}$$

und damit ist

$$36)\quad H_2^2 = 1 : N \,.\, \Sigma (h^2 \cos^2 \gamma), \quad N \text{ wie in Gleichung 30)}.$$

Ferner findet man

$$H_1'^2 = \left\{[\Sigma(h^2 \sin^2\gamma)]^2 + [\Sigma(h^2\cos\gamma\sin\gamma)]^2\right\} : \Sigma(h^2\sin^2\gamma).$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l} M^2 = \dfrac{1}{2H_1^2} + \dfrac{1}{2H_2^2} + \dfrac{\Sigma h^2}{2\,\Sigma\,[h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)]} \\ \text{und somit auch } M^2 = \dfrac{1}{2}\,.\,N\,.\,\Sigma h^2 \end{array}\right\} \text{37). *)}$$

Dieser Werth muss sich auch aus den Präcisionen senkrecht zu den Ellipsenhauptachsen ergeben (vergl. Gleichung 33), und in der That ist

$$M^2 = \left(\frac{1}{\Sigma h^2 + \sqrt{\div}} + \frac{1}{\Sigma h^2 - \sqrt{\div}}\right) = \frac{1}{2}\,.\,N\,.\,\Sigma h^2,$$

wobei

$$\sqrt{\div} = \sqrt{[\Sigma(h^2\sin 2\gamma)^2] + [\Sigma(h^2\cos 2\gamma)]^2}.$$

Ueberdiess genügen auch H_1 und H_1' der Gleichung

$$M^2 = \left(\frac{1}{2H_1^2} + \frac{1}{2H_1'^2}\right) : \sin^2\psi, \quad \text{wie leicht zu zeigen ist.}$$

H_1 und H_2 werden auf bekannte Weise auch aus Gleichung 29) gefunden. Setzt man erstens daselbst $\Sigma(h^2\lambda\cos\gamma) = (-1)$ und $-\Sigma(h^2\lambda\sin\gamma) = 0$, so geht x in $(1 : H_1^2)$ über; wird zweitens der erste dieser Werthe Null, der zweite gleich (-1) gesetzt, so geht y in $(1 : H_2^2)$ über. Bedarf man nun H noch für eine andere Richtung (vergl. Abschn. 15.), so nehme man diese als Achse der x', transformire die Gleichungen 28 und 29) und verfahre nun wie oben bezüglich der Terme der Gleichungen, welche x' und y' nicht enthalten.

21.

Hiermit ist denn der allgemeinere Fall mehrerer Geraden auf den besonderen nur zweier Geraden zurückgeführt und es bedarf nur noch der Bemerkung, dass die neugewonnenen Formeln mit den entsprechenden früheren identisch werden, sobald alle Gerade bis auf zwei in Wegfall kommen. Aus Gleichung 37) ergiebt sich alsdann

$$M^2 = \frac{h_1^2 + h_2^2}{2h_1^2 h_2^2 \sin^2\varphi} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2\varrho^2\sin^2\varphi}, \quad \text{wie in Gleichung 17).}$$

Für die Lage der Hauptachsen geht Gleichung 32) über in

$$\tan 2\psi = \frac{h_2^2 \sin 2\gamma_2}{h_2^2\cos 2\gamma_2 + h_1^2}, \quad \text{wobei die } x\text{-Achse in Richtung der ersten}$$

Geraden angenommen wurde; dagegen giebt Gleichung 19)

---

*) H^2 und M^2 enthalten nur Quadrate der Sinus, daher werden im Folgenden die Winkel, soweit sie nur zur Berechnung von H^2 und M^2 dienen, ohne Rücksicht auf den Quadranten bestimmt werden.

$tan\ 2\psi = \frac{r_1^2 \sin 2\varphi}{r_1^2 \cos 2\psi + r_2^2}$ und weil $\varphi = \gamma_2$ ist, geht dieser Werth in den vorigen über.

Für die Länge der Hauptachsen lässt sich durch ähnliche Rechnung ein Gleiches nachweisen, was hier weiter nicht ausgeführt zu werden braucht.

22.

Bei den vorigen Rechnungen wurden die Präcisionen h als bekannt vorausgesetzt. Sehr oft jedoch kennt man nur sogenannte Gewichte g, die sich wie die h^2 verhalten, und benutzt die Ausgleichungsresultate, die wahrscheinlichsten Werthe der h kennen zu lernen. Die Theorie lehrt, dass bei n Geraden der mittlere Fehler der Gewichtseinheit gleich ist

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma\,(\varepsilon^2\,g)}{n-2}},$$

worin ε wieder die wahrscheinlichsten Abstände bezeichnet. Die Präcision der Gewichtseinheit wird daher gleich $1 : \sqrt{2\mu^2}$, oder es ist für das Gewicht g

$$h_g^2 = (g : 2\mu^2)\,.$$

Ist nun h^2 von vornherein genau bekannt und $g = h^2 \,.\, i$ gesetzt worden, so muss sich jetzt $i = 2\mu^2$ ergeben.

Aus der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung beider Werthe kann man einen Schluss auf die Zulässigkeit der bei Abschätzung der h dienenden Principien machen. Jeder geometrische Ort stützt sich auf Winkelmessungen und feste Punkte. Soweit h von ersteren abhängt, wird man es ziemlich genau angeben können; die festen Punkte betrachtet man meist als fehlerfrei. Es muss daher im Allgemeinen der Ueberschuss von $2\mu^2$ über i den mittleren Fehler der festen Punkte charakterisiren, oder zur Entdeckung unberücksichtigter Fehlerquellen führen.

23.

Die Präcisionen h der Geraden, und wenn es möglich ist, auch die Lage der Geraden wird man so wählen, dass M sich möglichst klein ergiebt. Doch ist es auch sehr wünschenswerth, dass H für alle Richtungen durch die wahrscheinlichste Lage des Punktes gleich werde, d. h. dass die Ellipsen gleichwahrscheinlicher Lagen in Kreise übergehen.

Nach Gleichung 33) tritt Letzteres ein für

$$38)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma\,(h^2 \cos 2\gamma) = \Sigma\,(h^2 \sin 2\gamma) \\ H^2 = 1 : M^2 = \frac{1}{2}\,.\,\Sigma\,h^2\,. \end{cases}$$

Diese Bedingung gilt für jede Lage der x-Achse, auf welche sich die γ beziehen. Schreibt man daher die erste der vorigen Gleichungen noch in der Form

$$39) \quad \Sigma\,(h^2 \cos^2 \gamma) = \Sigma\,(h^2 \sin^2 \gamma)\,,$$

so hat man für Gleichheit der H die Bedingung *): Es müssen sich die h^2 unter den doppelten Neigungswinkeln ihrer zugehörigen Geraden zu einem vollständigen Polygone zusammenstossen lassen (nach Gleichung 38), oder es muss die Summe der Quadrate der Projectionen der h zu zwei zu einander senkrechten Richtungen gleich sein. In der letztern Ausdrucksweise ist aber noch eine Ungenauigkeit, denn liegen die zwei Projectionsachsen gerade in den Halbirungslinien der Winkel zwischen den Hauptachsen, so ist Gleichung 39) erfüllt, auch wenn nicht alle H gleich sind. Obgleich nun nicht zu vermuthen ist, dass dieser Ausnahmefall eintritt, ist es doch nothwendig, die Summe der Quadrate der Projectionen noch für eine dritte Achse zu bilden.

Sind Gleichung 38) und 39) erfüllt, so wird M^2 ein Minimum unter der Bedingung von $\Sigma\, h^2 = Const.$ und bei unveränderlichen Neigungen der Geraden zu einander. Man hat aus

$$M^2 = Min. \text{ auch } \frac{1}{N} = Max. \text{ oder } \Sigma\left(h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)\right) = Max.$$

Es muss daher für beliebige Systeme von dh die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial h_1}\cdot dh_1 + \frac{\partial \Sigma}{\partial h_2}\cdot dh_2 + \ldots + \frac{\partial \Sigma}{\partial h_n}\, dh_n = K(2h_1\, dh_1 + 2h_2\, dh_2 + \ldots + 2h_n\, dh_n),$$

worin K eine noch zu bestimmende Grösse ist. Die Ausführung der Rechnung giebt zur Bestimmung der $n+1$ Unbekannten $h_1 \ldots . h_n$, K die $n+1$ Gleichungen

$$40) \begin{cases} 0 = -C + h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_{n-1}^2 + h_n^2 \\ 0 = -K \quad . \quad + h_2^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + \ldots + h_{n-1}^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_{n-1}) + h_n^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ 0 = -K + h_1^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_1) + h_2^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_2) + \ldots + h_{n-1}^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_{n-1})\,. \end{cases}$$

Die zweite bis $(n+1)$te Gleichung sagen aus, dass $H_1, H_2, \ldots H_n$, das sind die Präcisionen der Geraden nach der Ausgleichung, einander gleich werden sollen, und da die Gleichheit dreier dieser H diejenige der sämmtlichen H nach sich zieht, so sind $(n-3)$ der h für ein Minimum von M im obigen Sinne beliebig. Trotzdem kann der Fall eintreten, dass ein Minimum nicht möglich ist, sobald sich nämlich einzelne h^2 negativ ergeben **). Die Unmöglichkeit eines *Min.* tritt stets da ein,

*) Man vergleiche hierüber, sowie über die im Gleichungssystem 40) nach Weglassung der ersten Gleichung vorkommende Determinante: Baltzer, Determinanten 2. Aufl. § 17. (1. 2 etc.) und § 3 (16. 17).

**) Ein negatives h^2 bedeutet, man soll die Gerade um 90^0 drehen und ihr die Präcision gleich dem absoluten Werthe des berechneten h beilegen.

wo sich die h^2 zu keinem Polygone zusammenstossen lassen (nach Gleichung 38), d. h. wenn sich alle Geraden in einem spitzen Winkelraume schneiden. Im andern Falle lassen sich mit Hilfe einer Figur nach Gleichung 39) die h leicht ausprobiren, indem es ja auch meist auf strenge Gleichheit der h nicht ankommt. Doch sind stets die h^2 in Grenzen eingeschlossen, und man erhält diese, indem man zunächst drei der h^2 durch C und die andern h^2 ausdrückt und diese sodann variirt, u. s. w. Der Werth K findet sich nach Gleichung 38) zu $\frac{C}{2}$.

Es mag noch erwähnt werden, dass die Unbestimmtheit des Maximalsystems der h den Vortheil gewährt, gleichzeitig noch andere Bedingungen erfüllen zu können, wozu namentlich diejenige als von Wichtigkeit zu rechnen ist, bei constantem M^2 die aufgewandte Mühe möglichst klein zu machen. Die weitere Ausführung muss indess besonderen Fällen vorbehalten bleiben (vergl. Abschnitt 34).

24.

Vorstehende Betrachtungen liefern ausser Erreichungen des Hauptzweckes noch nebenbei die geometrische Deutung der Ausgleichung der beobachteten Werthe einer Function zweier Veränderlichen mit zwei zu bestimmenden Constanten, hier den Coordinaten x und y. Zugleich sieht man deutlich, was es heisst: den mittlern Fehler einer Function der Constanten x, y anzugeben.

Z. B. die Function $n$ten Grades von x, y

$$z^n = f(x, y)$$

wird man zunächst linear machen durch Einführung scharfer Näherungswerthe. Entspricht z_0 den Näherungswerthen x_0 und y_0, so ist für die Verbesserungen von x_0 und y_0, die Δx und Δy heissen mögen,

$$\frac{1}{n} \cdot z_0^{n-1} \Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \,, \quad \text{oder}$$

$$\Delta x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{n}{z_0^{n-1}}\right) + \Delta y \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{n}{z_0^{n-1}}\right) - \Delta z = 0,$$

und in dieser Form hat man die Gleichung einer substituirten Geraden, nämlich einer Parallelen zu derjenigen Tangente der Curve, welcher (x_0, y_0) am nächsten liegt. Δz bezeichnet den Abstand dieser Parallelen von (x_0, y_0). Derselben entspricht diejenige Präcision H, welche zu einer Geraden unter der Neigung γ gegen die Achse der x gehört, wo

$$tan\ \gamma = - \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right\}.$$

Ist hierdurch die Präcision für Δz, also auch für z gefunden, so ist es nicht mehr schwierig, auch für $f(x, y)$ selbst sie anzugeben.

Beispiel. Der Abstand des Punktes (x, y) vom festen Punkte (x_1, y_1) ist

$$\varepsilon^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Sind x_0 und y_0 Näherungswerthe von ε und entspricht ihnen ein ε_0, so wird

$$\Delta\varepsilon = \Delta x \,.\, \frac{x_0 - x_1}{\varepsilon_0} + \Delta y \,.\, \frac{y_0 - y_1}{\varepsilon_0}\,; \quad tan\,\gamma = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\,.$$

Hat man nun das H und damit den mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ für $\Delta\varepsilon$ ermittelt, so wird $\pm 2\,\varepsilon_0\,\mathfrak{m}$ der mittlere Fehler in ε^2 selbst sein, wenn hierin für x und y die wahrscheinlichsten Coordinaten gesetzt wurden.

$\mathfrak{m}$ selbst ist von der Entfernung beider Punkte unabhängig, und sucht man einen mittlern Werth des mittlern Fehlers im Abstande von beliebigen andern Punkten (x_1, y_1), so ist es nur nöthig, diese für eine Kreisperipherie um (x, y) zu betrachten. Ohne weitere Bemerkung leuchtet ein, dass das mittlere Quadrat aller $\mathfrak{m}$ wird im Anschluss an Gleichung 20):

$$41)\quad \mathfrak{M}^2 = \frac{\sum\limits_0^{\pi} \mathfrak{m}^2}{\frac{\pi}{d\psi'}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (m_1^2 cos^2\psi' + m_2^2 sin^2\psi')\,d\psi' = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} = \frac{1}{2}M^2.$$

25.

Bisher war angenommen worden, dass die bestimmenden Geraden von einander unabhängig bestimmt seien; anhangsweise möge jetzt der Fall erörtert werden, wo diess nicht mehr so ist. Einem Paare scharfer Näherungswerthe der Coordinaten entspreche ein gewisses System von Werthen der Beobachtungsgrössen; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ sollen nun die Ergänzungen dieser Werthe zu den wirklichen Beobachtungsgrössen, $\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_p'$ aber die Ergänzungen zu den wahrscheinlichsten Werthen der Beobachtungsgrössen bezeichnen. Versteht man noch unter x und y die wahrscheinlichsten Ergänzungen der Näherungswerthe der Coordinaten, so ist

$$0 = ax + by + c\alpha_1' + d\alpha_2' + \ldots + q\alpha_p'$$

die Form der n Gleichungen zur Bestimmung von x und y, worin die Coefficienten Functionen der Näherungswerthe aller Grössen bedeuten. Da ferner $p \geqq n$ ist, kann man n der α' durch x, y und die $(p-n)$ andern α ausdrücken und letztere als zu bestimmende Constanten, wie x und y, betrachten. Bezeichnet man sie daher noch mit z_1, z_2, etc., so nimmt das Gleichungssystem die Form an

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha_1' = A_1 x + B_1 y + C_1 z_1 + \ldots + D_1 z_{p-n} \\ \alpha_2' = A_2 x + B_2 y + C_2 z_1 + \ldots + D_2 z_{p-n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n' = A_n x + B_n y + C_n z_1 + \ldots + D_n z_{p-n} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha'_{n+1} = \cdot \quad \cdot + z_1 \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha'_p = \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + z_{p-n} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Setzt man hierin links für $\alpha' \alpha + \Delta\alpha$, so bestimmt man bekanntlich x, y, z etc. derartig, dass $\Sigma(h^2 . \Delta^2 \alpha)$ ein Min. wird.

Der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines andern Constantensystems $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ u. s. f. lässt sich immer auf die Form bringen *):

$$W_1 = \varkappa_1 . e^{-\sum\limits_1^n (A_i \Delta x + B_i \Delta y + \ldots + D_i \Delta z_{p-n})^2 . h_i^2},$$

worin $\varkappa_1$ in Bezug auf die Δ constant, h_i die Präcision in α_i ist. Bildet man weiter die Summe aller W_1 für alle möglichen Δz_1, Δz_2, ... Δz_{p-n}, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$W_2 = \varkappa_2 . e^{-(P . \Delta^2 x + Q . \Delta x . \Delta y . + R . \Delta^2 y)},$$

worin wieder $\varkappa_2$, P, Q, R von Δx und Δy unabhängig sind.

Dieser Ausdruck sagt aber aus, dass immer sich gleichwahrscheinliche Lagen des zu bestimmenden Punktes um die wahrscheinlichste Lage herum in Ellipsen gruppiren, womit daher der allgemeinste Fall auf den einfachsten „zweier unabhängigen Geraden" zurückgeführt worden ist. (Vergl. Abschnitt 39.).

II. Ueber das Einschalten von Netzpunkten in ein grösseres „bekanntes" trigonometrisches Netz.

26.

Ist eine Landestriangulation bis zu Dreiecken von 0,5 bis 2 Meilen Seitenlänge herabgekommen, so wird es sich darum handeln, eine grosse Anzahl weiterer Punkte nach den gegebenen behufs Detailaufnahme einzumessen, sodass deren durchschnittliche Entfernung 0,1 bis 0,3 Meilen beträgt. Der grösste Theil dieser neubestimmten Punkte muss zugänglich sein, da sie zum Ausgange weiterer Messungen dienen sollen. Man wird

---

*) Ein Beweis hierzu findet sich in den Seite 75 unter Anmerkung **) citirten Werken.

daher im Allgemeinen zu ihrer Bestimmung einen dreifachen Weg einschlagen können:

1) Man beobachtet von den Hauptpunkten die Richtungen nach den Nebenpunkten;
2) man beobachtet umgekehrt auf den Nebenpunkten die Richtungen nach den Hauptpunkten;
3) man beobachtet Beides, combinirt also Methode 1) und 2).

Wegen der ungeheuren Complicirung des Rechnungswerkes sowohl, als auch wegen des geringeren Genauigkeitsgrades bei gleicher Mühe der Winkelmessungen ist dasjenige Verfahren, zwischen den Nebenpunkten selbst ein Netz zu bilden und dieses in das Hauptnetz einzuhängen, nicht in Gebrauch. Nur für benachbarte Nebenpunkte erhält man zwar auf diese Weise eine grössere Sicherheit in der Bestimmung der Verhältnisse ihrer Entfernungen (also der Figur zwischen diesen Punkten); jedoch genügen auch hierzu die Angaben jener drei Methoden, welche jeden Nebenpunkt direct auf die Hauptpunkte stützen und so seine Lage gegen diese weit schärfer zu berechnen gestatten.

Berücksichtigt man gleichviele Hauptpunkte, wie dies jedenfalls für die beiden ersten Methoden geschehen muss, auch bei der dritten derselben, so kann von einem Vergleiche mit jenen beiden nicht die Rede sein. Ein solcher hat erst dann Sinn, wenn im dritten Falle weniger Hauptpunkte zur Bestimmung eines Nebenpunktes zugezogen werden, und er soll hier überhaupt nur anhangsweise dem Vergleiche der 1. und 2. Methode folgen, insofern dieses völlig genügen wird.

27.

„In theoretischer Beziehung ist nun im Allgemeinen die zweite Methode, bei nur drei Hauptpunkten 'Pothenot'sche Aufgabe' genannt, die vorzüglichste; aber auch in praktischer Hinsicht bietet sie manche Vortheile vor der ersten.“

Zur Begründung dieses Satzes möge vorerst der letztere Gesichtspunkt angenommen werden. Dabei sind zu berücksichtigen 1) die Situation der Nebenpunkte und 2) die Menge der Arbeit mit dem Theodoliten und die der Ausgleichungsrechnung.

Die Nebenpunkte liegen meistens tiefer als die Hauptpunkte, diese lassen sich daher leicht und gut von jenen visiren, während umgekehrt die Aufsuchung und das Anvisiren der schwachen Signalstangen, durch welche man die Nebenpunkte sichtbar zu machen hätte, der grössern Entfernung und des schlechten Hintergrundes wegen oft sehr misslich werden wird. Es ist dieser Umstand der schnellen Ausführung der Arbeit nach der ersten Methode entschieden bedeutend hinderlicher, als der bei der zweiten

Methode nöthige häufige, doch leicht zu bewirkende Umzug nach nahen, benachbarten Nebenpunkten. Die Situation der Nebenpunkte spricht mithin zu Gunsten der zweiten Methode.

28.

Hinsichtlich der Menge der Arbeit mit dem Theodoliten und derjenigen der Ausgleichungsrechnung lässt sich Folgendes anführen:

1) Bei Winkelbeobachtungen entsprechen den q Richtungen von den q Hauptpunkten nach einem Nebenpunkte q Winkelmessungen; ebensoviele lassen sich auf dem Nebenpunkte zwischen den q Hauptpunkten vornehmen und man hat hierbei noch den Vortheil der Auswahl unter den $\frac{q(q-1)}{2}$ möglichen Winkeln zu günstigst wirkenden Schnitten. Jeder Winkel, hier wie dort, liefert eine Gleichung zur Bestimmung der Coordinaten des Nebenpunktes und wenn nur für letztere durch eine Uebersichtsmenselaufnahme der Nebenpunkte erst vorläufige, durch darauf sich stützende Berechnung aus zwei guten Schnitten scharfe Näherungswerthe bekannt worden sind, macht die Aufstellung und Auflösung der Gleichungen in beiden Fällen nahezu dieselbe Mühe. Ueber die wirklich erlangte Genauigkeit wird die theoretische Vergleichung später das Nöthigste angeben.

2) *a.* Bei Richtungsbeobachtungen von den Hauptpunkten aus müssen die Nebenpunkte wegen ihrer grossen Anzahl gruppenweise vereinigt werden, womöglich so, dass für verschiedene Hauptpunkte dieselben Nebenpunkte zu einerlei Gruppe gehören.

Man bekommt dadurch in die Rechnung eine Beziehung benachbarter Nebenpunkte, da eine Gruppe am besten auch nur solche enthalten wird, und durch diese Beziehung bestimmt sich die gegenseitige Lage dieser Nebenpunkte etwas schärfer, als der mittlere Fehler M jedes einzelnen derselben erwarten lässt. Leider verwickelt sich aber die Rechnung durch diese Beziehung ungemein, denn sie bringt sämmtliche Bestimmungsgleichungen der Coordinaten aller Punkte einer Gruppe in Zusammenhang und strenggenommen müssen alle diese Gleichungen zusammen ausgeglichen werden:

Ist ω der Beobachtungsfehler in dem Winkel α zwischen der Nullrichtung — es sei diese die Richtung nach einem andern Hauptpunkte — und der Richtung nach einem Nebenpunkte, so schreibt man bekanntlich die Gleichung zwischen α, ω und den Coordinaten x und y des Nebenpunktes als Fehlergleichung

$$-\omega \,.\, \varkappa = \varkappa \,.\, f(x, y),$$

wenn $\varkappa^2$ das Gewicht des Winkels α und $f(x, y)$ eine lineare Function der Verbesserungen der Näherungswerthe von x und y ist. (Die Coefficienten derselben sind von α und den Coordinaten des Hauptpunktes abhängig; vergl. Abschnitt 30.).

ω besteht aus zwei Theilen, nämlich den Beobachtungsfehlern der beiden Richtungen; bezeichnen 0_q und p_q resp. den Fehler der Nullrichtung und den Fehler der Richtung nach dem $p$ten Nebenpunkte auf dem $q$ten Hauptpunkte, so ist

$$-\omega = (0_q - p_q)\,.$$

Ist n Anzahl der Nebenpunkte der betr. Gruppe, q Anzahl der Hauptpunkte, von welchen dieselbe beobachtet wurde und berücksichtigt man, dass $\varkappa$ constant wird für alle Winkel von einem Hauptpunkte aus, so nimmt das System der zusammen zur Ausgleichung gelangenden Gleichungen die folgende Gestalt an:

	1ter Nebenpunkt,	2ter Nebenpunkt,	$n$ter Nebenpunkt.
1. Hauptpunkt:	$\varkappa_1(0_1-1_1)=f_1'(x_1,y_1)$;	$\varkappa_1(0_1-2_1)=f_2'(x_2,y_2)$; …	$\varkappa_1(0_1-n_1)=f_n'(x_n,y_n)$;
2. Hauptpunkt:	$\varkappa_2(0_2-1_2)=f_1''(x_1,y_1)$;	$\varkappa_2(0_1-2_1)=f_2''(x_2,y_2)$; …	$\varkappa_2(0_2-n_2)=f_n''(x_n,y_n)$;
. . .	.	.	.
q. Hauptpunkt:	$\varkappa_q(0_q-1_q)=f_1^{(q)}(x_1,y_1)$;	$\varkappa_q(0_q-2_q)=f_2^{(q)}(x_2,y_2)$; …	$\varkappa_q(0_q-n_q)=f_n^{(q)}(x_n,y_n)$.

Die Anzahl aller Gleichungen hierin beträgt $n.q$. Die $2n$ Coordinaten bestimmt man so, dass $\Sigma\left(\frac{\varkappa^2}{2}.v^2\right) = Min.$, wenn v den Beobachtungsfehler einer Richtung und $\frac{\varkappa^2}{2}$ sein Gewicht bezeichnen. Man erhält damit $2n$ Gleichungen für die Coordinaten, und macht schon die Entwickelung der Coefficienten der Unbekannten für diese Gleichungen aus den obigen $n.q$ Gleichungen viele Mühe, so noch viel mehr die Auflösung nach den Unbekannten.

Noch schwieriger wird die Rechnung, wenn die Gruppeneintheilung im obigen Sinne nicht hat innegehalten werden können. Man wird wohl sehr häufig am besten thun, den übrigens nicht wesentlichen Vortheil des Zusammenhanges der Gleichungen für verschiedene Nebenpunkte fallen zu lassen und jeden derselben für sich zu berechnen.

Was die Grösse der Arbeit gegenüber Winkelbeobachtungen betrifft, so stellt sich diese jetzt etwa halb so gross als bei letzteren heraus; denn es beträgt die Anzahl der Einstellungen des Instrumentes für die n Nebenpunkte und die Nullrichtung $(n+1)$, während bei Winkelbeobachtungen $2n$ Einstellungen zur Ermittlung der n Richtungsunterschiede mit den Nebenpunkten nothwendig werden.

2) *b.* Vereinigt man auf einem Nebenpunkte alle sichtbaren Hauptpunkte in einen einzigen „Satz“ und bezeichnen (1), (2), …(q) die Beobachtungsfehler der Richtungen, so ergeben sich $(q-1)$ Gleichungen für die Coordinaten des Nebenpunktes. Durch Einführung scharfer Näherungswerthe erhalten diese Gleichungen die Form

$$42)\begin{cases}(1)-(2)=A_2+B_2.x+C_2.y,\\(1)-(3)=A_3+B_3.x+C_3.y,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\(1)-(q)=A_q+B_q.x+C_q.y\,,\quad\text{wobei}\end{cases}$$

$\{(1)^2+(2)^2+\ldots.+(q)^2\}=Min.$ zu machen ist. Unter x und y sind hierbei die Verbesserungen der Coordinatennäherungswerthe, unter A, B, C gewisse Functionen der letzteren und der Coordinaten der Hauptpunkte zu verstehen. Durch Differentiation der Gleichungen 42) und Multiplication derselben mit gewissen, noch unbekannten Grössen Z_2, Z_3, ... Z_q ergiebt sich zunächst

$$Z_2.d(1)-Z_2.d(2)-(B_2.dx+C_2.dy)\,Z_2=0$$
$$Z_3.d(1)-Z_3.d(3)-(B_3.dx+C_3.dy)\,Z_3=0$$
u. s. f.

Addirt man diese Gleichungen, so muss ihre Summe mit dem totalen Differential des *Min.* identisch werden, also

$$\Sigma Z\,d(1)-Z_2.d(2)-\ldots-Z_q.d(q)-\Sigma(BZ).dx-\Sigma(CZ).dy=(1)\,d(1)+(2)\,d(2)+\ldots+(q)\,d(q)$$

für beliebige Werthe der Differentiale. Dazu gehört, dass

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_2^q Z=(1)\\-Z_2=(2)\\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\\-Z_q=(q)\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}\sum\limits_2^q(BZ)=0\\ \sum\limits_2^q(CZ)=0\end{array}\right\},\quad\text{also}\ \{(1)+(2)+\ldots+(q)\}=0.$$

Die weitere Rechnung giebt nach und nach:

$$(1).q-\{(1)+(2)+\ldots+(q)\}=\sum_2^q A+\sum_2^q B.x+\sum_2^q C.y,$$

oder

$$(1)=\frac{1}{q}\left(\sum_2^q A+\sum_2^q B.x+\sum_2^q C.y\right).$$

$$\text{Ferner ist}\ \left.\begin{array}{l}-(2)=Z_2=-(1)+A_2+B_2.x+C_2.y\\-(3)=Z_3=-(1)+A_3+B_3.x+C_3.y\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\-(q)=Z_q=-(1)+A_q+B_q.x+C_q.y\end{array}\right\},\ \text{und}$$

$$43)\begin{cases}\Sigma(BZ)=0=[\Sigma(AB)+\Sigma(BB).x+\Sigma(BC).y]-\dfrac{\Sigma B.\{\Sigma A+\Sigma B.x+\Sigma C.y\}}{q}\\ \Sigma(CZ)=0=[\Sigma(AC)+\Sigma(BC).x+\Sigma(CC).y]-\dfrac{\Sigma C.\{\Sigma A+\Sigma B.x+\Sigma C.y\}}{q}\end{cases}$$

Diese Gleichungen haben die Form von Gleichung 29), wenn man sich die Glieder mit x, sowie die mit y zusammengezogen denkt. Durch Analogie erhält man daher die Quadrate der Präcisionen in der Bestimmung von x und y zu

$$44^a)\begin{cases} H^2_x = 1 : N . \left\{\Sigma(CC) - \frac{1}{q}\ (\Sigma C)^2\right\} \\ H^2_y = 1 : N . \left\{\Sigma(BB) - \frac{1}{q}\ (\Sigma B)^2\right\} \\ (1:N) = \left\{\left(\Sigma(BB) - \frac{1}{q}(\Sigma B)^2\right)\left(\Sigma(CC) - \frac{1}{q}(\Sigma C)^2\right) - \left(\Sigma(BC) - \frac{\Sigma B . \Sigma C}{q}\right)^2\right\}, \\ M^2 = \frac{1}{2} . N . \left\{\left(\Sigma(BB) + \Sigma(CC)\right) - \frac{1}{q}\left((\Sigma B)^2 + (\Sigma C)^2\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Präcision in der Beobachtung der Richtungen, für alle von gleicher Grösse, ist dabei zu 1 vorausgesetzt. Ist ihr Werth h, so hat man H_x^2, H_y^2 mit h^2 zu multipliciren, M^2 mit h^2 zu dividiren.

Wären die $(q-1)$ Winkel $(1, 2)$, $(1, 3)$, ... $(1, q)$ einzeln gemessen worden, jede Richtung mit der Präcision 1, also die Winkel mit der Präcision $\sqrt{\frac{1}{2}}$, so würden H^2 und M^2 Werthe annehmen, die aus den soeben aufgestellten hervorgehen, wenn die H^2 mit 2 dividirt, M^2 mit 2 multiplicirt und $\Sigma B = 0$, sowie $\Sigma C = 0$ gesetzt werden. Man erhält dafür:

$$44^b)\begin{cases} H_x'^2 = 1 : 2N' . \Sigma(CC); \quad H_y'^2 = 1 : 2N' . \Sigma(BB) \\ (1 : N') = \Sigma(BB) . \Sigma(CC) - (\Sigma BC)^2 \\ M'^2 = N' . (\Sigma(BB) + \Sigma(CC)) . \end{cases}$$

In ΣB und ΣC kommen theils positive, theils negative Glieder vor, um so mehr, je gleichmässiger die Hauptpunkte vertheilt sind. Indess auch ohne diese Voraussetzung werden

$$\frac{(\Sigma B)^2}{q}, \quad \frac{(\Sigma C)^2}{q} \text{ gegen } \Sigma(BB) \text{ und } \Sigma(CC)$$

immer klein sein und daher kann man ihre Quadrate näherungsweise vernachlässigen. Geschieht diess, so wird mit Hilfe einer leichten Zwischenrechnung:

$$M^2 = \frac{1}{2} M'^2 . \left\{1 + \frac{M'^2}{q}\left(\left\{\frac{\Sigma B . \Sigma(CC) - \Sigma C . \Sigma(BC)}{\Sigma(BB) + \Sigma(CC)}\right\}^2 + \left\{\frac{\Sigma B . \Sigma(BC) - \Sigma C . \Sigma(BB)}{\Sigma(BB) + \Sigma(CC)}\right\}^2\right)\right\}$$

d. h. es hat M^2 einen nur wenig grösseren Werth als $\frac{1}{2}\ M'^2$.

Dabei beträgt die Anzahl der Einstellungen für M' $2(q-1)$, für M nur q, woraus man erkennt, dass auch auf dem Nebenpunkte Richtungsbeobachtungen viel vortheilhafter sind, als Winkelbeobachtungen. Es wird sich allerdings zeigen, dass es nicht rathsam ist, die Winkel alle von einem Hauptpunkte aus zu nehmen, man verbindet besser diametral liegende Hauptpunkte. Jedenfalls ändert im Allgemeinen dieser Umstand das Resultat obiger Vergleichung nicht dahin ab, dass Richtungsbeobachtungen sich ungünstiger als Winkelbeobachtungen herausstellen würden — immer unter der Voraussetzung, dass die Hauptpunkte im Umkreise um den Neben-

punkt nicht sehr ungleich vertheilt sind. Der Beweis hierzu kann umsomehr wegbleiben, weil sich andrerseits auch zeigen wird, dass „reine Richtungsbeobachtungen", d. h. solche, die alle sichtbaren Punkte in Einen Satz vereinigen, nicht räthlich sind, sondern wenigstens mit Winkelbeobachtungen combinirt werden müssen, sollen die Nebenpunkte nach allen Richtungen gleiche Präcision H erhalten. Es gilt Dieses ebenso für die Beobachtungen auf den Hauptpunkten, wie auf den Nebenpunkten.

Man kann daher sagen: „Werden gleichviele Einstellungen gemacht, um Nebenpunkte nach der ersten oder zweiten Methode zu bestimmen, so ist bei gleicher Beobachtungsweise die Ausgleichungsarbeit für beide dieselbe. Für beide Methoden sind ferner Richtungsbeobachtungen etwa gleichviel günstiger, als Winkelbeobachtungen." (Vergleiche Abschnitt 39.).

29.

Die wirklich erreichte Genauigkeit kam bei diesen Untersuchungen noch nicht in Frage. Die theoretische Vergleichung beider Methoden soll nun zeigen, dass im Falle von Winkelbeobachtungen bei gleicher Mühe die zweite Methode in der Regel bessere Resultate als die erste Methode giebt, und dass, wie schon erwähnt, reine Richtungsbeobachtungen im Allgemeinen nicht vorkommen werden, da einzelne Richtungen ein grösseres Gewicht als die andern erhalten müssen, soll die Triangulation ein günstiges Resultat geben.

Es würde dann zu folgern sein, dass im Allgemeinen die zweite Methode die günstigere ist.

30.

Im Anschluss an Fig. 7 seien A und B zwei Hauptpunkte, P ein Nebenpunkt und dabei $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle P = \varphi$, $AB = 2c$, $AP = a$, $BP = b$. Die Visur von A nach P giebt dann für die rechtwinkligen Coordinaten x und y von P die Gleichung

$$0 = -x \,.\, \cos\alpha + (c + y) \sin\alpha\,,$$

wenn der Coordinatenanfang Q in die Mitte von AB gelegt wird und QB die positive Achse der x wieder in dem Sinne ist, dass die Coordinate x von P senkrecht zur x-Achse zu nehmen ist.

Sind (x) und (y) scharfe Näherungswerthe, $(x) + \Delta x = x$, $(y) + \Delta y = y$, so wird für die Verbesserungen Δx und Δy der Näherungswerthe:

$$45)\ 0 = -\lambda - \Delta x \,.\, \cos\alpha + \Delta y \,.\, \sin\alpha;\ \ \lambda = (x) \cos\alpha - (c + (y)) \sin\alpha.$$

Der absolute Werth λ ist der Abstand des Punktes $((x), (y))$ von der Visur AP.

Die Gleichung 45) hat die Form der Gleichung 27); λ erscheint daher als Beobachtungsgrösse mit dem mittlern Fehler $\pm\, a \,.\, \omega$, wenn ω den

mittlern Fehler in α bezeichnet. Für die numerische Rechnung nimmt man das zu (x) und (y) gehörige (α) aus der Gleichung $tan\,(\alpha) = \frac{(x)}{c + (y)}$, setzt den Beobachtungswerth $\alpha = (\alpha) + \Delta\alpha$ und erhält einfacher

$$46)\; 0 = \Delta\alpha - \Delta x . \frac{cos\,(\alpha)}{(a)} + \Delta y . \frac{sin\,(\alpha)}{(a)}; \; (a) = (x)\,sin\,(\alpha) + (c + (y))\,cos\,(\alpha).$$

Setzt man hierin links anstatt Null $d\alpha$ als wahrscheinliche Verbesserung des Beobachtungswerthes, so ist es üblich, die entstehende Fehlergleichung noch mit der Wurzel des Gewichtes $\left(\text{proportional } \frac{1}{\omega}\right)$ zu multipliciren. Geschieht ein Gleiches für die zu Gleichung 45) gehörige Fehlergleichung, so nimmt diese selbstverständlich dieselbe Form an wie jene.

Wird P von B aus visirt, so erhält bei gleicher Anzahl Einstellungen wie vorher das entsprechende λ die mittlere Abweichung $\pm b . \omega$.

31.

Die Winkelmessung in P, $\varphi = \sphericalangle APB$, giebt für diesen Punkt einen kreisförmigen geometrischen Ort (Fig. 7.) mit dem Mittelpunkte M und der Gleichung

$$y^2 + (x - c . cot\,\varphi)^2 - \left(\frac{c}{sin\,\varphi}\right)^2 = 0, \text{ oder: } y^2 + x^2 - 2cx . cot\,\varphi - c^2 = 0.$$

Zu den Näherungswerthen (x), (y) gehört ein genäherter Werth (φ) nach der Gleichung

$$cot\,(\varphi) = \frac{(x)^2 + (y)^2 - c^2}{2c\,(x)}$$

und man erhält damit analog den Gleichungen 45) und 46) für die Verbesserungen Δy, Δx und $\Delta\varphi$

$$47)\; 0 = [(y)^2 + (x)^2 - 2c . (x)\,cot\,\varphi - c^2] + 2(y) . \Delta y + 2\,[(x) - c . cot(\varphi)] . \Delta x,$$

$$48)\; 0 = \Delta\varphi + \Delta x . \frac{(x) - c . cot\,(\varphi)}{c\,(x)}\, sin^2\,(\varphi) + \Delta y . \frac{(y)\,sin^2\,(\varphi)}{c\,(x)} .$$

Bedeutet (P) die genäherte Lage von P, so ist die erste Parenthese in Gleichung 47) soviel wie $\left(M\,(P)\right)^2 - Rad.^2$, $Radius = \frac{c}{sin\,\varphi}$.

Ist nun $\lambda = - M\,(P) + Rad.$,

also der Abstand des Punktes (P) von dem Kreise, der dem Winkel φ entspricht, so geht Gleichung 47) über in

$$49)\; 0 = -\lambda + \Delta x . \frac{(x) - c . cot\,(\varphi)}{c}\, sin\,(\varphi) + \Delta y . \frac{(y)}{c}\, sin\,(\varphi),$$

wie immer unter Vernachlässigung der Glieder Δ^2. Für diese Gleichung kann man noch setzen

$$0 = -\lambda - \Delta x . cos\,\gamma + \Delta y . sin\,\gamma,$$

um auf die Form 27 zu kommen. γ ist hierin der Neigungswinkel der-

jenigen Kreistangente TT gegen AB (Fig. 7.), welcher der Punkt (P) am nächsten liegt.

Zu der Beobachtungsgrösse λ gehört der mittlere Fehler

$$\pm \frac{(x)}{\sin\,(\varphi)} \cdot \omega = \pm \left(\frac{ab}{2c}\right) \cdot \omega,$$

wie die Differentiation des ersten Klammerausdruckes in Gleichung 47) lehrt.

Die Gleichungen 45) bis 49) lassen sich leicht für jedes beliebige Coordinatensystem transformiren und ebenso die Formeln für (α), (φ) u. s. f. zu leichter Berechnung der Coefficienten von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ umändern. Dieses bedarf hier keiner Ausführung weiter und es kann daher zur Vergleichung der Methoden 1. und 2. zurückgekehrt werden.

32.

Die mittlern parallelen Verschiebungen der den Visuren AP von A und B aus, sowie der Winkelmessung in P entsprechenden substituirten Geraden haben sich ergeben zu

$$50)\quad m_1 = \pm\, a\omega\,, \quad m_2 = \pm\, b\omega\,, \quad m_3 = \pm\, \frac{ab}{2c} \cdot \omega\,.$$

Solange daher P innerhalb des von den Punkten A und B aus als Mittelpunkten beschriebenen krummlinigen Rhombus AC_1C_2B (Fig. 7.) liegt, ist $m_3^2 < m_1^2$ und auch $m_3^2 < m_2^2$. Rückt P der Seite AB näher, sodass AP, BP und TT ziemlich gleiche Richtung annehmen, so wird für beide Visuren AP und BP zusammengenommen das mittlere Fehlerquadrat

$$m_3'^2 = 1 : \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \omega^2,$$

dagegen wird

$$m_3^2 = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} \cdot \omega^2, \text{ also } m_3'^2 = m_3^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2}\,.$$

Daher ist in diesem Falle sogar $m_3'^2$ immer grösser als m_3^2 und zwar ist der Unterschied beider am grössten für $a = b$, wo $m_3'^2 = 2m_3^2$ wird.

$a = 1$, $b = 3$ giebt $m_3'^2 = 1{,}6 \,.\, m_3^2$ und $a = 0$ giebt $m_3'^2 = m_3^2$.

Bedenkt man noch, dass m_3' aus 2 Winkelmessungen, m_3 aus nur einer solchen hervorgegangen ist, so kann man sagen:

„Weicht der Winkel φ mit dem Scheitel P nicht sehr von zwei Rechten ab, so ist die Winkelmessung in P zwei- bis viermal so günstig, als eine Winkelmessung in A oder B.“ Und hieraus folgt weiter:

„Liegt ein Nebenpunkt in der Nähe des Diagonalendurchschnitts eines von Hauptpunkten $A, B, \ldots$ gebildeten Vierecks, so bestimmt er sich 'bei gleicher Mühe' etwa drei- bis viermal so genau durch Winkelmessung in P als durch

solche von den Hauptpunkten (A, B, ...) aus, wenn man nur gegenüberliegende Hauptpunkte zusammen verbindet."

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen ist es wohl möglich, mehr als drei Hauptpunkte im Umkreise um P herum zu sehen; liegt aber P überhaupt im Innern eines Viereckes (Polygones), so lassen sich immer 4 (n Winkel) an P so auswählen und messen, dass ihre substituirten Geraden TT den Punkt P ebenso gut bestimmen, als n Visuren von den Ecken aus. Beobachtet man aber nur die vortheilhaftesten Winkel (also namentlich solche zwischen gegenüberliegenden Hauptpunkten), so ist im Allgemeinen — für gleiche Mühe — sogar die Genauigkeit eine zwei- bis vierfache von derjenigen, welche durch Eckvisuren erreicht werden kann.

Bewegt sich P in eine Polygonseite, d. h. kommen die Hauptpunkte scheinbar im Halbkreise um P herum zu liegen, so nimmt die Güte der Bestimmung nach der zweiten Methode ab; doch erst, wenn P aus dem Polygone heraustritt, kann sie unter diejenige der ersten Methode herabsinken und die Methode selbst unbrauchbar werden. Dieser Ausnahmefall tritt gewiss nicht ein, wenn — wie in Fig. 8. — P von den Ecken H_1 und H_n, deren Distanz $H_1 H_n$ von P aus unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint, mindestens ebenso weit entfernt ist, als von den andern Ecken H_2, .. H_{n-1} und gleichzeitig deren Abstände von P sehr verschieden sind.

Befindet sich P in sehr grosser Entfernung vom Polygone, so sind zwar alle Geraden TT, durch Winkelmessung in P bestimmt, viel ungenauer, als die Anschnitte von den Ecken aus, aber während diese nahezu dieselbe Richtung haben, schneiden sich die TT im Allgemeinen unter günstigen Winkeln. Daher kommt hier die zweite Methode in Vortheil.

Vorstehende Sätze, nicht gut anders als durch Induction zu beweisen, hier völlig zu begründen, kann nicht meine Aufgabe sein. Ich werde nur einige Beispiele, wo drei Hauptpunkte disponibel sind, specieller durchnehmen. Es ist dieses gerade derjenige Fall, wo die zweite Methode am unzuverlässigsten wird; doch tritt er in der Praxis nur äusserst selten ein. (So hat Herr Professor Nagel unter einem Complex von etwa 40 Nebenpunkten bei Zwickau — vergl. die Einleitung — nur einen einzigen derselben auf nur drei Hauptpunkte stützen können; sonst waren immer mindestens vier Hauptpunkte zu sehen.)

33.

Da einer guten Triangulation der Nebenpunkte immer eine Aufnahme derselben im Kleinen vorauszugehen hat, und man somit die Lage der Nebenpunkte gegen die sichtbaren Hauptpunkte kennt, kann der Fall, schliesslich für irgend einen der ersteren eine ungenügende Bestimmung

durchgeführt zu haben, nicht eintreten. Schon vor Beginn der Messungen wird man zu überlegen haben, welche Winkel für jeden Nebenpunkt zu messen sind, damit nach der Ausgleichung die Präcisionen H für alle beliebigen Richtungen durch einen Punkt möglichst gleich werden, damit aber auch der mittlere Fehler M, welcher die gegen die Hauptpunkte relative Gesammtgenauigkeit bezeichnet, für alle Nebenpunkte die gleiche Grösse erhält.

Diese Ueberlegung macht nicht sehr viele Mühe, da die strenge Erfüllung der soeben gestellten Forderungen nicht nöthig ist. In Abschnitt 23. ist auch gezeigt worden, welche Regeln man bei der Wahl der Schnitte selbst, sowie ihrer Präcisionen h zu befolgen hat, um die Forderungen zu erfüllen. Durch Uebung gelangt man bald dazu, in jedem Falle sofort aus der Anschauung der Figur die besten Schnitte zu erkennen und alsdann führt eine leichte Rechnung, unterstützt durch Constructionen, schnell zu den günstigsten Präcisionen derselben.

Soll nun M^2 für alle Nebenpunkte einen constanten Werth (M^2) erhalten, und entspricht den so gefundenen Präcisionen h vorerst ein Werth M^2, so hat man alsdann diese h noch im Verhältniss $(M):M$ zu verändern, indem die Relation besteht

$$M:(M) = (h):h\,.$$

Mittelst der (h) berechnet sich die Anzahl der Winkelmessungen. Für einen Schnitt von einem Hauptpunkte aus, z. B. für AP (Fig. 7.) fand sich $m_1{}^2 = a^2\,.\,\omega^2$, wo ω der mittlere Fehler der Winkelmessung — man nehme jetzt an: Einer Winkelmessung — ist.

Durch n_1 malige Messung geht $m_1{}^2$ über in

$$m_1{}^2 = a^2\,.\,\frac{\omega^2}{n_1}$$

und sofern $(h_1)^2 = \dfrac{1}{2m_1{}^2}$ ist, wird

$$n_1 = 2\,(h_1)^2\,.\,a^2\,\omega^2\,.$$

In gleicher Weise ist für die Winkelmessung in P

$m_3{}^2 = \left(\dfrac{ab}{2c}\right)^2.\,\omega^2$ bei einmaliger Messung, $m_3{}^2 = \left(\dfrac{ab}{2c}\right)^2.\,\dfrac{\omega^2}{n_3}$ bei $n_3$maliger Messung,

daher

$$n_3 = 2(h_3)^2\,.\,\left(\frac{ab}{2c}\right)^2.\,\omega^2.$$

Werden auch Richtungsbeobachtungen gemacht, so complicirt sich wenigstens für die zweite Methode die Schätzung der (h) etwas. Man verfährt bei derselben etwa so: Mit Hilfe der Formeln in Abschnitt 28. 2[b] *) berechnet man zuerst H für drei verschiedene Richtungen unter Annahme reiner Richtungsbeobachtungen. Hierzu nimmt man noch solche Winkel-

*) Man vergl. auch Abschn. 39. Anmerkung.

beobachtungen, dass dadurch alle H gleich werden, oder dieses doch möglichst erreicht wird. Das Verfahren hierbei ist genau wie oben, wo nur Winkelmessungen vorausgesetzt wurden, wenn man nämlich mit Hilfe der drei berechneten H die Lage der Ellipse um P, welche ihren wahrscheinlichen Fehlern entspricht, ermittelt. Nach Abschnitt 13. ist es alsdann erlaubt, für die Richtungsbeobachtungen zwei Gerade zu substituiren, die in die Ellipsenachsen fallen und deren wahrscheinliche parallele Verschiebungen der halben Länge dieser Achsen gleich sind.

34.

In Verfolgung der zu Ende von Abschnitt 23. gemachten Bemerkung mögen nun noch die Bedingungen für $M^2 = \text{Min.}$ „bei gleicher Mühe der Winkelmessung" aufgesucht werden. Ist p ein von h und n unabhängiger Coefficient, so existirt zwischen h und n, der Anzahl der Messungen, die Beziehung $h_\alpha^2 = \frac{n_\alpha}{p_\alpha^2}$. Der mittlere Fehler ω der einzelnen Messung ist dabei als constant angenommen. Hiermit reducirt sich die gestellte Aufgabe auf diejenige,

$$M^2 = \frac{\Sigma(h^2)}{2\Sigma\left(h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha-\gamma_\beta)\right)} = Min. \text{ zu machen, bei } \Sigma n = \Sigma h^2 p^2 = Const.$$

Eine ähnliche Rechnung wie in Abschnitt 23. giebt q Bedingungen von der Form

$$K \,.\, p_i^2 = \Sigma[h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha-\gamma_\beta)] - \Sigma(h^2) \,.\, \Sigma[h_\alpha^2 \sin^2(\gamma_i-\gamma_\alpha)],$$

wenn q die Anzahl der Geraden und K eine zu bestimmende Grösse ist.

Nennt man nun H_i die Präcision an der Stelle von h_i nach der Ausgleichung und hat N die frühere Bedeutung, so lässt sich auch sagen: „Es müssen für ein Min. im obigen Sinne die Werthe $K \,.\, N = \frac{1}{p_i^2}\left\{1-\frac{\Sigma(h^2)}{H_i^2}\right\}$ für alle i gleich werden." Da nun die p_i im Allgemeinen nicht gleich sind, so werden es auch die H_i nicht, und es ist dieses Grund genug, von der Erreichung eines solchen Min. abzusehen.

35.

Wird in einem Dreieck ABC, Fig. 9., der Punkt P nach der ersten Methode bestimmt, so sind die Quadrate der Präcisionen bei P für die drei Eckvisuren:

$$\text{für } AP.h_1^2 = \frac{n_1}{2a_1^2\omega^2}, \quad \text{für } BP.h_2^2 = \frac{n_2}{2a_2^2\omega^2}, \quad \text{für } CP.h_3^2 = \frac{n_3}{2a_3^2\omega^2},$$

wenn n_1, n_2, n_3 die Anzahl der Messungen der Winkel in P, a_1 a_2 a_3 resp. gleich AP, BP und CP sind, endlich ω den mittlern Fehler einer einzigen Winkelmessung darstellt.

Die Zwischenwinkel sind für
$(1.2) = \varphi_3 = \sphericalangle APB$; $(1.3) = \varphi_2 = \sphericalangle APC$; $(2.3) = \varphi_1 = \sphericalangle BPC$.
Daher ist

$$51)\left\{\begin{array}{l} M_1^2 = \frac{1}{4\omega^2} \cdot \left(\frac{n_1}{a_1^2} + \frac{n_2}{a_2^2} + \frac{n_3}{a_3^2}\right) N_1, \text{ wobei} \\ N_1 = 4\omega^4 : \left\{ \frac{n_1 n_2}{a_1^2 a_2^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_1 n_3}{a_1^2 a_3^2} \sin^2 \varphi_2 + \frac{n_2 n_3}{a_2^2 a_3^2} \sin^2 \varphi_1 \right\}. \end{array}\right.$$

Nach der Ausgleichung treten an die Stelle der $h_1\ h_2\ h_3$ die Werthe

$$52)\left\{\begin{array}{l} H_1^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left(\frac{n_2}{a_2^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_3}{a_3^2} \sin^2 \varphi_2 \right) \\ H_2^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left(\frac{n_1}{a_1^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_3}{a_3^2} \sin^2 \varphi_1 \right) \\ H_3^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left(\frac{n_1}{a_1^2} \sin^2 \varphi_2 + \frac{n_2}{a_2^2} \sin^2 \varphi_1 \right). \end{array}\right.$$

Beiläufig sei bemerkt: Die H werden unter Annahme von $n_1 = n_2 = n_3$ in demjenigen Punkte gleich, für welchen ist (Fig. 10.)

$$\frac{\sin^2 \varphi_3}{a_2^2} + \frac{\sin^2 \varphi_2}{a_3^2} = \frac{\sin^2 \varphi_3}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{a_3^2} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{a_2^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1}{(PB'')^2} + \frac{1}{(PC')^2} = \frac{1}{(PC'')^2} + \frac{1}{(PA')^2} = \frac{1}{(PA'')^2} + \frac{1}{(PB')^2},$$

wenn $A'AA''$ parallel $B''PC'$ und senkrecht AP ist, ebenso $B'BB''$ parallel $A'PC''$ und senkrecht BP, sowie $C'CC''$ parallel $B'PA''$ und senkrecht CP sind.

Die Messung der Winkel φ in P (2. Methode) giebt zur Bestimmung von P_3 kreisförmige geometrische Oerter, für welche die Geraden I., II., III. (Fig. 9.) substituirt werden können. Die Präcisionen derselben sind resp.

$$h_1'^2 = \frac{2c_1^2}{a_2^2 a_3^2} \cdot \frac{n_1'}{\omega^2}; \quad h_2'^2 = \frac{2c_2^2}{a_1^2 a_3^2} \cdot \frac{n_2'}{\omega^2}; \quad h_3'^2 = \frac{2c_3^2}{a_1^2 a_2^2} \cdot \frac{n_3'}{\omega^2};$$

ferner hat man für ihre Zwischenwinkel zu setzen (ohne Rücksicht auf den Quadranten)

$$\left.\begin{array}{l} (\text{I}.\text{II}) = \alpha_2 + \beta_1 = \varphi_3 - C, \\ (\text{I}.\text{III}) = \alpha_1 + \beta_3 = \varphi_2 - B, \\ (\text{II}.\text{III}) = \alpha_3 + \beta_2 = \varphi_1 - A, \end{array}\right\}$$

worin A, B, C die drei Dreieckswinkel bezeichnen und die α und β dieselbe Bedeutung wie in Fig. 9. haben.

Damit ergiebt sich weiter für die Präcisionen H und den mittlern Fehler M nach der Ausgleichung:

$$53)\left\{\begin{array}{l} M_2^2 = \frac{N_2}{(\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2} \cdot (a_1^2 c_1^2 n_1' + a_2^2 c_2^2 n_2' + a_3^2 c_3^2 n_3') \\ N_2 = \frac{(\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2 \cdot \omega^2}{4 n_1' n_2' n_3'} : \left(\frac{c_1^2 c_2^2}{a_3^2 n_3'} \cdot \sin^2(\varphi_3 - C) + \frac{c_1^2 c_3^2}{a_2^2 n_2'} \sin^2(\varphi_2 - B) \right. \\ \qquad \left. + \frac{c_2^2 c_3^2}{a_1^2 n_1'} \sin^2(\varphi_1 - A)\right). \end{array}\right.$$

$$54)\begin{cases} H_1'^2 = 1:2L_2 . \left(a_2^2 c_2^2 n_2' \sin^2(\varphi_3 - C) + a_3^2 c_3^2 n_3' \sin^2(\varphi^2 - B)\right) \\ H_2'^2 = 1:2L_2 . \left(a_1^2 c_1^2 n_1' \sin^2(\varphi_3 - C) + a_3^2 c_3^2 n_3' \sin^2(\varphi_1 - A)\right) \\ H_3'^2 = 1:2L_2 . \left(a_1^2 c_1^2 n_1' \sin^2(\varphi_2 - B) + a_2^2 c_2^2 n_2' \sin^2(\varphi_1 - A)\right), \end{cases} \text{ wobei}$$

$$L_2 = N_2 : (\omega . a_1 a_2 a_3)^2 \text{ ist*}).$$

36.

Das gleichseitige Dreieck.

1) Im Mittelpunkt desselben ist

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \frac{4}{3} c^2; \quad \varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1 = 120^0.$$

Indem man nun alle n einander gleich nimmt, werden

$$M_1^2 = \frac{\Sigma n}{4\omega^2 a^2} . N_1; \; N_1 = \frac{16}{9} . \frac{\omega^4 a^4}{n^2} = \frac{16\omega^4 a^4}{(\Sigma n)^2} \text{ also auch } M_1^2 = \frac{16}{3} . \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n},$$

wobei $\Sigma n = 3n$ ist. Ferner werden für alle Richtungen die H gleich, $H^2 = 1 : M_1^2$.

---

*) Diese Formeln gestatten indess noch eine weitere Zusammenziehung. Mit Hilfe der Figur sieht man nämlich ein, dass

$$\frac{4c_1 c_2}{a_3} \sin(\varphi_3 - C) = \frac{4c_1 c_2}{a_3} \sin(\alpha_2 + \beta_1) = \frac{2c_1 \sin\alpha_2 \, 2c_2 \cos\beta_1 + 2c_1 \cos\alpha_2 \, 2c_2 \sin\beta_1}{a_3}$$
$$= \sin\varphi_1 (a_1 - a_3 \cos\varphi_2) + \sin\varphi_2 (a_2 - a_3 \cos\varphi_1)$$
$$= a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2 + a_3 \sin\varphi_3 = \Sigma(a \sin\varphi).$$

Daher ist

$$\left(\frac{c_1 c_2}{a_3}\right)^2 \sin^2(\varphi_3 - C) = \left(\frac{c_1 c_3}{a_2}\right)^2 \sin^2(\varphi_2 - B) = \left(\frac{c_2 c_3}{a_1}\right)^2 \sin^2(\varphi_1 - A) = \frac{1}{16} \Sigma^2(a \sin\varphi)$$

und hiermit werden

$$53^*) \; N_2 = \frac{4\omega^2.(\omega.a_1 a_2 a_3)^2}{\Sigma^2 (a \sin\varphi)} : (n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3'),$$

$$54^*)\begin{cases} H_1'^2 = 8c_1^2 : L_2 a_2^2 a_3^2 . \Sigma^2(a \sin\varphi) . (n_2' + n_3') = \dfrac{2(n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3')}{(\omega . a_1 a_2 a_3)^2} . \dfrac{a_1^2 c_1^2}{n_2' + n_3'}, \\ H_2'^2 = 8c_2^2 : L_2 a_1^2 a_3^2 . \Sigma^2(a \sin\varphi) . (n_1' + n_3') = \quad \div \quad . \dfrac{a_2^2 c_2^2}{n_1' + n_3'}, \\ H_3'^2 = 8c_3^2 : L_2 a_1^2 . a_2^2 . \Sigma^2(a \sin\varphi) . (n_1' + n_2') = \quad \div \quad . \dfrac{a_3^2 c_3^2}{n_1' + n_2'}. \end{cases}$$

Die H' werden unter Annahme gleicher Beobachtungszahlen n in demjenigen Punkte alle gleich, wo $a_1 c_1 = a_2 c_2 = a_3 c_3$ oder $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \frac{1}{c_3}$, so dass sich nach den Proportionen

$$a_1 : a_2 = c_2 : c_1, \quad a_1 : a_3 = c_3 : c_1, \quad a_2 : a_3 = c_3 : c_2$$

die Lage des Punktes leicht ermitteln lässt. Halbirt man nämlich im Dreieck ABC jeden der 3 Winkel, so theilen die Halbirungslinien derselben die Seiten in demselben Verhältnisse, in welchem die Längen der resp. anliegenden Seiten stehen. Durch je einen Theilpunkt und die der betreffenden Seite gegenüberliegende Ecke lässt sich nun ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt auf dieser Seite liegt. Der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kreise ist sodann der gesuchte Punkt (in Fig. 14. 15. und 17. mit P_0 bezeichnet).

Weiter hat man

$M_2^2 = \frac{c^2 . \Sigma n'}{\omega^2 a^4} . N_2$; $N_2 = \frac{\omega^4 a^8}{c^4 . (\Sigma n')^2}$, also $M_2^2 = \frac{16}{9} . \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n'}$, $\Sigma n' = 3n' = \Sigma n$.

Ebenso wie alle H werden auch sämmtliche H' gleich, $H'^2 = 1 : M_2^2$.

2) In der Mitte einer Seite, etwa BC, ist

$$a_1^2 = 3c^2, \quad a_2 = a_3 = c,$$
$$\varphi_1 = 180^0, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = 90^0$$
$$\varphi_3 - C = \varphi_2 - B = 30^0; \quad \varphi_1 - A = 120^0.$$

Auch sieht man, dass $n_2 = n_3$, $n_2' = n_3'$ zu nehmen sind. Damit wird:

$$M_1^2 = \frac{n_1 + 6n_2}{12\omega^2 c^2} . N_1; \quad N_1 = \frac{6\omega^4 c^4}{n_1 n_2}; \quad H_1^2 = \frac{n_1}{6\omega^2 c^2}; \quad H_2^2 = H_3^2 = \frac{n_2}{\omega^2 c^2}$$

$$M_2^2 = \frac{3n_1' + 2n_2'}{3\omega^2 c^2} . N_2; \quad N_2 = \frac{3\omega^4 c^4}{(2n_1' + n_2') n_2'}; \quad H_1'^2 = \frac{3\omega^2 c^2}{n_2' . N_2};$$

$$H_2'^2 = H_3'^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{(n_1' + n_2') N_2}.$$

Nimmt man noch $n_1 = n_2 = n_3$; $n_1' = n_2' = n_3'$, $\Sigma n = \Sigma n'$, so wird abgekürzt

$M_1^2 = 10{,}5 . \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}$; $M_2^2 = 5{,}0 . \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n'}$; die H sind dabei wie auch die H' sehr ungleich.

Damit M_1^2 so klein wie für den Mittelpunkt des Dreiecks werde, hat man etwa doppelt soviel zu messen, wie dort; für M_2^2 würde man etwa dreimal soviel Messungen zu machen haben.

Nimmt man $n_1 = 6n_2 = 6n_3$, so werden alle H gleich, nämlich:

$\Sigma n = 8n_2$; $M_1^2 = \frac{1}{H^2} = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}$, also M_1^2 bei gleicher Mühe etwas kleiner wie vorher.

Möglichste Gleichheit der H' erreicht man durch Annahme von $n_1' = 0$; nämlich:

$$H_1'^2 = \frac{3\omega^2 c^2}{n_2' . N_2}; \quad H_2'^2 = H_3'^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{n_2' . N_2}, \quad N_2 = \frac{3\omega^4 c^4}{n_2' n_2'}; \quad \text{ferner wird}$$

$\Sigma n' = 2n_2'$; also $M_2^2 = \frac{4c^2 \omega^2}{\Sigma n'}$ d. i. nur halb so gross, wie M_1^2.

„Die zweite Methode ist also für Punkte in der Mitte der Seiten günstiger als die erste, $M_2^2 = \frac{M_1^2}{2}$. Macht man die H resp. H' möglichst gleich, so erlangt man die gleiche Genauigkeit mit weniger Mühe, als wenn ohne Rücksicht darauf alle n einfach gleich genommen werden."

3) Rückt P einer Ecke, etwa A, in einer Seite, etwa AB, immer näher, so ist es erlaubt, bei kleinen a_1 näherungsweise zu setzen: (Fig. 11.)

$$a_2 = a_3 = 2c; \quad \varphi_1 = 60^0, \quad \varphi_2 = 120^0, \quad \varphi_3 = 180^0;$$

$\varphi_3 - C = 120^0$; $\varphi_2 - B = 60^0$; $\varphi_1 - A$ wird sehr klein, $sin^2 = \frac{3}{16} . \frac{a_1^2}{c^2}$.

Die Werthe φ_1, φ_2, $\varphi_2 - B$ sind zwar wenig anders als hier angegeben, aber da keiner der Sinus dieser Winkel der Null nahe ist, verschwindet der Einfluss der kleinen Aenderungen.

Es wird damit

$$M_1^2 = \frac{1}{4\omega^2} \cdot \left(\frac{n_1}{a_1^2} + \frac{n_2 + n_3}{4c^2}\right) N_1; \; N_1 = \frac{256\omega^4 c^4 a_1^2}{3n_3 (4n_1 c^2 + n_2 a_1^2)},$$

$$H_1^2 \text{ oder } H_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3n_3 N_1}; \quad H_3^2 = \frac{32\omega^2 c^2 a_1^2}{3(4n_1 c^2 + n_2 a_1^2) N_1}.$$

Gleichheit aller H ist nicht möglich, da alle drei Visuren in einem spitzen Winkelraum liegen; sie wird möglichst erreicht mit $n_2 = 0$ und $n_3 = n_1 \cdot \frac{4c^2}{a_1^2}$, das giebt

$$H_1^2 \text{ oder } H_2^2 = H_3^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3n_3 N_1}, \; N_1 = \frac{256\omega^4 c^4}{3n_3 n_3}; \; M_1^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3 n_3} \text{ oder, da}$$

$$\Sigma n = n_1 + n_1 \cdot \frac{4c^2}{a_1^2} \text{ d. i. nahezu } \Sigma n = n_3, \text{ auch } M_1^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}.$$

Bei Gleichheit aller n $n_1 = n_2 = n_3$ ist dagegen $M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2}{\Sigma n}$ mit Vernachlässigung der kleinen Glieder.

Es ist sonach räthlich, die n wie vorher zu nehmen; gegen die Lage von P im Dreiecksmittelpunkt hat man sodann immer noch doppelte Arbeit, um ein gleich grosses M zu erhalten.

Weiter findet sich (Fig. 11.)

$$M_2^2 = L_2 \left(a_1^2 c^2 n_1' + 4c^4 (n_2' + n_3')\right); \quad L_2 = \frac{4\omega^2}{3c^2} : (n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3')$$

$$H_1'^2 = 1 : 6L_2 c^4 (n_2' + n_3'); \; H_2'^2 = 1 : \frac{3}{2} L_2 c^2 a_1^2 (n_1' + n_3')$$

$$\text{und } H_3'^2 = 1 : \frac{3}{2} L_2 c^2 a_1^2 (n_1' + n_2').$$

Gleichheit der H' ist nicht erreichbar *); möglichst angestrebt wird sie durch Annahme von $n_2' = n_3'$ und $n_1' = n_2' \cdot \frac{8c^2 - a_1^2}{a_1^2}$, womit Σn nahezu $= n_1'$ und

$$M_2^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\omega^2 a_1^2}{n_2'} = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}.$$

Dagegen wird bei $n_1' = n_2' = n_3'$ $M^2_2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}$ d. i. so wie vorher, nur sind die H' noch verschiedener als vorher, da nicht einmal H_1' und H_2' (oder H_3') gleich werden.

Auch für die jetzt behandelte Lage von P ist somit $M_1^2 \geqq M_2^2$.

---

*) Da die Rechnung nur näherungsweise richtig ist, kann es nicht befremden, dass trotz Gleichheit dreier H' doch nicht dieselbe aller beliebigen H' stattfindet; H_2' und H_3' sind Präcisionen für nahezu dieselbe Richtung.

4) **Rückt** P der Ecke A auf der Winkelhalbirungslinie **näher**, und wird daher a_1 wieder sehr klein, so gilt folgende Näherungsrechnung: (Fig. 12.)

$a_2 = a_3 = 2c$; $\varphi_1 = 60^0$; $\varphi_2 = \varphi_3 = 150^0$

$$\varphi_3 - C = 90^0 = \varphi_2 - B; \quad \varphi_1 - A \text{ sehr klein}, \; sin^2 = \frac{a_1^2}{4c^2}.$$

Für $n_2 = n_3$ gehen über M_1^2, N_1 u. s. w. in

$$M_1^2 = \frac{4n_1 c^2 + 2n_2 a_1^2}{16\omega^2 a_1^2 c^2} \cdot N_1; \; N_1 = \frac{256}{n_2} \cdot \frac{c^4 a_1^2 \omega^2}{8n_1 c^2 + 3n_2 a_1^2},$$

$$H_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2}{n_2 N_1}; \; H_2^2 = H_3^2 = \frac{32 a_1^2 c^2 \omega^2}{(4c^2 n_1 + 3n_2 a_1^2) N_1}.$$

Möglichst gleiche H giebt $n_1 = 0$ und wird dabei, weil $\Sigma n = n_2 + n_3$,

$$M_1^2 = \frac{64\omega^2 c^2}{3\Sigma n}.$$

Dagegen ist für $n_1 = n_2 = n_3$ $\Sigma n = 3n$ und mit Vernachlässigung kleiner Glieder $M_1^2 = \frac{24\omega^2 c^2}{\Sigma n}$, also wenig anders.

Weiter findet sich bei $n_2' = n_3'$

$$M_2^2 = L_2 (a_1^2 c^2 n_1' + 8c^4 n_2'); \; L_2 = \omega^2 : c^2 (2n_1' + n_2') n_2',$$

$$H_1'^2 = 1 : 16 L_2 c^4 n_2'; \; H_2'^2 = H_3'^2 = 1 : 2L_2 a_1^2 c^2 (n_1' + n_2').$$

Gleichheit aller H' verlangt $n_1' = n_2' \cdot \frac{8c^2 - a_1^2}{a_1^2}$, womit nahe $\Sigma n = n_1'$ und $M_2^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}$.

Dagegen ist bei $n_1 = n_2 = n_3$ $M_2^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}$, d. i. nicht ungünstiger als vorher; nur sind hier die H sehr ungleich.

Stellt man zusammen, was in 1) bis 4) gefunden wurde, so hat man:

„Bei gleicher Mühe ($\Sigma n = Const.$) werden die Coefficienten von $\frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}$, entsprechend den M_1^2 und M_2^2:

	M_1^2	M_2^2		M_1^2	M_2^2	
	bei Gleichheit aller n			bei ungleichen n		
1) Dreiecksmitte	5,3	1,8	Alle H gleich. Alle H' gleich.	5,3	1,8	Alle H und alle H' gleich.
2) Seitenmitte	10,5	5,0	Ungleiche H; Ungleiche H'.	8.	4.	Gleiche H; möglichst gleiche H'.
3) In der Seite nahe der Ecke	16.	10,7		10,7	10,7	Möglichst gleiche H; ebenso H'.
4) Nahe der Ecke in der Winkelhalbirungslinie.	24.	8.		21,3	8.	Mögl. gleiche H; gleiche H'.

Diese Tabelle zeigt 1) den besondern Vortheil, den die zweite Methode innerhalb des Dreiecks gewährt, 2) wie ausserordentlich verschiedene M man durch gleiche Mühe bei verschiedenen Punktlagen erhält.

5) Liegt P ausserhalb des Dreiecks im rückwärtsverlängerten Winkelraum (etwa für $\sphericalangle BAC$), so gelten bei grösserer Nähe an A die Verhältnisse wie unter 3) und 4).

Geht man in grössere Entfernung von A, so werden M_1 und M_2 nach und nach immer mehr einander gleich; während sich nun bei Anwendung der zweiten Methode alle H' gleich machen lassen, ist dieses für die H nach der ersten Methode ganz unmöglich.

Wird die Entfernung $AP = e$ sehr gross, so entstehen Schnittfiguren, wie für P_2 in Fig. 11. und 12.

Eine leichte Rechnung giebt näherungsweise unter Annahme eines sehr grossen e

zu Fig. 11.
$$\begin{cases} M_1^2 = \dfrac{4\omega^2 . e^4}{3c^2 . \Sigma n}, & \text{wenn } \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3,\ n_1 = n_2 \text{ und } n_3 = 2n_1, \\ M_2^2 = \dfrac{\omega^2 . e^4}{c^2 . \Sigma n'}, & \text{wenn } \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3,\ n_1' = n_2' = n_3' \text{ ange-} \end{cases}$$
nommen werden.

Ferner ist

zu Fig. 12.
$$\begin{cases} M_1^2 = \dfrac{\omega^2 . e^4}{c^2 . \Sigma n}, & \Sigma n = n_2 + n_3,\ n_1 = 0,\ n_2 = n_3; \\ M_2^2 = \dfrac{\omega^2 . e^4}{c^2 . \Sigma n'}, & \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3,\ n_1' = n_2' = n_3' \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

Während die Gleichheit der M für beide Methoden für grosse Entfernungen des Punktes P vom Dreieck hiermit bewiesen ist, zeigt die Figur unmittelbar, dass die erste Methode sehr ungleiche, die zweite Methode aber gleiche H ergiebt.

6) Liegt P im offenen Winkelraum BAC, Fig. 13., so ist die zweite Methode unbrauchbar und nur bei grösserer Entfernung des Punktes vom Dreiecke kann sie der ersten Methode gleichgestellt werden. Für sehr grosse Entfernungen erhält man Resultate, wie soeben unter 5) gefunden wurden. Am ungünstigsten sind die Lagen P_2 in der Winkelhalbirungslinie. Je seitlicher bei gleichem Abstande von CB P_1 rückt, um so besser bestimmt es sich nach der zweiten Methode.

Für P_2, wo Dreieck ABC congruent Dreieck P_2BC ist, hat man

$a_2^2 = a_3^2 = 4c^2$; $a_1^2 = 12c^2$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 30^0$, $\varphi_1 = 300^0$; $\varphi_3 - C = \varphi_3 - B = 30^0$
$\varphi_1 - A = 240^0$.

$$M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1 + 6n_2)}{2n_1 n_2 + 9n_2 n_2} \text{ für } n_2 = n_3;\ \Sigma n = n_1 + 2n_2;$$

$$M_2^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (3n_1' + 2n_2')}{2n_1' n_2' + n_2' n_2'} \text{ bei } n_2' = n_3';\ \Sigma n = n_1' + 2n_2'.$$

Möglichste Gleichheit der Präcisionen H resp. H' verlangt $n_1 = 0$, $n_1' = 0$. In jedem Falle aber ist bei gleicher Mühe M_2^2 etwa $3 . M_1^2$.

Damit ist erwiesen, dass Lagen P ausserhalb des Dreiecks sich im Allgemeinen nach der ersten Methode besser als nach der zweiten Methode bestimmen. In der Praxis kommen indess solche Lagen kaum vor, da von einem Punkt ausserhalb des Dreiecks ABC andere nahe Hauptpunkte D, E, F etc. sichtbar werden.

37.

Was im Vorhergehenden für das gleichseitige Dreieck gefunden wurde, gilt auch für das ungleichseitige, so lange dieses nicht sehr spitze oder stumpfe Winkel enthält. Der günstige Raum für die zweite Methode verschiebt sich dann, wie es die schraffirten Flächen in Fig. 14. und 15. ungefähr andeuten. Sehr stumpfe Dreiecke sind am ungünstigsten; daher möge der Fall dreier Punkte in einer Geraden (Fig. 16. und 17.) bei Gleichheit der Längen BA und $AC = 2c$ besondere Beachtung finden. Im Anschluss an Fig. 16. hat man:

1. Lage von P in D. $a_2^2 = a_3^2 = 8c^2$; $a_1^2 = 4c^2$; $n_2 = n_3$

$$c_1^2 = 4c^2; \quad c_2 = c_3 = c; \quad n_2' = n_3'$$

$$\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_2 = \varphi_2 - B = 45^0; \quad \varphi_1 = \varphi_1 - A = 90^0.$$

$$M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1 + n_2)}{2n_1 n_2 + n_2 n_2} \text{ und } M_2^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1' + n_2')}{2n_1' n_2' + n_2' n_2'}.$$

Beide Werthe werden gleich für $n_1 = n_1'$, $n_2 = n_2'$; $n_3 = n_3'$.

Gleichheit der H resp. H' verlangt $\underline{n_1 = 0 = n_1'}$, $\underline{n_2 = n_3}$; $\underline{n_2' = n_3'}$; damit wird

$$\underline{M_1^2 = M_2^2} = \frac{1}{H^2} = \frac{1}{H'^2} = \underline{32 . \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}}, \quad \Sigma n = 2n = 2n'.$$

Bei Gleicheit aller $n = n'$ ist der Betrag für M_1^2 und M_2^2 derselbe.

2. Lage P in D_1, wo D_1 sehr nahe an A in der Linie DA liegt. Man erhält näherungsweise:

$$a_1 \text{ sehr klein}, \quad a_2^2 = a_3^2 = 4c^2; \quad n_2 = n_3; \quad n_2' = n_3'$$

$$\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_2 = \varphi_2 - B = 90^0; \quad \sin^2 \varphi_1 = \sin^2 (\varphi_1 - A) = \frac{a_1^2}{c^2}$$

$$M_1^2 = \frac{8\omega^2 c^4 (2c^2 n_1 + n_2 a_1^2)}{8n_1 n_2 c^4 + n_2 n_2 . a_1^4}; \quad M_2^2 = \frac{\omega^2 (2c^2 n_2' + a_1^2 n_1')}{2n_2' n_1' + n_2' n_2'}.$$

$\underline{n_1 = n_2 = n_3}$; $\underline{n_1' = n_2' = n_3'}$ geben (mit Vernachlässigung kleiner Glieder)

$$\underline{M_1^2 = \frac{6\omega^2 c^2}{\Sigma n}}; \quad \underline{M_2^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{\Sigma n'}}.$$

Die Präcisionen sind aber dabei sehr ungleich nach verschiedenen Richtungen. Die H und resp. die H' werden gleich, wie auch der Anblick der Figur lehrt, für

$$2c^2 n_1 = n_2 a_1^2, \quad 2c^2 n_2' = n_1' a_1^2,$$

also nahezu

$$\Sigma n = 2n_2 \qquad \Sigma n' = n_1', \qquad \text{und das giebt}$$

$$M_1^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}; \quad M_2^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{\Sigma n'}.$$

3. Lage P in D_2 nahe an B, wobei jedoch $D_2 B$ senkrecht CB sein mag. (Fig. 16.)

$$a_1^2 = 4c^2, \; a_3^2 = 16c^2; \; a_2 \text{ sehr klein}$$

$$\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_1 = \varphi_1 - A = 90^0; \; \sin^2 \varphi_2 = \sin^2(\varphi_2 - A) = \frac{a_2^2}{16c^2}.$$

$$\left.\begin{aligned} M_1^2 &= \frac{64\omega^2 c^4 . (16c^2 n_2 + 4a_2^2 n_1 + a_2^2 n_3)}{256 n_1 n_2 c^4 + n_1 n_3 a_2^4 + 64 n_2 n_3 c^4} \\ M_2^2 &= \frac{\omega^2 c^2 . (16c^2 n_1' + a_2^2 n_2' + 16c^2 n_3')}{n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3'} \end{aligned}\right\};$$

hierbei sind die H resp. H' ungleich, wenn man alle n gleich gross nimmt.

Man erhält im letztern Falle $M_1^2 = \frac{48\omega^2 c^2}{5\Sigma n}$, $M_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{\Sigma n}$; $\Sigma n = 3n = 3n'$.

Giebt man den Visuren von A und C aus gleichen Einfluss, setzt $n_3 = 4n_1$, so wird $M_1^2 = \frac{128\omega^2 c^4 (2c^2 n_2 + n_1 a_2^2)}{128 n_1 n_2 c^4 + n_1^2 a_2^4}$.

Gleichheit der H verlangt $2c^2 n_2 = n_1 a_2^2$ und damit geht M_1^2 über in $\frac{20\omega^2 c^2}{\Sigma n}$, wenn man setzt

$$\Sigma n = n_1 + \frac{n_1 a_2}{2c^2} + 4n_1 = 5n_1 \text{ nahezu.}$$

Daher ist es nicht rationell, den beiden erwähnten Visuren gleichen Einfluss zu geben. Besser ist es, $n_3 = 0$, sowie wegen Gleichheit der H $4c^2 n_2 = n_1 a_2^2$ zu nehmen:

$$M_1^2 = \frac{8c^2 \omega^2}{n_1} = \frac{8c^2 \omega^2}{\Sigma n}, \text{ da } \Sigma n = n_1 + n_1 . \frac{a_2^2}{4c^2 n_2} \text{ also nahezu gleich } n_1 \text{ ist.}$$

Nimmt man ferner $n_1' = n_3'$, wodurch I. und III. gleichen Einfluss erlangen, so wird

$$M_2^2 = \frac{\omega^2 c^2 . (32c^2 n_1' + a_2^2 n_2')}{2n_2' n_1' + n_1' n_1'}.$$

Gleichheit der H' tritt ein bei $32c^2 n_1' = a_2^2 n_2'$; dafür geht Σn über in nahezu n_2', und also M_2^2 in $\quad M_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{\Sigma n'}$.

Mit Hilfe der jetzt gewonnenen Formeln und der Figur 16. lässt sich der Satz aussprechen: „Solange P innerhalb des schraffirten Raumes in Figur 17. liegt, ist die zweite Methode ebenso gut und etwas besser als die erste Methode; in jedem andern Falle ist sie weniger genau als diese."

38.

Man wird schon im Vorhergehenden die Bemerkung gemacht haben, dass eine Combination beider Methoden, also die Anwendung der dritten

Methode, zuweilen vortheilhaft sein muss. Es fragt sich nur, ob dieses häufig vorkommen kann.

Hat man nur zwei Hauptpunkte A und B (Fig. 18.), so ist die dritte Methode so lange vorzüglich, als P ausserhalb des Halbkreises über AB liegt und dabei wenigstens einer der Aussenwinkel des Dreiecks ABP bei A oder B nicht viel kleiner als 90^0 ist. Im gleichseitigen Dreieck ABP werden alle Präcisionen H für P gleich, sobald man jeden Winkel gleich oft beobachtet.

Die Winkelmessung bei P wird wegzulassen sein, wenn P innerhalb des Halbkreises über AB zu liegen kommt. Entfernt sich P vom Halbkreise und rückt AB näher, so wird die Bestimmung unzureichend. (Vergl. P_1 in Fig. 18.)

Man erkennt nun leicht, dass für eine Einschaltungstriangulirung die dritte Methode, sofern sie nur zwei Hauptpunkte als Ausgang nimmt, nicht so günstig ist wie die beiden ersten Methoden; denn alle Lagen von P, welche der dritten Methode günstig sind, werden die Benutzung noch eines dritten Punktes, ja meistens noch mehrerer Punkte gestatten, wodurch man bei gleicher Mühe der Winkelmessung, ohne die sämmtlichen in Abschnitt 27. angegebenen Uebelstände überwinden zu müssen — sowohl die der ersten als die der zweiten Methode — mindestens dieselbe Genauigkeit erhalten kann.

Auch darf man nicht vergessen, dass die beiden ersten Methoden ein von den zufälligen Fehlern der Hauptpunkte freieres Resultat geben, als die dritte Methode, die offenbar den ganzen Fehler der zwei Hauptpunkte in den Nebenpunkt überträgt.

Denkt man sich die dritte Methode als reine Combination der beiden andern und vergleicht die Resultate „gleicher Mühe", so ist wohl immer die zweite Methode vorzuziehen, nicht nur in praktischer, sondern auch in theoretischer Hinsicht; wie daraus hervorgeht, dass die erste Methode in den praktisch vorkommenden Fällen von Einschaltungen ungünstiger als die zweite ist. Diejenige Arbeit bei Anwendung der dritten Methode, welche der ersten Methode entspricht, drückt die Genauigkeit offenbar herab gegenüber der zweiten Methode, welche die ganze Arbeit am günstigsten verwendet.

39.

Die theoretische Vergleichung wurde unter der Annahme von Winkelbeobachtungen geführt. Es ist nun schon früher gefunden worden, dass die erste Methode ebenso wie die zweite sich etwas günstiger zeigt für reine Richtungsbeobachtungen, dass zu diesen aber, um eine gleichmässige Genauigkeit für jeden einzelnen Punkt P sowohl als auch vergleichsweise für verschiedene Punkte P zu erhalten, immer Winkelbeobachtungen zur Ergänzung zugezogen werden müssen.

Es ist nun von Interesse zu sehen, wie bei 3 Hauptpunkten sich die H unter Annahme reiner Richtungsbeobachtungen gestalten.

Die Formeln aus Abschnitt 28. 2b geben, sofern das System 42) sich reducirt auf

$$(1)-(2)=A_2+B_2\,x+C_2 y$$
$$(1)-(3)=A_3+B_3\,x+C_3 y$$

und man einen Hilfswerth $(2)-(3)=(A_3-A_2)+(B_3-B_2)\,x+(C_3-C_2)\,y$
$$= \quad A_1 \quad + \quad B_1 x \quad + C_1 y$$
einführt:

$$\left\{\begin{array}{l} H_y^2=1:N\,.\,\dfrac{B_1^2+B_2^2+B_3^2}{3}\,;\; H_x^2=1:N\,.\,\dfrac{C_1^2+C_2^2+C_3^2}{3}\,,\\ (1:N)=\left\{\dfrac{B_1^2+B_2^2+B_3^2}{3}\,.\,\dfrac{C_1^2+C_2^2+C_3^2}{3}-\left(\dfrac{B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3}{3}\right)^2\right\}\\ M^2=\dfrac{1}{2}\,.\,N\,.\left\{\dfrac{B_1^2+B_2^2+B_3^2}{3}+\dfrac{C_1^2+C_2^2+C_3^2}{3}\right\};\quad h=1 \text{ gesetzt.}\end{array}\right.$$

Dieselben Werthe würde man erhalten durch $\frac{2}{3}$malige Messung jedes der drei Winkel an P*), wenn einer Einstellung die Präcision $h=1$ ebenso wie oben zukommt. Die Fehlergleichungen werden nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} (1\,.\,2)\sqrt{\tfrac{1}{3}}=A_2\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}+B_2\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,x+C_2\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,y\\ (1\,.\,3)\sqrt{\tfrac{1}{3}}=A_3\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}+B_3\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,x+C_3\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,y\\ (2\,.\,3)\sqrt{\tfrac{1}{3}}=A_1\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}+B_1\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,x+C_1\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,.\,y\end{array}\right.$$

und daraus folgt z. B.

$$H_y^2=1:N'\,.\,\frac{1}{3}\sum_1^3(BB),\quad N'=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left\{\Sigma(BB)\,.\,\Sigma(CC)-(\Sigma BC)^2\right\};$$

d.i. wie oben.

Hiernach giebt die Anzahl von $6\,.\,\frac{2}{3}$ Einstellungen bei Winkelbeobachtungen genau so viel Genauigkeit als 3 Einstellungen bei Richtungsbeobachtungen. Dieses etwas befremdende Resultat kann etwas strenger auch wie folgt abgeleitet werden im Anschluss an Abschnitt 25.

*) Ebenso leicht findet man, dass ein Satz reiner Richtungsbeobachtungen zwischen q Hauptpunkten H und M ebenso ergiebt wie die $\frac{2}{q}$ malige Messung aller der $\frac{q\,(q-1)}{2}$ möglichen Winkel zwischen diesen q Hauptpunkten, dass daher bei dieser Art Winkelmessungen $2(q-1)$ Einstellungen Dasselbe leisten als q Einstellungen bei Richtungsbeobachtungen. Diese Beziehung gilt überdies ganz allgemein für Winkel- und Richtungsbeobachtungen von einem Punkte aus.

Aus den Gleichungen $\left\{\begin{matrix}(1)-(2)=A_2+B_2\,x+C_2\,y\\(1)-(3)=A_3+B_3\,x+C_3\,y\end{matrix}\right\}$ erhält man die wahrscheinlichsten Werthe x, y für $(1)=(2)=(3)=0$ und es ist überhaupt von einer Ausgleichung nicht die Rede (wesshalb die Ableitung der H und M aus den allgemeinen Formeln vorhin nicht streng richtig war). Dem Fehlersystem u und v für x und y mögen Richtungsfehler (1), (2) und (3) entsprechen, wo

$$(1)-(2)=B_2u+C_2v \quad (1)-(3)=B_3u+C_3v.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist dabei

$$W_1=\varkappa_1\,.\,e^{-\left[(1)^2+(2)^2+(3)^2\right]}$$

$$=\varkappa_1\,.\,e^{-\left[3\,(1)^2-2\,(1)\,(B_2u+B_3u+C_2v+C_3v)+(B_2u+C_2v)^2+(B_3u+C_3v)^2\right]}.$$

Oder für $(2)-(3)=B_1\,u+C_1\,v$

$$W_1=\varkappa_1\,.\,e^{-\left\{3\left[(1)-\frac{B_2u+B_3u+C_2v+C_3v}{3}\right]^2+\right.}$$

$$\left.+\frac{(B_1u+C_1v)^2+(B_2u+C_2v)^2+(B_3u+C_3v)^2}{3}\right\}.$$

Lässt man nun (1) für ein constantes System u, v alle möglichen Werthe durchlaufen, so wird

$$W_1=W_{u,v}=\varkappa_2\,.\,e^{-\frac{1}{3}\left((B_1u+C_1v)^2+(B_2u+C_2v)^2+(B_3u+C_3v)^2\right)}.$$

Construirt man hierzu die Ellipsen wie früher, so erhalten diese gleiche Lage und Grösse mit den entsprechenden Ellipsen, welche sich durch $\frac{2}{3}$-malige Messung der drei Winkel ergeben würden.

IV.

Die mathematische Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf Conductoren im Allgemeinen und speciell auf gewisse Systeme von Conductoren, die von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe begrenzt sind,

von

TH. KÖTTERITZSCH.

---

§ 1.

Bekannte Sätze der Potentialtheorie.

1) Ist eine gewisse Elektricitätsmenge*) über ein beliebiges System von Conductoren vertheilt, so nimmt dieselbe, für den Zustand des Gleichgewichtes, eine solche Anordnung an, dass ihr Potential für alle Punkte im Innern und auf der Oberfläche eines und desselben Conductors einen constanten Werth hat.

Die Dichtheit**) der Elektricität in Punkten, die zur innern Masse eines Conductors gehören, ist stets gleich Null; oder die Elektricität verbreitet sich nur auf den Oberflächen der Conductoren.

2) Werden die einzelnen Conductoren eines in beliebiger, aber unveränderter, relativer Lage gegeneinander verharrenden Conductorensystems mit beliebigen Elektricitätsmengen geladen, so giebt es nur eine, aber auch stets eine Art, nach der die Anordnung der Elektricität stattfindet. Zugleich befindet sich dann die Elektricität im Zustande des stabilen Gleichgewichtes.

---

*) Gemessen nach absolutem Maasse.

**) Der Ausdruck „Dichtheit der Elektricität an einem Punkte" definirt sich am einfachsten durch den Specialfall, dass, wenn auf einer Kugel vom Radius $= 1$, die Elektricitätsmenge Q sich befindet, die Dichtheit der gleichförmig über die Kugel verbreiteten Elektricität an jedem Punkte $= \frac{Q}{4\pi}$ ist.

3) Die Dichtheit der Elektricität an einer bestimmten Stelle der Oberfläche eines Conductors und das Potential der gesammten nach dem Gesetze 1) vertheilten Elektricität auf den Punct, um dessen elektrische Dichtigkeit es sich handelt, hängen zusammen durch die Relation:

$$\varrho = -\frac{h}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial w},$$

wobei

$\frac{\partial V}{\partial w}$ das Aenderungsgesetz von V, dem Potential der gesammten vorhandenen Elektricität auf den genannten Punkt, bedeutet, wenn dieser Punkt um die unendlich kleine Strecke ∂w in der Richtung der Normale nach aussen fortrückt;

ϱ ist die Dichtheit der Elektricität in unserem betreffenden Punkte;

h bedeutet eine nur von den, den einzelnen Conductoren mitgetheilten Elektricitätsmengen abhängige Constante und

π das Verhältniss des Kreisumfanges zum zugehörigen Durchmesser.

4) V hat folgende Fundamentaleigenschaften:

α, V ist für alle Punkte p ausserhalb der Conductoren endlich und ändert sich stetig, wenn p seinen Ort stetig ändert.

β, V geht in Null über, wenn der Punkt p, auf den es sich bezieht, in unendliche Entfernung von den Conductoren rückt.

γ, Für jeden Punkt p ausserhalb des von einem Conductor erfüllten Raumes genügt V der Gleichung:

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

wenn x, y, z die rechtwinkligen räumlichen Coordinaten des Punktes p sind, auf den sich V bezieht.

δ, V ist constant für alle Punkte p, die auf der Oberfläche desselben Conductors liegen; oder diese Conductoroberfläche ist eine Niveaufläche für V.

ε, Kommt die Function V her von elektrischen Massen, die stetig über die Oberflächen eines Systems von Conductoren verbreitet sind, so hat V für alle Punkte des inneren Raumes eines und desselben Conductors denselben constanten Werth, den es für alle Punkte der Oberfläche desselben hat.

ζ, Kommt V nur her von elektrischen Massen, die stetig über die Oberflächen eines Systems von Conductoren verbreitet sind, so giebt es nur eine einzige Function V, die den von α bis ε aufgezählten Eigenschaften genügt, es giebt aber auch stets eine solche Function.

5) Den Fundamentaleigenschaften für V von α bis δ genügt das Potential zweckmässig gewählter elektrischer Massen im Innern eines jeden einzelnen Conductors.

6) Diese elektrischen Massen im Innern eines jeden Conductors haben hierzu nur der Bedingung zu genügen, dass ihr Gesammtpotential für alle Punkte auf der Oberfläche eines und desselben Conductors einen constanten Werth habe, der aber für die einzelnen Conductoren ein verschiedener sein kann.

7) Genügt die im Innern eines einzelnen, von allem fremden elektrischen Einfluss befreiten, Conductors angenommene Vertheilung elektrischer Massen den beiden Bedingungen: 1, dass ihr Potential für alle Punkte der Conductoroberfläche constant ist, 2, dass die algebraische Summe derselben, addirt zur algebraischen Summe der wirklich auf der Oberfläche des Conductors vorhandenen elektrischen Masse, Null ergiebt, so ist der Werth des Gesammtpotentiales beider elektrischer Massensysteme für alle Punkte ausserhalb und auf der Conductoroberfläche gleich Null.

8) Sind diese beiden Bedingungen für jeden einzelnen Conductor eines ganzen Systemes von Conductoren erfüllt*), so muss auch nothwendig das Gesammtpotential aller vorhandenen elektrischen Massen für alle Punkte auf oder ausserhalb der Conductoren Null sein.

9) Ist V das Potential aller elektrischen Massen, die sich auf der Oberfläche der Conductoren eines ganzen Conductorensystems befinden, für irgend einen Punkt einer Conductorfläche oder des von dem Conductorensysteme ausgeschlossenen Raumes, ist ferner U das Potential der nach den beiden unter 8) genannten Bedingungen angenommenen elektrischen Massenvertheilung für denselben Punkt, auf den sich V bezieht, so ist nach 8)

$$V + U = 0,$$

folglich, da nach 2) pag. 121 $\varrho = -\frac{h}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial w}$ auch

$$\varrho = \frac{h}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial w}.$$

Literatur:

Poisson: Mém. 1 et 2 sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mém. de la classe des sc. mathem. et phys. de l'inst. Année 1811.

Green: An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Crelle's Journal, Bd. 39. 44. u. 47.

Gauss: Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. 1840. Namentlich § 24, § 25, § 26, § 27, § 36 und § 37.

---

*) Nämlich so, wie es Nr. 6 und Nr. 1 dieses § verlangt.

§ 2.

Präcisirung der gestellten Aufgabe.

Ist die in 9, § 1 definirte Function U bekannt, so folgt nach dem an derselben Stelle genannten Satze die gesuchte elektrische Dichtheit einfach durch Differentiation, wenn man noch bemerkt, dass die Constante h sich ergiebt aus der Relation

$$\lim_{R=\infty} \frac{Q}{R} = h V_\infty = -h U_\infty ,$$

worin bedeutet

Q die algebraische Summe aller dem Conductorensysteme ursprünglich mitgetheilten Elektricitätsmenge (nicht durch Vertheilungswirkung).

$V_\infty = -U_\infty$ den Werth von V resp. U im Bezug auf einen Punkt p', dessen Entfernung R von dem Conductorensysteme unendlich gross ist.

Die zu lösende Aufgabe kommt daher darauf hinaus, die Function U zu beschaffen.

Die Potentialfunction U im Bezug auf irgend einen Punkt p kann aber als bekannt angesehen werden, sobald die analytische Bestimmung der Massen erfolgt ist, welche U bewirken.

Die zu bestimmende Massenvertheilung hat nun folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Nach 5, § 1 müssen die geometrischen Oerter für die einzelnen anzunehmenden Massen innerhalb der gegebenen Conductoren liegen.

2. Nach 6, § 1 müssen die anzunehmenden Massen die einzelnen Conductoroberflächen zu Niveauflächen ihres Potentiales haben und

da durch Vertheilung auf jedem einzelnen Conductor stets gleich grosse Mengen entgegengesetzter Elektricitäten erregt werden, die algebraische Summe der auf demselben wirklich vorhandenen Elektricitätsmengen also dadurch nicht geändert wird, sondern immer der den Conductoren ursprünglich mitgetheilten Elektricitätsmenge gleich bleibt und da die Wirkung der auf jedem einzelnen Conductor haftenden Elektricitätsmenge auf jeden Punkt ausserhalb oder auf dem Conductor ersetzt werden soll durch die hypothetischen elektrischen Massen im Innern des Conductors, so ist nach 7 und 8, § 1 auch

3. die algebraische Summe der im Innern eines jeden einzelnen Conductors anzunehmenden Elektricitätsmenge gegeben. Sie ist nämlich entgegengesetzt gleich der dem betreffenden Conductor ursprünglich mitgetheilten algebraisch addirten Elektricitätsmenge*).

*) Bei Abstraction von directem Uebergang der Elektricität zwischen den Conductoren.

Hiernach lässt sich die im Allgemeinen zu lösende Aufgabe in folgende Worte fassen: „Innerhalb gegebener geschlossener Flächen sind elektrische Massen, deren algebraische Summe für jede einzelne Fläche ebenfalls gegeben ist, so zu bestimmen, dass ihr Gesammtpotential diese Flächen zu Niveauflächen hat.“

Diese Aufgabe ist bekanntlich unbestimmt.

Hat man elektrische Massen symmetrisch vertheilt zu einer Ebene, so sind auch die Niveauflächen ihres Potentiales symmetrisch zu dieser Ebene gelegen. Umgekehrt muss man daher auch, wenn die Conductoren selbst sowohl, als auch die den einzelnen Conductoren ursprünglich mitgetheilten algebraischen Summen von Elektricität symmetrisch zu einer Ebene geordnet sind, der Aufgabe genügen können durch eine symmetrisch zu dieser Ebene angeordnete Vertheilung der anzunehmenden elektrischen Massen.

Der vorige Satz gilt auch noch, wenn man statt Ebene Gerade setzt.

Sind endlich die Conductoren begrenzt von Rotationsflächen, die sämmtlich ein und dieselbe Gerade zur Rotationsaxe besitzen, so wird man der gestellten Aufgabe genügen können durch eine Vertheilung elektrischer Massen der Art, dass Dichtheit und Vorzeichen derselben für alle Punkte, die auf der Peripherie eines Kreises liegen, der seinen Mittelpunkt in der Rotationsaxe und seine Ebene senkrecht zu derselben hat, constant ist.

Ist nun in diesem Falle keiner der einzelnen Conductoren von einem anderen umschlossen, so kann man erwarten, dass man der Aufgabe auch genügen könne allein durch eine angenommene Vertheilung elektrischer Massen auf der Rotationsaxe selbst.

Dieser Fall ist es nun, den wir in der Folge specieller betrachten werden in einer Weise, dass die Methode der Rechnung auch auf jedes beliebige Conductorensystem, das ursprünglich mit beliebigen elektrischen Massen beladen worden ist, ausgedehnt werden kann.

Wir stellen uns also die Aufgabe: „Wie sind elektrische Massen auf der Axe eines Systems von, von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Axe umschlossenen und einander nicht einschliessenden, Conductoren anzuordnen, wenn dieselben zur Ermittelung der elektrischen Dichtheit auf den Conductoren benützt werden sollen?“

Nach 5, § 1 ist dazu erforderlich, dass ein endliches Stück der Rotationsaxe von jedem einzelnen Conductor selbst umschlossen ist, derselbe also keine ringförmige Gestalt hat; und es lässt sich erwarten, dass auch die innerhalb der Conductoren liegenden Stücke der Rotationsaxe nicht zu klein gegen die übrigen Dimensionen des Conductors sein dürfen.

---

§ 3.

Reduction gewisser specieller Fälle auf den allgemeinen Fall.

Wir sagten oben, dass die algebraische Summe der in Wirklichkeit auf einem jeden Conductor befindlichen Elektricitätsmengen bekannt sei. Dies scheint nicht der Fall zu sein, wenn einer oder mehrere Conductoren zur Erde abgeleitet sind oder kurze Zeit abgeleitet gewesen sind.

Im erstern Falle muss man aber bei strenger Rechnung sowohl die Ableitungsvorrichtung, als auch die ganze Erde mit als Conductor betrachten und wird so auf den allgemeinen Fall pag. 125 zurückgeführt. Für nur angenäherte Rechnung unter Voraussetzung eines sehr dünnen Ableitungsdrahtes kann man, nach Green's Vorgange, das Potential der auf den Conductoren befindlichen elektrischen Massen, bezogen auf jeden Punkt der abgeleiteten Conductoren, gleich Null setzen und erhält damit eine Bedingungsgleichung zur Berechnung der auf den abgeleiteten Conductoren befindlichen Elektricitätsmengen.

Wenn im zweiten Falle, der wieder aufgehobenen Ableitung, die Berechnung der elektrischen Dichtheit stattgefunden hat für noch bestehende Ableitung, so kann durch Ermittelung des Integrales $\int \varrho\, ds$, wo ϱ die elektrische Dichtheit im Oberflächenelemente ds des abgeleiteten Conductors bedeutet, und wenn die Integration über die ganze Oberfläche des Conductors ausgedehnt wird, die algebraische Summe der auf dem abgeleiteten Conductor befindlichen Elektricitätsmengen gefunden werden. Ist aber diese bekannt, so ist man dann auch nach wieder aufgehobener Ableitung wieder auf die allgemeinen Fälle pag. 125 zurückgekommen.

Der Natur der Sache nach sind die Begrenzungsflächen der von uns speciell nach pag. 125 zu behandelnden Conductoren sämmtlich geschlossene Flächen. Diese Flächen sind aber, namentlich in den praktisch wichtigen Fällen, meist solche, dass sie nicht ohne weiteres durch eine einzige Gleichung analytisch festgelegt werden können, z. B. bei dem häufig vorkommenden Apparat, wo ein cylindrisches Drahtstück centrisch an eine Kugel angesetzt ist, u. s. w. Um auch die Meridiancurven solcher Flächen, wie es uns erwünscht ist, durch eine einzige Gleichung von der Form $y = f(x)$ oder $\varphi(x, y) = 0$ für rechtwinklige Coordinaten [oder $r = f_1(\theta)$ oder $\varphi_1(r, \theta) = 0$ für Polarcoordinaten] andeuten zu können, erinnern wir an die (Dirichlet'sche) Formel:

Genügt y innerhalb des Intervalles für x von a bis a_1 der Form $y = f_1(x)$, innerhalb des Intervalles a_1 bis a_2 der Form $y = f_2(x)$, innerhalb des Intervalles a_2 bis a_3 der Form $y = f_3(x)$, ..., innerhalb des Intervalles a_{n-1} bis b der Form $y = f_n(x)$, so ist der Werth des y für ein x, das der Bedingung genügt, $b \geqq x \geqq a$:

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m \, e^{m \frac{2\pi(x-a)}{b-a} i} \left\{ \int_a^{a_1} f_1(t) e^{-m \frac{2\pi(t-a)}{b-a} i} dt \right.$$

$$+ \int_{a_1}^{a_2} f_2(t) e^{-m \frac{2\pi(t-a)}{b-a} i} dt + \int_{a_2}^{a_3} f_3(t) e^{-m \frac{2\pi(t-a)}{b-a} i} dt$$

$$\left. + \ldots\ldots + \int_{a_{n-1}}^{b} f_n(t) e^{-m \frac{2\pi(t-a)}{b-a} i} dt \right\}$$

Ist diese Gleichung die in ebenen rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückte Gleichung des auf der einen Seite der Rotationsaxe gelegenen Stückes der Meridiancurve eines der gegebenen Conductoren, so ist ersichtlich, dass

keine der mit f bezeichneten Functionen innerhalb der zugehörigen Integrationsgrenzen unendlich wird,

dass y sich mit Ausnahme eines Falles mit x stetig ändert,

dass für $x = a$ oder $x = b$ $y = 0$

und dass, da wir einander umschliessende Conductoren von unserer Betrachtung ausgeschaltet haben, ein hohler Conductor aber im Bezug auf die Vertheilung von Elektricität ebenso wirkt, wie ein massiver, die obige Gleichung nur einen zusammenhängenden Curvenzweig bedeuten wird.

Der eben erwähnte Ausnahmefall ist der, wenn der Conductor ein senkrecht auf der Rotationsaxe stehendes ebenes Begrenzungsstück enthält. Umgeht man die Schwierigkeit dieses Falles durch zu Grunde-Legung eines anderen Coordinatensystemes, so können wir sagen: Durch eine Gleichung von der vorstehenden Form ist irgend ein Punkt des auf der einen Seite der Rotationsaxe liegenden Stückes der Meridiancurve eindeutig bestimmt.

Sind weiter die Derivirten der mit f bezeichneten Functionen innerhalb der entsprechenden Integrationsintervalle stetig, so ist auch eine sofortige Differentiation der obigen Gleichung erlaubt, wobei freilich an den Integrationsgrenzen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}$ statt der wirklichen zwei im Allgemeinen verschiedenen Werthe von y' das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe zum Vorschein kommt.

§ 4.
Analytische Fixirung der gestellten Aufgabe.

Seien eine Anzahl, etwa q, Conductoren von der Art gegeben, wie sie pag. 125 vorschreibt. Die Gleichungen der Meridiancurven derselben seien, bezogen auf ein ebenes rechtwinkliges Coordinatensystem mit der Rotationsaxe als Axe der x:

$$y = \varphi_1(x);\ y = \varphi_2(x);\ y = \varphi_3(x);\ \ldots\ldots y = \varphi_q(x).$$

Die mit elektrischen Massen zu belegenden Stücke der Rotationsaxe (vollständig innerhalb der Conductoren gelegen) mögen reichen, resp.

von a_1 bis b_1; von a_2 bis b_2; von a_3 bis b_3; ..... von a_q bis b_q.

Der den Anforderungen pag. 124 genügende Modus der Vertheilung elektrischer Massen sei dargestellt durch resp.

$$f_1(\varrho);\ f_2(\varrho);\ f_3(\varrho);\ \ldots\ldots f_q(\varrho).$$

Dann ist das Gesammtpotential aller angenommenen elektrischen Massen bezogen auf einen Punkt, dessen rechtwinklige räumliche Coordinaten*) sind x, η, ζ:

$$U = \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(\varrho)}{r}\, d\varrho + \int_{a_2}^{b_2} \frac{f_2(\varrho)}{r}\, d\varrho + \int_{a_3}^{b_3} \frac{f_3(\varrho)}{r}\, d\varrho + \ldots\ldots + \int_{a_q}^{b_q} \frac{f_q(\varrho)}{r}\, d\varrho$$

$$= \sum_1^q {}_p \int_{a_p}^{b_p} \frac{f_p(\varrho)}{r}\, d\varrho,$$

wenn $r = \sqrt{(x-\varrho)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Ist nun der Punkt $x\,\eta\,\zeta$ irgend ein Punkt der Oberfläche des s^{ten} Conductors, also $\eta^2 + \zeta^2 = y^2 = [\varphi_s(x)]^2$, so ist nach pag. 124, 2.:

$$1,\quad U_s = \sum_1^q {}_p \int_{a_p}^{b_p} \frac{f_p(\varrho)\, d\varrho}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}} = C_s = Const.,$$

welche Lage auch der Punkt $x\,\eta\,\zeta$ auf der Oberfläche des s^{ten} Conductors einnehmen mag.

Bedeutet also $d\sigma$ ein auf der Oberfläche dieses Conductors gelegenes Bogenelement, so ist

$$\text{I},\quad \frac{\partial U_s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial U_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial y}\varphi_s'(x) = 0$$

eine identische Gleichung, sobald der Werth von $y = \varphi_s(x)$ als Function von x in dieselbe eingesetzt wird.

---

*) Bezogen auf ein Coordinatensystem, das möglichst mit dem obigen ebenen zusammenfällt.

Die Identität I repräsentirt q Identitäten, da in ihr s alle Werthe von 1 bis q annehmen kann.

Weiter ist nach 3. pag. 124

$$\text{II,} \quad \int_{a_s}^{b_s} f_s(\varrho)\, d\varrho = A_s\,,$$

wenn — A_s die algebraische Summe der dem s^{ten} Conductor direct mitgetheilten Elektricitätsmengen bedeutet.

Die Gleichung II repäsentirt, aus demselben Grunde wie die Gleichung I, q Gleichungen.

Vermittelst der Gleichungensysteme I und II sollen nun die Functionen $f(\varrho)$ und die Längen und Lagen der mit elektrischer Masse zu belegenden Axenstücke, d. i. die Integrationsgrenzen a und b bestimmt werden. Ausgeschlossen bleiben dabei im Allgemeinen Lösungen von der Form: $f_s(\varrho) \equiv 0$, und $b_s = a_s$.

Indem wir hier für die Bestimmung der a und b nur an das pag. 125 über Symmetrieverhältnisse Gesagte erinnern, gehen wir namentlich darauf aus, die Functionen f zu berechnen.

Jedenfalls können wir über diese Functionen die Voraussetzung machen, dass sie an den und innerhalb der Integrationsgrenzen nirgends unendlich werden, womit dann auch ihre Entwickelung innerhalb dieser Grenzen in Fouriersche Reihen gestattet ist.

Um diese Entwickelung in möglichst einfacher Form verwenden zu können, denken wir uns den Coordinatenanfang bei der Berechnung des Potentialwerthes der in einem bestimmten etwa dem p^{ten} Conductor angenommenen Elektricität immer in die Mitte der mit elektrischer Masse belegten Axenstrecke gelegt; eine Operation, die offenbar auf das Potential jedes einzelnen Conductors sowohl, wie auf das Gesammtpotential ohne Einfluss ist. Setzen wir dem entsprechend weiter

$$b_p - a_p = 2h_p\,;\; f_p(\varrho) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, a_n^p\, e^{n\frac{\pi}{h_p}\varrho i},$$

so erhalten wir statt der Gleichung 1, jetzt

$$2,\quad U_s = \sum_{1}^{q}{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, a_n^p \int_{-h_p}^{+h_p} \frac{e^{n\frac{\pi}{h_p}\varrho i}}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}}\, d\varrho,$$

wobei jetzt, gemäss der angenommenen Beweglichkeit unseres Coordinatensystems, dem x für jeden einzelnen Conductor ein besonderer Werth beigelegt werden muss.

Es ist nun unsere Aufgabe, der Gleichung 2, oder dem U_s eine Form

zu geben, dass dessen Berechnung für jeden Werth, den x und y gemäss der Bedingung, dass der Punkt xy auf der Meridiancurve des s^{ten} Conductors liegt, erlangen kann, leicht ist, und namentlich auch die Art der Abhängigkeit des U_s von x und y, wenn xy irgend einen Punkt der Meridianebene bezeichnet, hervortritt. Hierauf hat dann, unter Anwendung der Gleichungen I und II die Bestimmung der Coefficienten a_n^p und endlich die der Functionen f_s selbst zu erfolgen.

Hierbei ist noch besonders der Umstand hervorzuheben, dass, weil eine Function sich nur in einer einzigen Weise in eine Fouriersche Reihe entwickeln lässt, sich auch alle Unbestimmtheit der Aufgabe in der Art der Bedingungsgleichungen zeigen muss, von denen die Integrationsgrenzen h_p und die Coefficienten a_n^p abhängen.

---

§ 5.

Transformation von U_s und $\frac{d}{dx} U_s$.

Seien die beiden Theile des Integrales

$$I_n = \int_{-h}^{+h} \frac{e^{n \frac{\pi}{h} \varrho i}}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}} d\varrho$$

$$I_c = \int_{-h}^{+h} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right)}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}} d\varrho \quad \text{und} \quad I_s = i \int_{-h}^{+h} \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right)}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}} d\varrho.$$

Nun ist bekanntlich

$$A, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos u\varrho \, du \int_{-h}^{+h} \cos\left(n \frac{\pi}{h} t\right) \cos ut \, dt = \begin{cases} 0 \textit{ für } \varrho^2 > h^2 \\ \frac{1}{2} \cos\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right) \textit{ für } \varrho^2 = h^2 \\ \cos\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right) \textit{ für } \varrho^2 < h^2 \end{cases}$$

$$B, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin u\varrho \, du \int_{-h}^{+h} \sin\left(n \frac{\pi}{h} t\right) \sin ut \, dt = \begin{cases} 0 \textit{ für } \varrho^2 > h^2 \\ \frac{1}{2} \sin\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right) \textit{ für } \varrho^2 = h^2 \\ \sin\left(n \frac{\pi}{h} \varrho\right) \textit{ für } \varrho^2 < h^2 \end{cases}$$

Mit Hülfe von $A_,$ und $B_,$ nehmen I_c und I_s folgende Gestalten an:

$$I_c = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho}{\sqrt{(x-\varrho)^2+y^2}}\int_0^{\infty}\cos(u\varrho)\,du\int_{-h}^{+h}\cos(n\frac{\pi}{h}t)\cos(ut)\,dt.$$

$$I_s = \frac{1.i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho}{\sqrt{(x-\varrho)^2+y^2}}\int_0^{\infty}\sin(u\varrho)\,du\int_{-h}^{+h}\sin(n\frac{\pi}{h}t)\sin(ut)\,dt.$$

Aus der bekannten Formel

$$\int_0^{\infty} e^{gzi}\, z^{x-1}dz = \frac{\Pi(x-1)}{g^x}\, e^{x\frac{\pi}{2}i}$$

folgen weiter die für uns wichtigen Formeln, wenn man setzt in derselben

$$g = (x-\varrho)^2 + y^2;\quad z = \psi,\ x = \frac{1}{2};\ \text{da}\ \Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$C_,\quad \frac{1}{\sqrt{(x-\varrho)^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}\int_0^{\infty} e^{\{(x-\varrho)^2+y^2\}\psi i}\,\psi^{-\frac{1}{2}}d\psi$$

und wenn man setzt $x = \frac{1}{2}$ und für z z^2 schreibt

$$2\int_0^{\infty} e^{gz^2i}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{gz^2i}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{g}}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

oder, wenn man im letzten Integrale noch setzt

$$z = u + l.$$

$$D_,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\{gu^2+2gul\}i}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{g}}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\, e^{-gl^2i}$$

Mit Hülfe der Formel $C_,$ nimmt nun I_c, wenn man noch setzt $\cos u\varrho = p.r.\, e^{u\varrho i}$ oder $\cos u\varrho = p.\,r.\,\frac{1}{2}(e^{u\varrho i} + e^{-u\varrho i})$ die Formen an:

$$I_c = p.r.\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}\int_0^{\infty}\frac{e^{(x^2+y^2)\psi i}}{\sqrt{\psi}}d\psi\int_0^{\infty}du\int_{-h}^{+h}\cos(n\frac{\pi}{h}t)\cos(ut)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\{\varrho^2\psi+2\varrho\psi(\frac{u}{2\psi}-x)\}i}\,d\varrho.$$

Oder

$$I_c = p.r.\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}\,e^{\frac{\pi}{4}i}}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{(x^2+y^2)\psi i}}{\sqrt{\psi}}\,d\psi\int_0^\infty du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left\{\varrho^2\psi\pm 2\varrho\psi\left(\frac{u}{2\psi}\mp x\right)\right\}i}\,d\varrho\right\},$$

wobei in Hinsicht des auf ϱ bezüglichen Integrales der letzten Darstellung von I_c die Integration sowohl im Bezug auf die oberen, als auch auf die unteren Vorzeichen auszuführen ist.

Ganz entsprechende Form erhält auch I_s, wenn man setzt, das eine Mal $\sin u\varrho = p.\,i.\,e^{u\varrho i}$, das andere Mal $\sin u\varrho = p.\,i.\,\frac{1}{2}\left(e^{u\varrho i} - e^{-u\varrho i}\right)$, nur müssen dann die beiden Integrationsergebnisse von einander abgezogen werden, während sie im vorigen Fall zu addiren waren.

Führt man die auf ϱ bezüglichen Integrationen aus nach Formel D, pag. 131, so erhält man

$$I_c = p.r.\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}+ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt.$$

Oder

$$I_c = p.r.\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}+ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}-ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt\right\}.$$

$$I_s = \frac{i}{\pi}\,p.\,i.\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}+ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\sin\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\sin(ut)\,dt$$

Oder

$$I_s = \frac{i}{2\pi}\,p.\,i.\left\{\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}+ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\sin\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\sin(ut)\,dt\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}\,d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}-ux\right\}i}\,du\int_{-h}^{+h}\sin\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\sin(ut)\,dt\right\}.$$

Setzt man nun $\psi = \frac{u}{v}$ also $\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{dv}{v}$, so wird

$$p.\ r.\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{y^2\psi i}}{\psi}d\psi\int_0^\infty e^{\left\{-\frac{u^2}{4\psi}+ux\right\}i}du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{dv}{v}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left[u\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt.$$

Nun ist aber nach Formel A, pag. 130

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left[u\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]du\int_{-h}^{+h}\cos\left(n\frac{\pi}{h}t\right)\cos(ut)\,dt=\begin{cases}0\\ \frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\\ \cos n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\end{cases}$$

je nachdem $\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)^2 \gtreqless h^2$.

Der Ausdruck $\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}$ nimmt bei wachsendem v stetig ab, und ist für $v=0$, $+\infty$, für $v=+\infty$, $-\infty$; da nun nach den Integrationsgrenzen der auf v bezüglichen Integration v nur positive Werthe zu durchlaufen hat, so haben nur diejenigen Elemente für die nach v auszuführende Integration einen von 0 verschiedenen Werth, für welche v einen solchen positiven Werth hat, dass

$$-h\leqq\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\leqq+h$$

d. h. wir haben als Grenzen der Integration im Bezug auf v zu nehmen die positiven Wurzeln der beiden in v quadratischen Gleichungen:

$$\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}=+h \quad\text{und}\quad \frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}=-h.$$

Die Integrationsgrenzen sind demnach:

$$v_1=2\left[x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}\right];\ v_2=2\left[x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}\right].$$

Mit Beachtung des auf der vorigen und auf dieser Seite Gefundenen erhalten wir nun:

$$1,\ I_c=\int_{2\left[x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}\right]}^{2\left[x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}\right]}\cos\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}.$$

Verfährt man analog mit dem zweiten dreifachen Integrale der zweiten Darstellung von I_c pag. 132, so erhält man

$$2,\quad I_c = \frac{1}{2}\int\limits_{2[x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}]}^{2[x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}]} \cos\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}$$

$$+\int\limits_{2[-x-h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}]}^{2[-x+h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}]} \cos\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}-x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}$$

Endlich erhält man noch auf analogem Wege und unter Benutzung der Formel B, pag. 130, für I_s die beiden Darstellungen:

$$3,\quad I_s = i\int\limits_{2[x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}]}^{2[x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}]} \sin\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}$$

und

$$4,\quad I_s = \frac{i}{2}\int\limits_{2[x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}]}^{2[x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}]} \sin\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}+x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{2[-x-h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}]}^{2[-x+h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}]} \sin\left[n\frac{\pi}{h}\left(\frac{y^2}{v}-x-\frac{v}{4}\right)\right]\frac{dv}{v}.$$

Setzen wir ferner $v = 2uy$; $I_c + I_s = I_n$, so findet sich

$$I_n = \int\limits_{\frac{x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}}^{\frac{x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}} e^{n\frac{\pi}{h}\left\{x-\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)\right\}i}\,\frac{du}{u}$$

Oder

$$5,\quad I_n = e^{n\frac{\pi}{h}xi}\int\limits_{\frac{x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}}^{\frac{x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}} e^{-n\frac{\pi}{h}\cdot\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i}\,\frac{du}{u}.$$

Oder:

$$6,\ I_n = \frac{1}{2} e^{n\frac{\pi}{h}xi} \int\limits_{\frac{x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}}^{\frac{x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}} e^{-n\frac{\pi}{h}\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i} \frac{du}{u}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{n\frac{\pi}{h}xi} \int\limits_{\frac{-x-h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}}^{\frac{-x+h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}} e^{n\frac{\pi}{h}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)\frac{y}{2}i} \frac{du}{u}$$

Durch Vergleichung der Relationen 5, und 6, erhält man noch die Formel:

$$7,\ \int\limits_{\frac{x-h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}}^{\frac{x+h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}} e^{-n\frac{\pi}{h}\cdot\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i} \frac{du}{u} = \int\limits_{\frac{-x-h+\sqrt{y^2+(x+h)^2}}{y}}^{\frac{-x+h+\sqrt{y^2+(x-h)^2}}{y}} e^{+n\frac{\pi}{h}\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i} \frac{du}{u}$$

Nach pag. 129, 2 und nach pag. 130 ist nun die gesuchte Transformation von U_s, die wir auch in der Folge zu Grunde legen werden,

$$U_s = \sum_{1}^{q}{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n a_n^p\, I_n^p .$$

wo I_n^p durch 5, oder 6, pag. 134 und 135 und 2, pag. 129 definirt ist.

Es könnte scheinen, als ob die Anwendung der bekannten Formel

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{uxi}\, du \int\limits_{-h}^{+h} F(t) e^{-uti} dt; \quad -h < x < +h$$

statt der Formel A, und B, pag. 130 auf kürzerem Wege zum Ziele führte, allein die Bestimmung der Integrationsgrenzen für v bei der spätern Substitution $\psi = \frac{u}{v}$ (pag. 132) dürfte Schwierigkeiten verursachen; zugleich führte uns unser Weg auch auf die Formel 2, pag. 134, die dann wichtig wird, wenn eine zur Rotationsaxe senkrechte Symmetrieebene vorhanden ist (vergl. pag. 125), indem dann für

$$f_p(\varrho) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a_n^p \, e^{n\frac{\pi}{h}\varrho i}$$

gesetzt werden kann

$$f_p(\varrho) = \sum_{0}^{\infty}{}^{n} A_n^p \cos n \frac{\pi}{h} \varrho.$$

Von den vielen Transformationen, die man noch aus 5, 6, und 7, für I_n ableiten kann, erwähnen wir nur noch kurz ihrer leichten geometrischen Interpretation wegen die folgende:

Setzt man $u = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$, so erhält man:

$$I_n = \int_{\operatorname{arc\,tng}\frac{x-h}{y}}^{\operatorname{arc\,tng}\frac{x+h}{y}} e^{n\frac{\pi}{h}(x - y\operatorname{tng}\alpha)i} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \int_{\operatorname{arc\,tng}\frac{-h-x}{y}}^{\operatorname{arc\,tng}\frac{x-h}{y}} e^{n\frac{\pi}{h}(x + y\operatorname{tng}\alpha)i} \frac{d\alpha}{\cos\alpha},$$

welche beiden Integrale auch aus dem ursprünglichen Integral

$$\int_{-h}^{+h} \frac{e^{n\frac{\pi}{h}\varrho i}}{\sqrt{(x-\varrho)^2 + y^2}} d\varrho$$

direct abgeleitet werden können, indem man das eine Mal substituirt $y \operatorname{tng}\alpha = x - \varrho$, das andere Mal $y \operatorname{tng}\alpha = \varrho - x$.

Es dürfte aber auch hier umständlich sein, mit Strenge die Integrationsgrenzen zu bestimmen, wenn man von den obigen beiden Integralen die Transformationen 5, und 6, pag. 134 und 135 herleiten wollte.

Bezieht man nun U_s auf ein und dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem mit der Rotationsaxe als Axe der x, im Bezug auf welches die Mittelpunkte der mit elektrischer Masse belegten Axenstücke die Entfernung von der Axe der y haben, resp.

$$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots -b_q,$$

so kann sich an dem bereits gefundenen Ausdruck für U_s nichts weiter ändern, als dass an die Stelle von x jetzt $x + b_p$ tritt, so dass wir erhalten:

$$8, \quad U_s = \sum_{1}^{q}{}^{p} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a_n^p \int_{\operatorname{arc\,tng}\frac{x+b_p-h_p}{y}}^{\operatorname{arc\,tng}\frac{x+b_p+h_p}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}(x + b_p - y\operatorname{tng}\alpha)i} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \sum_1^q {}_p \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n a_n^p \int_{arc\ tng \frac{-h_p - x - b_p}{y}}^{arc\ tng \frac{h_p - x - b_p}{y}} e^{n \frac{\pi}{h_p}(x + b_p + y\, tng\, \alpha)\, i} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$= \sum_1^q {}_p \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n a_n^p \int_{\frac{x + b_p - h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p - h_p)^2}}{y}}^{\frac{x + b_p + h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p + h_p)^2}}{y}} e^{n \frac{\pi}{h_p}\left(x + b_p - \frac{y}{2}\left[\frac{u}{1} - \frac{1}{u}\right]\right) i} \frac{du}{u}.$$

$$= \sum_1^q {}_p \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{a_n^p}{2} \left\{ \int_{\frac{x + b_p - h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p - h_p)^2}}{y}}^{\frac{x + b_p + h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p + h_p)^2}}{y}} e^{n \frac{\pi}{h_p}\left\{x + b_p - \frac{y}{2}\left(\frac{u}{1} - \frac{1}{u}\right)\right\} i} \frac{du}{u} \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{-x - b_p - h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p + h_p)^2}}{y}}^{\frac{-x - b_p + h_p + \sqrt{y^2 + (x + b_p - h_p)^2}}{y}} e^{n \frac{\pi}{h_p}\left\{x + b_p + \frac{y}{2}\left(\frac{u}{1} - \frac{1}{u}\right)\right\} i} \frac{du}{u}. \right\}$$

Nach der dritten oder vierten dieser Transformationen von U_s ist nun dessen Berechnung für jedes beliebige x und y leicht durch einfache Reihenentwickelung der Exponentialgrösse.

Analog wie U_s lässt sich auch $\frac{d}{dx} U_s = \frac{\partial U_s}{\partial x} + y' \frac{\partial U_s}{\partial y}$ umgestalten. Für unsern Zweck wird die folgende Transformation genügen.

Aus 1, pag. 128 folgt:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} + y' \frac{\partial U_s}{\partial y} = \sum_1^q {}_p \int_{-h_p}^{+h_p} \frac{f_p(\varrho)\,[x - \varrho + y\, y']\, d\varrho}{\sqrt{(x - \varrho)^2 + y^2}^{\,3}}$$

Setzt man $\frac{x - \varrho}{y} = tng\ \alpha$, so folgt

$$\frac{\partial U_s}{\partial x}+y'\frac{\partial U_s}{\partial y}=\sum_1^q{}_p\,\frac{1}{y}\int\limits_{arc\,tng\frac{x-h_p}{y}}^{arc\,tng\frac{x+h_p}{y}} f_p\,(x-y\,tng\,\alpha)\left[\sin\alpha+y'\cos\alpha\right]d\alpha.$$

Also auch, da $f_p\,(\varrho)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\,a_n^p\,e^{n\frac{\pi}{h_p}\varrho i}$

$$\frac{\partial U_s}{\partial x}+y'\frac{\partial U_s}{\partial y}=\sum_1^q{}_p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{a_n^p}{y}\int\limits_{arc\,tng\frac{x-h_p}{y}}^{arc\,tng\frac{x+h_p}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}(x-y\,tng\,\alpha)\,i}\left[\sin\alpha+y'\cos\alpha\right]d\alpha.$$

Endlich beim Uebergang auf das pag. 136 angenommene feste Coordinatensystem:

$$9,\quad \frac{\partial U_s}{\partial x}+y'\frac{\partial U_s}{\partial y}=\sum_1^q{}_p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{a_n^p}{y}\int\limits_{arc\,tang\frac{x+b_p-h_p}{y}}^{arc\,tng\frac{x+b_p+h_p}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p-y\,tng\,\alpha)i}\left[\sin\alpha+y'\cos\alpha\right]d\alpha.$$

Wir schreiben hierfür kurz:

$$10,\quad \frac{dU_s}{\partial x}+y'\frac{\partial U_s}{\partial y}=\sum_1^q{}_p\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{a_n^p}{y}\,(Z_1+Z_2)$$

indem

$$11,\quad Z_1=\int\limits_{arc\,tng\frac{x+b_p-h_p}{y}}^{arc\,tng\frac{x+b_p}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p-y\,tng\,\alpha)\,i}\left[\sin a+y'\cos\alpha\right]d\alpha$$

$$12,\quad Z_2=\int\limits_{arc\,tng\frac{x+b_p}{y}}^{arc\,tng\frac{x+b_p+h_p}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p-y\,tng\,\alpha)\,i}\left[\sin\alpha+y'\cos\alpha\right]d\alpha$$

§ 6.

Bestimmung der Coefficienten a_n^p.

Bei der Bestimmung der Coefficienten a_n^p haben wir folgende Relationen zu erfüllen.

Nach Seite 129 und 128 II, und I,

$$1, \quad \int_{-h_s}^{+h} f_s(\varrho)\, d\varrho = A_s$$

$$2, \quad \frac{\partial U_s}{\partial x} + \varphi_s'(x) \frac{\partial U_s}{\partial y} = \sum_1^q{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{a_n^p}{y} (Z_1 + Z_2) = 0.$$

eine identische Gleichung, sobald in ihr der Werth von y als Function von x mittelst der Gleichung

$$3, \quad y = \varphi_s(x)$$

substituirt wird.

Ferner nach pag. 129:

$$4, \quad f_p(\varrho) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n a_n^p\, e^{n \frac{\pi}{h_p} \varrho i},$$

endlich die Werthe von Z_1 und Z_2 nach pag. 138.

Jede dieser 4 Gleichungen repräsentirt deren q, indem p oder s alle ganzzahligen Werthe von 1 bis q annehmen kann.

Nach der Gleichung 4 genügen die a_n^p bekanntlich auch folgenden Relationen:

$$a_n^p = \frac{1}{2 h_p} \int_{-h_p}^{+h_p} f_p(t)\, e^{-n \frac{\pi}{h_p} t i}\, dt = \alpha_n^p + i \beta_n^p$$

wenn

$$\alpha_n^p = \frac{1}{2 h_p} \int_{-h_p}^{+h_p} f_p(t) \cos\left(n \frac{\pi}{h_p} t\right) dt; \quad \beta_n^p = -\frac{1}{2 h_p} \int_{-h_p}^{+h_p} f_p(t) \sin\left(n \frac{\pi}{h_p} t\right) dt.$$

Seiner Bedeutung nach (pag. 128) kann aber $f_p(\varrho)$ nur reell sein, daraus folgt weiter, dass der reelle Theil von a_n^p eine gerade, der imaginäre eine ungerade Function von n sei, oder dass

$$5, \quad \alpha_n^p = \alpha_{-n}^p \text{ und } \beta_n^p = -\beta_{-n}^p.$$

Mit Beachtung der Gleichungen 5, überzeugt man sich leicht, dass U_s nach 8, pag. 136 nur reelle Werthe enthält.

Setzt man den Werth von $f_s(\varrho)$ nach Gleichung 4, in die Gleichung 1, ein, so erhält man

$$2\, a_o^s\, h_s = A_s$$

oder

$$7, \quad a_o^s = \frac{1}{2}\, \frac{A_s}{h_s},$$

eine Gleichung, die deren wiederum nach der Bedeutung von sq repräsentiren kann.

Zur Bestimmung der übrigen Coefficienten a_n^p bleibt nun allein nur noch die Gleichung

$$2, \quad \sum_1^q{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{a_n^p}{y}(Z_1 + Z_2) = 0$$

übrig. Wir denken uns zunächst y mit Hülfe der Gleichung 3, aus $\frac{Z_1}{y}$ und $\frac{Z_2}{y}$ eliminirt, wodurch die Gleichung 2, übergehen mag in die Identität:

$$8, \quad \sum_1^q{}_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n a_n^p \left\{\psi_1(n, x) + \psi_2(n, x)\right\} \doteq 0.$$

$\psi_1(n, x)$ und $\psi_2(n, x)$ sind dann eindeutige und stetige Functionen von n und x; zugleich sind ihre reellen Theile gerade, ihre imaginären, ungerade Functionen von n. Setzen wir nun n gleich einer beliebigen complexen Zahl, etwa

$$n = \mu + i\nu,$$

so ist ersichtlich, dass, weil der Factor von n in Z_1, nämlich $\frac{\pi}{h_p}(x + b_p - y \operatorname{tng} \alpha)\, i$ nur positive, dagegen in Z_2 nur negative Werthe annehmen kann,

Z_1, also auch $\psi_1(n, x)$, endlich und stetig bleibt, wenn
μ den Weg von $-\infty$ bis $+\infty$ und
ν den Weg von 0 bis $+\infty$ durchläuft;

Z_2, also auch $\psi_2(n, x)$ endlich und stetig bleibt, wenn
μ den Weg von $-\infty$ bis $+\infty$ und
ν den Weg von 0 bis $-\infty$ durchläuft.

Es ist also $\psi_1(n, x)$ eine synectische Function von n für alle Punkte auf der positiven Seite der Axe der μ und $\psi_2(n, x)$ dasselbe für alle Punkte auf der negativen Seite der Axe der μ.

Ferner ist ersichtlich, dass, wenn $n = R e^{i\theta}$

$$\operatorname*{Lim}_{R=\infty} \psi_1(n, x) = 0,$$

wenn $n = R e^{-i\theta}$

$$\operatorname*{Lim}_{R=\infty} \psi_2(n, x) = 0,$$

vorausgesetzt, dass

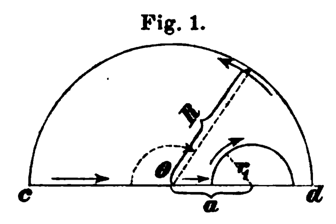
$$0 < \theta < \pi.$$

Bilden wir nun

$$I_1 = \int \frac{\psi_1(n, x)}{n - a}\, dn,$$

ausgedehnt über einen Integrationsweg, wie ihn Figur 1 darstellt, und

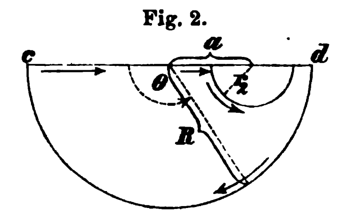
Fig. 1.



$$I_2 = \int \frac{\psi_2(n, x)}{n - a}\, dn,$$

ausgedehnt über einen Integrationsweg nach Figur 2, so ist $I_1 = I_2 = 0$ und wir erhalten die Relationen

Fig. 2.



$$I_1 = \int\limits_c^{a-r_1} \frac{\psi_1(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu - i \int\limits_0^{\pi} \psi_1(a - r_1\, e^{i\theta}, x)\, d\theta + \int\limits_{a+r_1}^{d} \frac{\psi_1(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu$$

$$+ i \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\psi_1(R e^{i\theta}, x)\, R e^{i\theta}\, d\theta}{R e^{i\theta} - a} = 0.$$

$$I_2 = \int\limits_c^{a-r_2} \frac{\psi_2(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu + i \int\limits_0^{\pi} \psi_2(a - r_2\, e^{-i\theta}, x)\, d\theta + \int\limits_{a+r_2}^{d} \frac{\psi_2(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu$$

$$+ i \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\psi_2(R e^{-i\theta}, x)}{R e^{-i\theta} - a}\, R e^{-i\theta}\, d\theta.$$

Lassen wir nun r_1 und r_2 unendlich ab-, dagegen R unendlich zunehmen, so verschwinden die letzten, R enthaltenden, Integrale und wir erhalten die beiden Gleichungen:

$$9, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu = i\pi\psi_1(a, x)$$

$$10, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu = -\, i\pi\psi_2(a, x),$$

aus welchen folgt:

$$11, \quad \psi_1(a, x) + \psi_2(a, x) = \frac{1}{i\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(\mu, x) - \psi_2(\mu, x)}{\mu - a}\, d\mu$$

Ist weiter zur Abkürzung

$$12,\quad \psi_1(\mu, x) - \psi_2(\mu, x) = X_p^s(\mu, x) = X_p^s,$$

so ist ersichtlich, dass X_p^s dieselben Eigenschaften besitzt, die wir pag. 140 als dem $\psi_1(n, x)$ und $\psi_2(n, x)$ zukommend anführten.

Legen wir nun dem a der Gleichung 11, alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so ist

$$13,\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, a_n^p \left\{\psi_1(n, x) + \psi_2(n, x)\right\}$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_p^s(\mu, x) \left\{\frac{a_0^p}{\mu} + \frac{a_1^p}{\mu-1} + \frac{a_{-1}^p}{\mu+1} + \frac{a_2^p}{\mu-2} + \frac{a_{-2}^p}{\mu+2} + \dots\right\} d\mu.$$

Setzt man weiter

$$14,\quad \frac{1}{i\pi}\left\{\frac{a_0^p}{\mu} + \frac{a_1^p}{\mu-1} + \frac{a_{-1}^p}{\mu+1} + \frac{a_2^p}{\mu-2} + \frac{a_{-2}^p}{\mu+2} + \dots\right\} = X_p$$

so nimmt die Gleichung 8, pag. 140 folgende Form an:

$$15,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{X_1^s X_1 + X_2^s X_2 + X_3^s X_3 + \dots\dots + X_q^s X_q\right\} d\mu = 0$$

eine Gleichung, die deren q repräsentirt, indem s alle ganzzahligen Werthe von 1 bis q zu durchlaufen hat.

Mit Beachtung von 5, pag. 139 ist ferner leicht ersichtlich, dass auch in X_p die reellen Theile gerade, die imaginären ungerade Functionen von μ sind.

Die sich aus 15, ergebenden q Gleichungen sind nun auch die einzigen weiteren Gleichungen, die sich zur Berechnung der a_n^p ergeben.

Setzen wir die zu integrirende Function

$$16,\quad X_1^s X_1 + X_2^s X_2 + \dots\dots + X_q^s X_q = c_s W_s$$

wo c_s eine reelle Constante bedeuten möge, so hat W_s folgende wesentliche Eigenschaften:

1, W_s ist eine Function von μ und x.

2, W_s wird unendlich für jeden reellen ganzzahligen Werth von μ.

3, W_s wird Null für $\mu = \pm\infty$.

4, W_s ist endlich und stetig für Werthe von μ die nicht unter den Fall 2, gehören, auch wenn μ eine endliche complexe Grösse ist.

5, Der reelle Theil von W_s ist eine gerade, der imaginäre Theil eine ungerade Function von μ.

6, W_s wird unendlich, sobald $\mu = \pm i\infty + l$, wenn l eine reelle Grösse bedeutet.

7, W_s verschwindet für $x = \pm\infty$; μ endlich.

$$8, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_s \, d\mu \equiv 0.$$

Sind nun $W_1, W_2, W_3 \ldots W_q$ Functionen von μ und x, denen die eben genannten Eigenschaften zukommen, so folgt aus der Gleichung 16, das für die X_p lineare System von Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \mathrm{X}_1^1 X_1 + \mathrm{X}_2^1 X_2 + \mathrm{X}_3^1 X_3 + \ldots + \mathrm{X}_q^1 X_q = c_1 W_1 \\ \mathrm{X}_1^2 X_1 + \mathrm{X}_2^2 X_2 + \mathrm{X}_3^2 X_3 + \ldots + \mathrm{X}_q^2 X_q = c_2 W_2 \\ \mathrm{X}_1^3 X_1 + \mathrm{X}_2^3 X_2 + \mathrm{X}_3^3 X_3 + \ldots + \mathrm{X}_q^3 X_q = c_3 W_3 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \mathrm{X}_1^q X_1 + \mathrm{X}_2^q X_2 + \mathrm{X}_3^q X_3 + \ldots + \mathrm{X}_q^q X_q = c_q W_q \end{array}$$

Ist R die Determinante dieser Gleichungen, so ist:

$$17, \quad R X_p = c_1 W_1 \frac{\partial R}{\partial \mathrm{X}_p^1} + c_2 W_2 \frac{\partial R}{\partial \mathrm{X}_p^2} + c_3 W_3 \frac{\partial R}{\partial \mathrm{X}_p^3} + \ldots + c_q W_q \frac{\partial R}{\partial \mathrm{X}_p^q} = Y_p.$$

Nimmt man nun

$$\int X_p \, d\mu = \int \frac{Y_p}{R} \, d\mu$$

μ als complexe Variable gedacht und das Integral ausgedehnt über einen Kreis, dessen Radius kleiner als Eins ist und dessen Mittelpunkt der auf der reellen Axe gelegene Punkt $\mu = n$ ist, so ist

$$\int X_p \, d\mu = \frac{a_n^p}{i\pi} \int \frac{d\mu}{\mu - n} = 2 \, a_n^p,$$

Folglich ergeben sich bei zweckmässig gewähltem Integrationsweg alle Coefficienten a_n^p in der Form:

$$18, \quad a_n^p = \frac{1}{2} \int X_p \, d\mu = \frac{1}{2} \int \frac{Y_p}{R} \, d\mu$$

Oder bei Ausführung der Integration:

$$19, \quad a_n^p = i\pi . \lim_{\mu = n} \left\{ (\mu - n) \frac{Y_p}{R} \right\}.$$

Die Constanten $c_1, c_2, c_3 \ldots c_q$ können auf folgende Weise bestimmt werden: Dividirt man die Gleichung 17, durch R und integrirt dann die so entstandene und noch mit $d\mu$ multiplicirte Gleichung, indem man als Integrationsweg einen um den Nullpunkt mit einem Radius kleiner als Eins beschriebenen Kreis wählt, so ist mit Rücksicht auf No. 18 und 7, wenn noch abkürzungsweise

$$N_d^e = \frac{1}{2} \int \frac{W_e \frac{\partial R}{\partial x_d^e}}{R} \, d\mu$$

gesetzt wird, das System Gleichungen gültig:

$$c_1 N_1^1 + c_2 N_1^2 + c_3 N_1^3 + \ldots\ldots + c_q N_1^q = a_0^1 = \frac{1}{2} \frac{A_1}{h_1}$$

$$c_1 N_2^1 + c_2 N_2^2 + c_3 N_2^3 + \ldots\ldots + c_q N_2^q = a_0^2 = \frac{1}{2} \frac{A_2}{h_2}$$

$$c_1 N_3^1 + c_2 N_3^2 + c_3 N_3^3 + \ldots\ldots + c_q N_3^q = a_0^3 = \frac{1}{2} \frac{A_3}{h_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1 N_q^1 + c_2 N_q^2 + c_3 N_q^3 + \ldots\ldots + c_q N_q^q = a_0^q = \frac{1}{2} \frac{A_q}{h_q}$$

Hiermit sind die constanten Factoren c_p vollständig bestimmt.

Von der Gleichung pag. 129

$$20, \quad f_p(\varrho) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^p \, e^{n \frac{\pi}{h_p} \varrho i}$$

$$= C_0 + C_1 \cos \frac{\pi}{h_p} \varrho + C_2 \cos 2 \frac{\pi}{h_p} \varrho + C_3 \cos 3 \frac{\pi}{h_p} \varrho + \ldots.$$

$$+ D_1 \sin \frac{\pi}{h_p} \varrho + D_2 \sin 2 \frac{\pi}{h_p} \varrho + D_3 \sin 3 \frac{\pi}{h_p} \varrho + \ldots.$$

ist also nun die rechte Seite als in allen ihren Theilen bekannt anzusehen.

Soll die Gleichung 20, aber für uns brauchbare Resultate enthalten, so muss sie noch die beiden Bedingungen erfüllen:

1, ihre rechte Seite muss convergent sein,

2, die Constanten C und D müssen von x unabhängig sein.

Die erstere Bedingung verlangt, dass die Reihen der absoluten Werthe der C und der D abnehmen.

Die zweite Bedingung verlangt, dass der aus 17, folgende Werth von X_p von x unabhängig sei, d. h. dass man die h_p und b_p so wähle, dass sie neben der Bedingung, dass die angenommenen elektrischen Massen vollständig innerhalb der gegebenen Conductoren liegen, auch noch die Differentialgleichung

$$21, \quad R \frac{\partial Y_p}{\partial x} = Y_p \frac{\partial R}{\partial x}$$

erfüllen.

Die Realisirbarkeit der letzten beiden Bedingungen ist zugleich das Kriterium dafür, ob überhaupt die gestellte Aufgabe lösbar sei oder nicht.

§ 7.

Bestimmung der Function $f_p(\varrho)$ selbst.

Nachdem wir durch die Gleichung 20, pag. 144 die Entwickelung von $f_p(\varrho)$ in eine Fouriersche Reihe kennen gelernt haben, handelt es sich noch darum, diese Function $f_p(\varrho)$ selbst zu bestimmen.

Ich erinnere hier an eine Abhandlung*) meines hochverehrten Lehrers, des H. Hofrath Schlömilch, in welcher folgende Theoreme bewiesen werden:

Ist $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) = f'(u + it)$ zwischen den Grenzen für u, 0 und ∞, für t, $-\infty$ und $+\infty$, nirgends unendlich, so ist

1, $\frac{1}{2} f(0) + f(1) \cos x + f(2) \cos 2x + f(3) \cos 3x + \ldots$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{(\pi - x)t} + e^{-(\pi - x)t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{f(-it) - f(+it)}{2i} dt$$

$$\pi \geqq x \geqq 0.$$

2, $f(1) \sin x + f(2) \sin 2x + f(3) \sin 3x + \ldots$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{(\pi - x)t} - e^{-(\pi - x)t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{1}{2} [f(-it) + f(+it)] dt$$

$$\pi > x > 0.$$

Schreibt man in diesen beiden Formeln für x $\frac{\pi}{h_p} \varrho$ und addirt dann beide, so erhält man unter der Bedingung

$$h_p > \varrho > 0,$$

wenn man noch die f durch angehängte Indices sondert, die Gleichung:

$$\frac{1}{2} f_1(0) + f_1(1) \cos \frac{\pi}{h_p} \varrho + f_1(2) \cos 2 \frac{\pi}{h_p} \varrho + f_1(3) \cos 3 \frac{\pi}{h_p} \varrho + \ldots$$

$$+ f_2(1) \sin \frac{\pi}{h_p} \varrho + f_2(2) \sin 2 \frac{\pi}{h_p} \varrho + f_2(3) \sin 3 \frac{\pi}{h_p} \varrho + \ldots$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{(h_p - \varrho)\frac{\pi}{h_p} t} + e^{-(h_p - \varrho)\frac{\pi}{h_p} t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{f_1(-it) - f_1(+it)}{2i} dt$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{(h_p - \varrho)\frac{\pi}{h_p} t} - e^{-(h_p - \varrho)\frac{\pi}{h_p} t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{f_2(-it) + f_2(+it)}{2} dt.$$

*) Développement de deux formules summatoires. Journal von Crelle Bd. 42. pag. 125.

Setzen wir in der Gleichung 20, pag. 144

$$C_0 = \frac{1}{2}\varphi_1(0);\; C_n = \varphi_1(n);\; D_n = \varphi_2(n)$$

und zur Abkürzung wenn $h_p > \varrho > 0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{(h_p-\varrho)\frac{\pi}{h_p}t} + e^{-(h_p-\varrho)\frac{\pi}{h_p}t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{\varphi_1(-it) - \varphi_1(+it)}{2i}\, dt = V_1$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{(h_p-\varrho)\frac{\pi}{h_p}t} - e^{-(h_p-\varrho)\frac{\pi}{h_p}t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{\varphi_2(-it) + \varphi_2(+it)}{2}\, dt = V_2$$

so können wir, so lange

$$h_p > \varrho > 0$$

die Gleichung 20, pag. 144 auch schreiben:

$$f_p(\varrho) = V_1 + V_2$$

Ist dagegen

$$-h_p < \varrho < 0$$

so ist, wie leicht ersichtlich

$$f_p(\varrho) = V_1 - V_2.$$

Deuten wir den Werth von $f_p(\varrho)$ für ein positives ϱ durch $f_p(+\varrho)$, für ein negatives ϱ durch $f_p(-\varrho)$ an, so ist auch der Werth von $f_p(\varrho)$, soweit er uns überhaupt interessiren kann, bestimmt durch die Gleichungen:

4, $f_p(+\varrho) + f_p(-\varrho) = 2\,V_1.$

5, $f_p(+\varrho) - f_p(-\varrho) = 2\,V_2.$

6, $$f_p(0) = \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \cdot \frac{\varphi_1(-it) - \varphi_1(+it)}{2i}\, dt.$$

Hiermit ist $f_p(\varrho)$ bestimmt, so lange $\varphi_1'(z) = \varphi_1'(u + it)$ und $\varphi_2'(z) = \varphi_2'(u + it)$ nicht unendlich werden für einen Werth von u zwischen 0 und $+\infty$, von t, zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Die speciellen Fälle, wo diese Bedingungen nicht stattfinden, können hier bei unserer allgemeinen Betrachtung nicht weiter discutirt werden, sie werden sich aber im Allgemeinen durch eine der pag. 141 angewandten ähnliche Methode lösen lassen.

§ 8.

Schlussbemerkungen.

Sollte die Aufgabe in der Fassung der pag. 125 unlösbar sein, so wird sie doch nach dem, was über Symmetrieverhältnisse gesagt wurde, immer lösbar sein, wenn die anzunehmenden elektrischen Massen als irgend wie symmetrisch zur Rotationsaxe angeordnet im Innern der einzelnen Conductoren angenommen werden. Es ist dann statt der pag. 128 eingeführten Function $f_p(\varrho)$ eine Function $f_p(\varrho, \sigma)$ zu bestimmen, wenn ϱ und σ die Coordinaten eines Punktes im Innern der Meridiancurven des p^{ten} Conductors sind. Denkt man sich $f_p(\varrho, \sigma)$ ebenfalls in eine Fourier'sche Reihe entwickelt, so ist dann auch die Bestimmung von $f_p(\varrho, \sigma)$ ganz analog der Bestimmung von $f_p(\varrho)$ ausführbar.

Diese Methode ist immer anzuwenden, wenn die von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe umschlossenen Conductoren einander einschliessen.

Es ist dann auf diesem Wege weitergehend nicht besonders schwierig, die elektrische Vertheilung auf einem beliebigen Conductorensystem zu bestimmen.

Das Schwierigste bei der Lösung des vorgelegten Problems ist immer die Beschaffung der pag. 142 eingeführten Function W. Die genauere Bestimmung dieser Functionen muss einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Die Wichtigkeit der Lösung des vorgelegten Problems sowohl für strömende, als auch für statische Elektricität, bedarf für den Physiker zu ihrer Begründung keiner Worte.

Endlich bemerke ich noch, dass für mich bei Abfassung dieser Arbeit namentlich der Gesichtspunkt massgebend war, für das Experiment eine solche theoretische Grundlage zu erlangen, dass die Ergebnisse des Experimentes mit beliebiger Genauigkeit vorher bestimmt werden können. Es galt daher auch für mich nicht z. B. bestimmte Integrale zu entwickeln, sondern nur anzugeben, indem dann jeder auf höchst einfachem Wege, z. B. mit Hülfe eines Planimeters, den Werth des bestimmten Integrales beliebig genau sich verschaffen kann.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Lineare Construction des Punktepaares, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren gleichzeitig harmonisch ist. Von Dr. Grelle. Angesichts des bekannten Satzes über die Eigenschaften der Durchschnitte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegt der Gedanke nahe, das Punktepaar, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren gleichzeitig harmonisch ist, im Fünfeck zu suchen. Und in der That, zerlegt man ein Fünfeck auf zweierlei Art durch eine Diagonale so je in ein Dreieck und ein Viereck, dass die beiden Vierecke eine Diagonale gemeinschaftlich haben, vervollständigt die Vierecke, so wird man auf dieser gemeinsamen Diagonale zwei Punktepaare erhalten, welche zu dem Paare, das die durch jene Diagonale verbundenen Ecken des Fünfecks bilden, gleichzeitig harmonisch sind. Um demnach aus jenen beiden ersten Paaren das dritte construiren zu können, muss man versuchen, aus den gegebenen vier Punkten das Fünfeck herzustellen. Untersucht man zu diesem Zwecke die Lage verschiedener Linien und Punkte im Fünfeck, so gelangt man zu den gewissen Gesetzen, die in der That die gestellte Aufgabe lösen. Diese Gesetze sollen in dem Folgenden mitgetheilt werden, ohne jedoch dabei das Fünfeck als Ausgangspunkt zu nehmen; es würde nämlich sonst eine so grosse Fülle von Linien und Punkten in Betracht zu ziehen sein, dass ich fürchten müsste, die Geduld des Lesers zu sehr in Anspruch zu nehmen.

Die Gleichungen der Punkte des gesuchten Paares seien $a = 0$, $b = 0$, und die der Punkte der gegebenen Paare:

$$(1) \qquad \begin{aligned} p &\equiv a - \lambda b = 0 \qquad & r &\equiv a - \varkappa b = 0 \\ q &\equiv a + \lambda b = 0, \qquad & s &\equiv a + \varkappa b = 0; \end{aligned}$$

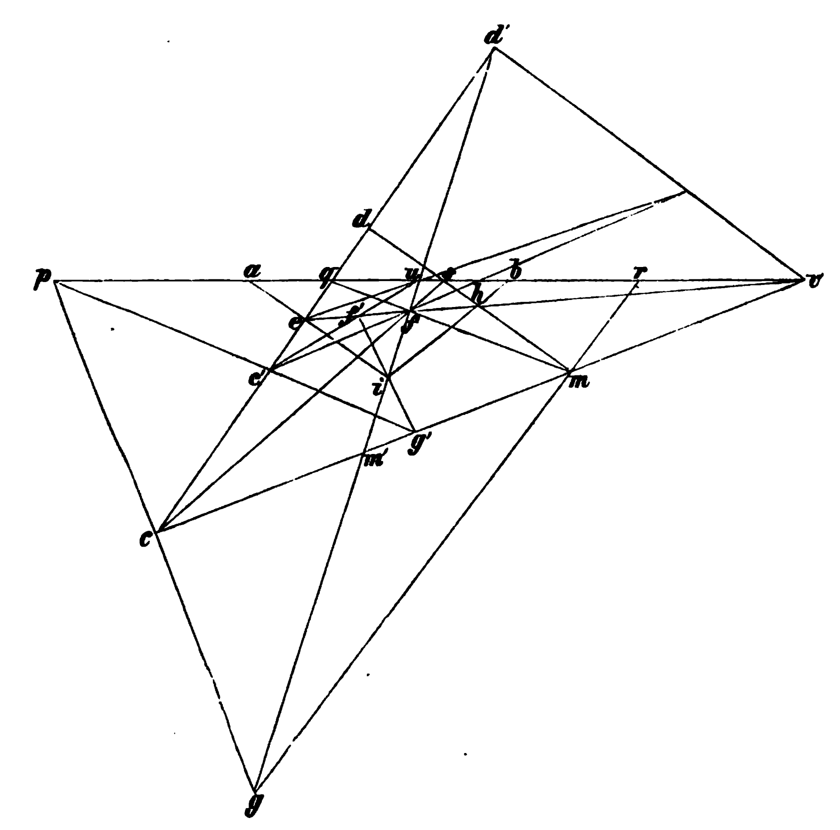
ausserdem seien die Gleichungen irgend zweier Punkte ausserhalb der Geraden, auf welcher jene sechs Punkte liegen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &c = 0 \\ &m \equiv Aa + Bb + Cc = 0. \quad \text{(Siehe die Figur.)} \end{aligned}$$

Wir ziehen von C aus je eine Gerade durch p und q, von m aus je

eine Gerade durch r und s. Die cq und ms schneiden sich in einem Punkte d, als dessen Gleichung man leicht findet:

$$(3)\qquad d \equiv \frac{A\varkappa - B}{\varkappa - \lambda}(a + \lambda b) + Cc \equiv \frac{A\lambda - B}{\varkappa - \lambda}(a + \varkappa b) + Aa + Bb + Cc = 0.$$



Durch Vertauschung des $+\varkappa$ mit $-\varkappa$, des $+\lambda$ mit $-\lambda$ geht hieraus sofort die Gleichung des Durchschnitts g der pc und mr hervor mit:

$$(4)\qquad g \equiv \frac{A\varkappa + B}{\varkappa - \lambda}(a - \lambda b) + Cc = 0,$$

während man die Gleichung des Durchschnitts f der cs und mq dadurch erhält, dass man in (3) $\varkappa$ mit λ und umgekehrt vertauscht. Man bekommt:

$$(5)\qquad f \equiv -\frac{A\lambda - B}{\varkappa - \lambda}(a + \varkappa b) + Cc = 0.$$

Und endlich folgt noch aus (3), dass die Gleichung des Punktes e, der mit d ein zu c und q harmonisches Paar bildet:

$$(6)\qquad e \equiv \frac{A\varkappa - B}{\varkappa - \lambda}(a + \lambda b) - Cc = 0,$$

und die des Punktes h, der mit d ein zu s und m harmonisches Paar bildet:

$$(7) \qquad h \equiv -\frac{A\lambda - B}{\varkappa - \lambda}(a + \varkappa b) + Aa + Bb + Cc = 0$$

sein muss.

Es wird behauptet, dass die Geraden, welche bez. a mit e, und b mit h verbinden, sich in einem Punkte der fg schneiden müssen.

Um dieses zu zeigen, stellen wir die Gleichung des Durchschnitts i der ae und fg her. Zu diesem Zwecke sind drei Constanten ϱ, σ, τ so zu bestimmen, dass:

$$\varrho a + \sigma e \equiv \tau g + f$$

stattfindet. Man wird finden:

$$\varrho = A\frac{\varkappa + \lambda}{\lambda}, \quad \sigma = -\frac{\varkappa + \lambda}{2\lambda}, \quad \tau = \frac{\varkappa - \lambda}{2\lambda},$$

woraus sich als die gesuchte Gleichung des Punktes i ergiebt:

$$(8) \qquad i \equiv -\frac{A\lambda - B}{\varkappa - \lambda}(a + \varkappa b) + Aa - Bb + Cc = 0.$$

Aus (7) und (8) folgt aber:

$$h - i \equiv 2Bb,$$

womit obige Behauptung erwiesen ist. Wenn sich demnach eine zweite Gerade finden lässt, die ebenso wie die fg den Punkt i enthält, so ist damit die gestellte Aufgabe gelöst.

Zur Bestimmung dieser zweiten Geraden bedarf es zunächst noch eines drittten Punktpaares, ebenfalls zum Paare a, b harmonisch. Dieses ist in der bis jetzt gezeichneten Figur bereits vorhanden; denn da aus (4) und (5) folgt:

$$f - g \equiv \frac{\lambda + \varkappa}{\lambda - \varkappa}(Aa - Bb),$$

und ausserdem:

$$m - Cc \equiv \qquad Aa + Bb$$

ist, so schneiden die fg und cm die Gerade der gegebenen vier Punkte in den beiden Punkten u und v der Gleichungen:

$$u \equiv Aa - Bb = 0$$
$$v \equiv Aa + Bb = 0,$$

d. i. in zwei Punkten, die ein zu a, b harmonisches Paar bilden.

Verfährt man demnach mit den Paaren u, v und p, q ebenso, wie vorhin mit r, s und p, q, wobei nur darauf Acht zu geben ist, dass der Punt e bei der letzten Construction dieselbe Rolle spielt wie bei der vorherigen, so ist i und damit auch das Paar a, b auf lineare Weise festgelegt.

Mit dem geringsten Aufwand von Geraden wird wohl die Sache

erledigt, wenn man das durch u und v zu legende Linienpaar von m_1 (siehe die Figur) zieht. Die $m_1 u$ schneidet die cd in d_1, und ist jetzt der Punkt c_1, von welchem aus das zweite Linienpaar durch p und q zu legen ist, auf der $d_1 c$ so zu bestimmen, dass d_1, e zu q, e_1 harmonisch wird. Alsdann findet man leicht die Punkte g_1 und f_1, damit die $g_1 f_1$, den Punkt i und schliesslich die Punkte a und b.

Auf die Bestimmung zweier Punkte der letzten Art läuft die Lösung verschiedener, die Kegelschnitte betreffender Probleme hinaus und zwar namentlich die Construction eines Kegelschnitts aus 4 Punkten und 1 Tangente, 4 Tangenten und 1 Punkte, 3 Punkten und 2 Tangenten, 3 Tangenten und 2 Punkten, welche, falls die gegebenen Punkte nicht in den gegebenen Tangenten liegen, bekanntlich bislang nur mit Hülfe eines Kreises ausführbar war, nunmehr aber in linearer Weise geschehen kann. Es soll dieses hier an den beiden ersten jener vier Aufgaben gezeigt werden.

I. Gegeben 1 Tangente und 4 Punkte, von denen keiner der Berührungspunkt der gegebenen Tangente ist.

Verbindet man je zwei und zwei der gegebenen Punkte in der Weise, dass ein dem Kegelschnitte eingeschriebenes Viereck entsteht, bezeichnet die Gleichungen der Seiten dieser Figur der Reihe nach mit:

$$(9) \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &\equiv Aa + Bb + Cc = 0, \end{aligned}$$

so ist bekanntlich die Gleichung des zu suchenden Kegelschnittes:

$$(10) \qquad K\,ac + bd = 0,$$

wo K eine Constante bedeutet, die in Rücksicht auf die Bedingung, dass die gegebene Gerade, etwa der Gleichung:

$$(11) \qquad t \equiv A_1\, a + B_1 b + C_1 c = 0$$

die Curve berühren soll, zu bestimmen ist. Setzt man zu dem Zweck den Werth von d in (10) ein:

$$(12) \qquad K\,ab + Aab + Bb^2 + Cbc = 0$$

und eliminirt darauf aus der Kegelschnittsgleichung in dieser Form und aus (11) eine der Variabeln, z. B. b, so entsteht unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} A_1 B - AB_1 &= p \\ BC_1 - B_1 C &= q \end{aligned}$$

die nach a und c quadratische Gleichung:

$$(13) \qquad A_1 p a^2 + ac\,(B_1^2 K + C_1 p + A_1\, q) + C_1 q c^2 = 0,$$

aus der man durch Auflösung nach a zwei Gleichungen von der Form:

$$a - \lambda c = 0, \cdot a - \mu c = 0$$

erhält. Da diese, ihrer Entstehung zufolge, den Geraden angehören, welche die beiden Punkte, die der Kegelschnitt und die gegebene Gerade $t = 0$ gemeinsam haben, je mit dem Durchschnitte der $a = 0$ und $c = 0$ verbinden, diese beiden Punkte aber zusammenfallen, indem $t = 0$ eine Tangente sein soll, so muss $\lambda = \mu$ sein, d. h. muss (13) gleiche Wurzeln haben. Hierfür ist die Bedingung:

$$(14) \qquad (B_1^2 K + C_1 p + A_1 q)^2 = 4 A_1 C_1 pq,$$

welche K bestimmt. Durch Auflösung nach K erhält man dafür aber zwei verschiedene Werthe, woraus zu schliessen ist, dass es zwei Kegelschnitte der verlangten Art giebt. Die Lage der Punkte, worin diese beiden Curven die $t = 0$ berühren, ist leicht zu erkennen, wenn die beiden aus (14) für K folgenden Werthe in (13) eingeführt werden. Man erhält alsdann als Gleichungen der Geraden, welche die Berührungspunkte je mit dem Durchschnitt der $a = 0$, $c = 0$ verbinden:

$$(15) \qquad a + c\sqrt{\frac{C_1 q}{A_1 p}} = 0, \quad a - c\sqrt{\frac{C_1 q}{A_1 p}} = 0,$$

d. i. ein zu $a = 0$, $c = 0$ harmonisches Linienpaar. Was für irgend ein Paar gegenüberliegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks bewiesen ist, gilt für jedes. Es ist demnach gezeigt, dass die beiden Berührungspunkte ein Paar bilden, gleichzeitig harmonisch zu den beiden Punktepaaren, worin je zwei gegenüberliegende Seiten des eingeschriebenen Vierecks die gegebene Tangente schneiden.

Hiermit ist die gestellte Aufgabe als gelöst zu betrachten, da nach dem Satz vom Pascal'schen Sechseck jetzt jede beliebige Anzahl von Punkten, die den gesuchten Kegelschnitten angehören, construirt werden kann.

II. Gegeben 4 Tangenten und 1 Punkt, der in keiner der Tangenten liegt.

Die Formeln der letzten Betrachtung beziehen sich ohne Weiteres auf diesen Fall, wenn man sich unter $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ jetzt die Gleichungen irgend dreier aufeinander folgender Eckpunkte des aus den gegebenen Tangenten gebildeten umschriebenen Vierecks denkt. Alsdann ist $d = 0$ die Gleichung der vierten Ecke dieser Figur, $t = 0$ die des gegebenen Punktes, und ist (12) die Gleichung zwischen den Dreieckcoordinaten der Tangenten des dem Viereck eingeschriebenen Kegelschnitts. Folglich sind $a - \lambda c = 0$ und $a - \mu c = 0$ die Gleichungen zweier Punkte auf der Diagonalen ac so gelegen, dass ihre geradlinigen Verbindungen mit A Tangenten sind, sodass, weil f ein Kegelschnittspunkt ist, wieder wie vorhin $\mu = \lambda$ sein muss. Man hat also

wieder die für K quadratische Bestimmungsgleichung (14), woraus, ebensowie vorhin, auf die Existenz zweier Curven der verlangten Art zu schliessen ist. Und zwar haben diese wegen (15) solche Lage, dass ihre Tangenten in dem gegebenen Punkte t ein Linienpaar bilden, gleichzeitig harmonisch zu den beiden Linienpaaren, die man durch Verbindung des Punktes t je mit zwei gegenüberliegenden Ecken des umschriebenen Vierecks erhält.

Hannover, im Jannar 1868.

V. Ueber das grösste einer Ellipse einbeschriebene n-Eck. Von Dr. Grelle. Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ kann man als rechtwinklige Projektion des Kreises $x^2+y^2=a^2$ ansehn, dessen Ebene die der Ellipse in ihrer grossen Achse unter dem Winkel $arc\ cos\left(\frac{b}{a}\right)$ schneidet. Folglich ist das grösste der Ellipse eingeschriebene n-Eck die Projektion eines grössten dem Kreis eingeschriebenen n-Ecks. Dieses lässt sich folgendermassen bestimmen.

Sind die Coordinaten der n Eckpunkte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ von der positiven x-Achse nach links herumgerechnet $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \ldots . x_n, y_n$, dann ist der Inhalt des eingeschriebenen Polygons:

$$(1)\quad i=\tfrac{1}{2}\left[y_1 x_2-y_2 x_1+y_2 x_3-y_3 x_2+y_3 x_4-y_4 x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots + y_{n-1} x_n-y_n x_{n-1}+y_n x_1-y_1 x_n\right],$$

wenn die Bedingungen erfüllt werden:

$$(2)\quad \begin{array}{c} x_1^2+y_1^2=a^2 \\ x_2^2+y_2^2=a^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^2+y_n^2=a^2 \end{array}$$

Um das Maximum von i zu erhalten, sind demnach die partiellen ersten Abgeleiteten nach $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ von

$$(3)\quad \begin{aligned} u=\tfrac{1}{2}\left[y_1 x_2-y_2 x_1+y_2 x_3-y_3 x_2\ldots\ldots+y_n x_1-y_1 x_n\right] \\ +\varkappa_1\left[x_1^2+y_1^2-a^2\right]+\varkappa_2\left[x_2^2+y_2^2-a^2\right]+\ldots\ldots \\ +\varkappa_n\left[x_n^2+y_n^2-a^2\right], \end{aligned}$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots . \varkappa_n$ vor der Hand beliebige Constante bedeuten, einzeln gleich Null zu setzen. Dies giebt:

$$(4)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{-y_2+y_n}{2}+2\varkappa_1 x=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{y_1-y_4}{2}+2\varkappa_2 x_2=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{y_2-y_4}{2}+2\varkappa_3 x_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}=\frac{y_{n-2}-y_n}{2}+2\varkappa_{n-1} x_{n-1}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{y_{n-1}-y_1}{2}+2\varkappa_n x_n=0 \end{cases} \qquad (5)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{x_2-x_n}{2}+2\varkappa_1 y_1=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_2}=\frac{-x_1+x_3}{2}+2\varkappa_2 y_2=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_3}=\frac{-x_2+x_4}{2}+2\varkappa_3 y_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}=\frac{-x_{n-2}+x_n}{2}+2\varkappa_{n-1} y_{n-1}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_n}=\frac{-x_{n-1}+x_1}{2}+2\varkappa_n y_n=0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\varkappa_1$ aus den beiden ersten, von $\varkappa_2$ aus den beiden zweiten u. s. w. Gleichungen der Systeme (4) und (5) erhält man:

$$(6)\quad \begin{aligned} (-y_2+y_n)\,y_1 &= (x_2-x_n)\,x_1 \\ (y_1-y_3)\,y_2 &= (-x_1+x_3)\,x_2 \\ (y_2-y_4)\,y_3 &= (-x_2+x_4)\,x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (y_{n-2}-y_n)\,y_{n-1} &= (-x_{n-2}+x_n)\,x_{n-1} \\ (y_{n-1}-y_1)\,y_n &= (-x_{n-1}+x_1)\,x_n \end{aligned}$$

Die Summe von irgend $(n-1)$ dieser Gleichungen (6) ist immer die n^{te}; zur Bestimmung der $2n$ Unbekannten $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ hat man also nur $2n-1$ Gleichungen [(2) und (6)], woraus hervorgeht, dass es unendlich viele einem Kreis eingeschriebene grösste n-Ecke giebt. Ihre Beschaffenheit ist leicht zu erkennen, wenn man aus (6) durch Auflösung der Klammern und nachherige Division mit a^2 zunächst zieht:

$$(7)\quad \frac{y_1}{a}\frac{y_2}{a}+\frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a}=\frac{y_2}{a}\frac{y_3}{a}+\frac{x_2}{a}\frac{x_3}{a}=\frac{y_3}{a}\frac{y_4}{a}+\frac{x_3}{a}\frac{x_4}{a} =\ldots=\frac{y_{n-1}}{a}\frac{y_n}{a}+\frac{x_{n-1}}{a}\frac{x_n}{a}=\frac{y_n}{a}\frac{y_1}{a}+\frac{x_n}{a}\frac{x_1}{a},$$

und darauf in diese Bedingungsgleichung für die Coordinaten der Eckpunkte eines grössten Kreis-n-Ecks die Winkel einführt, welche die Halbmesser jener Eckpunkte mit der positiven x-Achse bilden. Werden diese nämlich der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bezeichnet, so lässt sich (7) in der Form geben:

$$(8)\quad \cos(\alpha_2-\alpha_1)=\cos(\alpha_3-\alpha_2)=\cos(\alpha_4-\alpha_3)=\ldots=\cos(\alpha_n-\alpha_{n-1}) = \cos(2\pi-\alpha_n+\alpha_1),$$

woraus

$$\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\alpha_4-\alpha_3=\ldots=\alpha_n-\alpha_{n-1}=2\pi-\alpha_n+\alpha_1,$$

und in weiterer Folge zu schliessen ist, dass von allen einem Kreis eingeschriebenen n-Ecken das **regelmässige** das grösste sein muss.

Um die Lage der Projektionen der Eckpunkte eines solchen regelmässigen Polygons auf die Ellipsenebene kennen zu lernen, nehmen wir an, dass von irgend einem Kreispunkte der Abscisse x_1 aus in dem Kreise ein regelmässiges n-Eck construirt wäre. Wird der Winkel des Halbmessers dieses Punktes mit der positiven x-Achse φ genannt, dann sind die Coordinaten der Eckpunkte dieses Kreispolygons der Reihe nach:

$$x_1 = a\cos\varphi,\quad a\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right),\quad a\cos\left(\varphi+2\,\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$y_1 = a\sin\varphi,\quad a\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right),\quad a\sin\left(\varphi+2\,\frac{2\pi}{n}\right),\ldots$$

demnach die der Eckpunkte eines grössten einer Ellipse eingeschriebenen n-Ecks:

$$x_1 = a\cos\varphi,\quad a\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right),\quad a\cos\left(\varphi+2\,\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$y_1 = b\sin\varphi,\quad b\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right),\quad b\sin\left(\varphi+2\,\frac{2\pi}{n}\right)\ldots,$$

woraus sich ohne Mühe die folgende Construktion eines grössten Ellipsen-n-Ecks ableitet: Man beschreibe um die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ den Kreis $x^2+y^2=a^2$ und construire in letztem irgend ein regelmässiges n-Eck; die Ordinaten der Eckpunkte dieser Figur schneiden alsdann die Ellipse in den Eckpunkten des gesuchten Vielecks. In einigen speziellen Fällen z. B. denen des Dreiecks und Vierecks kann man den Kreis vermeiden.

Nach Vorigem sind nämlich die Coordinaten der Eckpunkte P_1, Q_1, R_1 eines grössten Ellipsendreiecks:

$$P_1:\begin{cases}x_1 = a\cos\varphi\\ y_1 = b\sin\varphi,\end{cases}\quad Q_1:\begin{cases}-a\cos(60^0-\varphi)\\ +b\sin(60^0-\varphi),\end{cases}\quad R_1:\begin{cases}-a\cos(60^0+\varphi)\\ -b\sin(60^0+\varphi).\end{cases}$$

Hieraus erhält man als Gleichung einer durch P_1 und den Coordinaten-Anfang A gelegten Geraden, wenn noch die Projektion des Winkels φ auf die Ellipsen-Ebene mit α bezeichnet wird, sodass $tg\varphi=\frac{a}{b}tg\alpha$ sein muss:

$$y = tg\alpha\cdot x$$

und als Gleichung der durch Q_1 und R_1 gelegten Geraden:

$$y = -\frac{b^2}{a^2\,tg\alpha}x-\frac{b}{2\sin\varphi}.$$

Diese beiden Geraden schliessen demnach den Winkel irgend eines Paares conjugirter Durchmesser ein; und da sie sich ausserdem, wovon man sich durch eine einfache Rechnung leicht überzeugt, im Punkte der Abscisse $-\frac{x_1}{2}$ schneiden, so gelangt man in folgender Weise zu einem grössten Ellipsendreieck:

Man ziehe irgend ein Paar conjugirter Durchmesser: $P_1 AS_1$ und Q_2AR_2, und durch den Halbirungspunkt M der AS_1 eine Sehne Q_1MR_1 parallel der Q_2AR_2; dann sind P_1, Q_1 und R_1 die Ecken der verlangten Figur. (Die singulären Fälle, in denen die grosse und kleine Achse der Ellipse als die betreffenden conjugirten Durchmesser genommen werden, hat Sohncke in seiner Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung als Lösungen des gestellten Problems (s. II. Aufl. pag. 112) angegeben.)

Die Coordinaten der Eckpunkte eines grössten Ellipsen-Vierecks sind:

$$x_1 = a\cos\varphi, \quad -a\sin\varphi, \quad -a\cos\varphi, \quad +a\sin\varphi,$$
$$y_1 = b\sin\varphi, \quad +b\cos\varphi, \quad -b\sin\varphi, \quad -b\cos\varphi,$$

woraus sich als Gleichungen der Geraden, die je zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, ergeben:

$$y = \quad tg\alpha \cdot x$$
$$y = -\frac{b^2}{a^2\, tg\alpha}\cdot x$$

Dies beweiset, dass die vier Eckpunkte eines grössten einer Ellipse eingeschriebenen Vierecks die Punkte sind, in denen irgend ein Paar conjugirter Durchmesser die Ellipse schneidet.

Hannover, im Januar 1868.

VI. Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie. Es ist bekannt, dass die kürzeste Linie, welche man auf einer Oberfläche zwischen zwei Punkten ziehen kann, die characteristische Eigenschaft besitzt, dass ihre Schmiegungsebene in jedem Punkte durch die Normale der Oberfläche geht.

Wenn man diese Eigenschaft auf bekannte Weise projectivisch verallgemeinert (cf. Salmon, Kegelschnitte Art. 478 ff.), so gelangt man zu einem Problem, welches die Behandlung in homogenen Coordinaten zulässt und also lautet:

> Auf einer Fäche n^{ter} Ordnung, deren Gleichung sei $u = 0$, soll eine Curve so gezogen werden, dass für jeden ihrer Punkte der Pol der Tangentenebene von $u = 0$ in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung $v = 0$ auf der Schmiegungsebene liege.

Wenn wir die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung $v = 0$ schreiben in der Form

$$v \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

indem wir der Kürze wegen als Coordinatentetraeder ein Polartetraeder

von $v = 0$ wählen, so sind die Coordinaten des Pols der Tangentenebene von u, wenn wir

$$u \cdot = \frac{1}{n} \frac{du}{dx_i}$$

setzen, wie bekannt u_1, u_2, u_3, u_4; und es wird also die Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist mit Hülfe der Gleichung $u = 0$ zweimal zu integiren. Um zu einem ersten Integral zu gelangen, multipliciren wir die obige Gleichung mit der Determinante

$$(2) \qquad R = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix},$$

welche gleich Null gesetzt die Differentialgleichung der projectivisch verallgemeinerten Krümmungslinien ist. Führt man die Multiplication aus, beachtet man die Gleichungen

$$\Sigma u_i x_i = 0, \quad \Sigma u_i dx_i = 0$$

sowie die aus ihnen durch Differentiation folgenden

$$\Sigma du_i x_i = 0, \quad \Sigma u_i d^2x_i = - \Sigma du_i dx_i,$$

und entwickelt die Determinante, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{\Sigma x_i d^2x_i \cdot \Sigma x_i dx_i - \Sigma x_i^2 \cdot \Sigma dx_i d^2x_i}{\Sigma x_i^2 \Sigma dx_i^2 - (\Sigma x_i^2 dx_i)^2} + \frac{\Sigma du_i d^2x_i}{\Sigma u_i dx_i} + \frac{\Sigma u_i du_i}{\Sigma u_i^2} = 0.$$

Das erste Glied der linken Seite ist ein vollständiges Differential, ebenso das dritte, das mittlere wird es auch, wenn die Gleichung besteht

$$\Sigma du_i d^2x_i = \Sigma d^2u_i dx_i.$$

Unter dieser Voraussetzung liefert also die Integration der vorigen Gleichung ein erstes Integral in der Form

$$(3) \qquad \frac{\Sigma du_i dx_i \cdot \Sigma u_i^2}{\Sigma x_i^2 \Sigma dx_i^2 - (\Sigma x_i dx_i)^2} = Const.$$

Jene Voraussetzung ist erfüllt, wenn $u = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung ist und in diesem Falle können wir auch die zweite Integration ausführen und zwar indem man die elliptischen Coordinaten, welche bei der kürzesten Linie die Lösung liefern, in entsprechender Weise verallgemeinern, wie dies mit dem Probleme selbst geschehen ist.

Wir denken uns die abwickelbare Fläche der den beiden Flächen $u = 0$ und $v = 0$ gemeinsamen Tangentenebenen construirt und schreiben nun in Ebenencoordinaten die Gleichung irgend einer Fläche zweiter Ordnung, welche jener abwickelbaren Fläche eingeschrieben ist,

$$w \equiv a_1\, y_1^2 + a_2\, y_2^2 + a_3\, y_3^2 + a_4\, y_4^2 = 0,$$

indem wir zum Coordinatentetraeder ein gemeinsames Polartetraeder der Flächen $u = 0$ und $v = 0$ wählen. Die Gleichung der Fläche $u = 0$ hat dann in Ebenencoordinaten die Form $w + \lambda\, v = 0$ und lautet in Punktcoordinaten

$$\frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 + \lambda} + \frac{x_4^2}{a_4 + \lambda} = 0. \tag{4}$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen, wie diese Gleichung zeigt, drei Flächen der Schaar, deren Parameter wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nennen wollen. Es ist klar, dass, wenn für einen Punkt diese Bezeichnung festgestellt ist, es nicht zweifelhaft sein wird, wie man in einem andern Punkt die Wurzeln zu bezeichnen hat, wenn man nur von dem einen Punkt zum andern gelangen kann, ohne die abwickelbare Fläche zu durchschneiden. Sind die reellen Grössen a so bezeichnet, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

so erkennt man leicht, dass die Wurzeln liegen zwischen den Grenzen

die grösste	$-a_1$ und $-a_2$
die mittlere	$-a_2$ und $-a_3$
die kleinste	$-a_3$ und $-a_4$

Diese drei Parameter λ führen wir nun als neue Coordinaten ein. Der Ausdruck der Coordinaten x durch diese neuen findet sich leicht.

Denn aus den Gleichungen

$$\Sigma \frac{x_i^2}{a_i + \lambda_h} = 0, \quad (h = 1, 2, 3)$$

ersieht man, dass die x_2 proportional sind den Determinanten, welche man aus dem System der Coefficienten dieser Gleichungen bilden kann. Rechnet man diese Determinanten aus und zieht die allen x^2 gemeinsamen Factoren in den Multiplicator ϱ, so findet sich

$$(5)\quad \begin{cases} \varrho\, x_1^2 = (a_2 - a_3)\,(a_2 - a_4)\,(a_3 - a_4)\,(a_1 + \lambda_1)\,(a_1 + \lambda_2)\,(a_1 + \lambda_3) \\ \varrho\, x_2^2 = -(a_3 - a_4)\,(a_3 - a_1)\,(a_4 - a_1)\,(a_2 + \lambda_1)\,(a_2 + \lambda_2)\,(a_2 + \lambda_3) \\ \varrho\, x_3^2 = (a_4 - a_1)\,(a_4 - a_2)\,(a_1 - a_2)\,(a_3 + \lambda_1)\,(a_3 + \lambda_2)\,(a_3 + \lambda_3) \\ a\, x_4^2 = -(a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3)\,(a_2 - a_3)\,(a_4 + \lambda_1)\,(a_4 + \lambda_2)\,(a_4 + \lambda_3) \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst

$$\varrho\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = (a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3)\,(a_1 - a_4)\,(a_2 - a_3)\,(a_2 - a_4)\,(a_3 - a_4) = P\,(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$$

und also durch Differentation

$$d\varrho\, \Sigma\, x_i^2 + 2\, \varrho\, \Sigma\, x_i\, dx_i = 0.$$

Aus den Gleichungen (4) ergibt sich ferner durch logarithmische Differentiation, Quadrirung und Addition

$$\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\right)^4 \cdot \Sigma\, x_i^2 + 4 \frac{d\varrho}{\varrho} \Sigma\, x_i\, dx_i + 4\, \Sigma\, dx_i^2 = \Sigma_i \Sigma_h \Sigma_k \frac{x_i^2\, d\lambda_h\, d\lambda_k}{(a_i + \lambda_h)\,(a_i + \lambda_k)}.$$

Setzt man hier für $\frac{d\varrho}{\varrho}$ seinen obigen Werth, so findet man das Vierfache des Nenners von (3)

$$4\,[\Sigma\, x_i^2\, \Sigma\, dx_i^2 - (\Sigma\, x_i\, dx_i)^2] = \Sigma\, x_i \cdot \Sigma_i \Sigma_h \Sigma_k \frac{x_i\, d\lambda_h\, d\lambda_k}{(a_i + \lambda_h)\,(a_i + \lambda_k)}.$$

Bezeichnen wir jetzt den constanten Parameter der Fläche $u = 0$ mit λ_1, so ist

$$u = \Sigma \frac{x_i^2}{a_i + \lambda_1}, \quad U_i = \frac{x_i}{a_i + \lambda_1}$$

also

$$\Sigma\, du_i\, dx_i = \Sigma \frac{dx_i^2}{a_i + \lambda_1}, \quad \Sigma\, u_i^2 = \Sigma \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_1)^2}$$

und man findet, da

$$\Sigma \frac{x_i\, dx_i}{a_i + \lambda_1} = 0,$$

ähnlich wie oben

$$4\, \Sigma \frac{dx_i^2}{a_i + \lambda_1} = \Sigma_i \Sigma_h \Sigma_k \frac{x_i^2\, d\lambda_h\, d\lambda_k}{(a_i + \lambda_1)\,(a_i + \lambda_h)\,(a_i + \lambda_k)}$$

wo $d\lambda_1 = 0$ zu setzen ist.

Ordnen wir die hier vorkommenden dreifachen Summen nach h und k, so haben wir also die folgenden einfachen Summen auszuwerthen:

$$\Sigma_i \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_h)\,(a_i + \lambda_k)} \text{ und } \Sigma_i \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_1)\,(a_i + \lambda_h)\,(a_i + \lambda_k)}.$$

Man sieht sofort, dass die erste Null ist, wenn h und k verschieden sind, und die zweite, wenn h und k untereinander und von 1 verschieden sind. Ferner findet sich, wenn wir

$$(a_1 + \lambda_h)\,(a_2 + \lambda_h)\,(a_3 + \lambda_h)\,(a_4 + \lambda_h) = A_h$$

setzen,

$$\varrho\, \Sigma \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_h)^2} = P\,(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) \frac{(\lambda_h - \lambda_k)\,(\lambda_h - \lambda_m)}{A_h},$$

$$\varrho\, \Sigma \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_k)\,(a_i + \lambda_h)^2} = P(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) \cdot \frac{\lambda_h - \lambda_m}{A_h}.$$

Da nun $d\lambda_1 = 0$ zu setzen ist, so findet sich mit Hülfe dieser Formeln unsere Differentialgleichung

$$d\lambda_2^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(CA_1 + \lambda_1 - \lambda_2)\,A_2} - d\lambda_3^2 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{(CA_1 + \lambda_1 - \lambda_3)\,A_3} = 0,$$

wo C die Constante der ersten Integration bezeichnet. Setzen wir $CA_1 + \lambda_1 = A$, so ist auch A eine Constante und unsere Differentialgleichung kann dann in zwei zerlegt werden, deren Integrale wir in

$$\int \frac{d\lambda_2}{\sqrt{A - \lambda_2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{\sqrt{A_2}} \pm \int \frac{d\lambda_3}{\sqrt{A - \lambda_3}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}}{\sqrt{A_3}} = Const.$$

zusammenfassen können. Die hier vorkommenden Integrale sind hyperelliptische erster Gattung, wie es bei der gewöhnlichen kürzesten Linie der Fall ist.

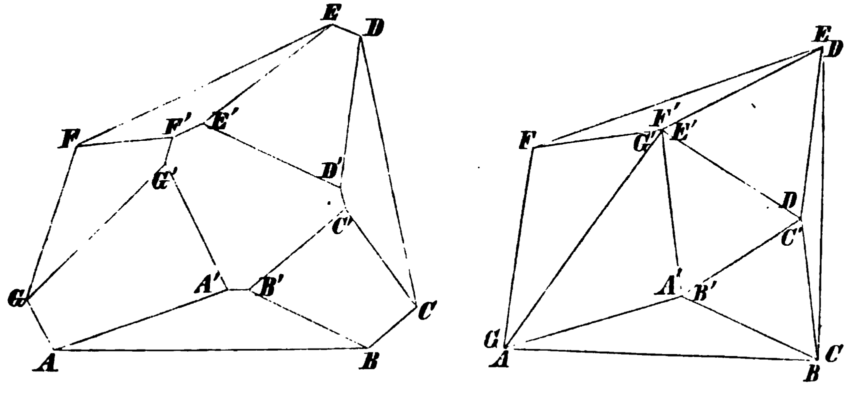
Wenn man in der Gleichung der verallgemeinerten Krümmungslinien $R = 0$ (wo R in (2) definirt ist) für die u und x ihre eben gebrauchten Ausdrücke substituirt, so geht sie nach Fortlassung eines nicht verschwindenden Factors über in

$$d\lambda_2 \cdot d\lambda_3 = 0.$$

Daher der Satz:

Durch jeden Punkt einer Fläche zweiter Ordnung A gehen zwei Flächen, welche die der Fläche A und einer andern zweiter Ordnung B gemeinsame Tangentenebene berühren. Jede Fläche dieser beiden Schaaren trifft A in einer Curve, welche die Eigenschaft haben, dass die Linien sich schneiden, die zwei benachbarte Punkte verbinden mit den Polen ihrer Tangentenebenen in Bezug auf die Fläche B.

VII. Ueber den Obelisken und das Prismatoid. Von den beiden in der Ueberschrift genannten Körpern hält man gewöhnlich das Prisma-



toid für allgemeiner, weil aus diesem der Obelisk entsteht, wenn man den beiden Parallelflächen des Prismatoides gleichviel Seiten giebt und

die entsprechenden Seiten parallel legt. Nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn Dr. A. Bauer, k. k. Gymnasiallehrer zu Pisek i. B., ist es aber ebenso richtig, das Prismatoid als einen speciellen Fall des Obelisken anzusehen. Wenn nämlich jede der Parallelflächen des Obelisken $m + n$ Seiten zählt und in der Grundfläche n Seiten, in der hierzu parallelen Fläche m Seiten auf blosse Punkte reducirt werden, so geht der Obelisk in ein Prismatoid über, dessen Grundfläche m und dessen obere Fläche n Seiten besitzt. Für den Fall $m = 4$, $n = 3$ mögen vorstehende Figuren zur Erläuterung dienen, welche die Grundrisse der betreffenden Körper darstellen. Schl.

VIII. Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. In einer unter dem vorstehenden Titel der Wiener Akademie eingereichten Abhandlung sucht Dr. Edm. Weiss zuerst die Ansicht zu begründen, dass wir in den Sternschnuppenringen nichts anderes als Auflösungsprodukte periodischer Kometen vor uns haben. Er wurde zu derselben durch die epochemachende Entdeckung Schiaparelli's geleitet, dass die Bahnen der periodischen Kometen 1862 III und 1866 I mit den Bahnen der bekannten periodischen Sternschnuppen in den Nächten vom 10.—12. August und 13.—14. November zusammenfallen. Davon ausgehend, ist es dem Verfasser gelungen, noch zwei andere Kometen aufzufinden, welche zwei andere periodische Sternschnuppenfälle veranlassen: es sind dies der eine Komet des Jahres 1861 (I) und der unter dem Namen Biela'scher bekannte; der erstere veranlasst die periodischen Sternschnuppenfälle um den 20. April, der letztere die um den 28. November.

Hierauf wird die Wirkung des Durchganges der Erde durch einen Meteorstrom an den Meteoren des Biela'schen Kometen specieller untersucht, weil diese Meteore unter allen bekannten weitaus die grössten Störungen durch die Erde erfahren. Es wird gezeigt, dass die Anziehung der Erde den Radiationspunkt zu einer ganzen Radiationsgegend von beträchtlichem Umfange ausdehnt, und dass ausserdem noch zahlreiche Meteore des Stromes, die noch in die Attractionssphäre der Erde gelangen, ohne jedoch auf sie herabzustürzen, in den Weltraum zerstreut werden, indem sie wieder in den Anziehungsbereich der Sonne gelangt, Bahnen um dieselbe beschreiben, deren Umlaufszeit zwischen $5^3/_4$ und 390 Jahren schwankt, während sie vor der Störung durch die Erde $6^3/_4$ Jahre betrug.

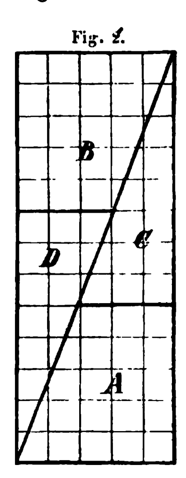
Endlich wird noch die mehrfach beobachtete Thatsache besprochen, dass die helleren Meteore in der Regel die entfernteren sind, eine Thatsache, die besonders bei den bekannten August- und Novembermeteoren bemerkt wurde, von denen die letzteren im Allgemeinen viel intensiver

leuchten und in bedeutenderen Höhen erscheinen und wieder verlöschen als die ersteren. Der Hauptgrund davon liegt nun darin, dass die Geschwindigkeit, mit der die Novembermeteore in die Erdatmosphäre eintreten, weit beträchtlicher ist, als die der Augustmeteore. Die ersteren bringen daher auch ein weit grösseres Quantum lebendiger Kraft mit, welches in Licht und Wärme umgesetzt wird, als die Meteore des Laurentiusstromes.

IX. Ein geometrisches Paradoxon. Um ad oculos zu demonstriren, dass das Schachbret nicht nur 64, sondern auch 65 Felder besitzt, schneide man dasselbe aus starkem Papier, zerlege es auf die in Fig. 1

Fig. 1.

Fig. 2.



angegebene Weise in vier, zu je zweien congruente Stücke A, B, C, D und setze diese zu einem Rechtecke zusammen, welches, wie Fig. 2 zeigt, die Grundlinie 5 und die Höhe 13 besitzt also 65 Felder enthält. — Wir theilen diese kleine Neckerei mit, weil die Aufsuchung des begangenen Fehlers eine hübsche Schüleraufgabe bildet und weil sich an die Vermeidung des Fehlers die Lösung und Construction einer quadratischen Gleichung knüpfen lässt. Schl.



V.

Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie.

(Fortsetzung.)

Von

Friedrich Robert Helmert,

Geodät zu Dresden.

III. Zur Theorie der Basisnetze.

40.

Eine Basis, AB, eines Dreiecksnetzes ist immer beträchtlich kleiner, als die grossen Dreiecksseiten und es entsteht also die Aufgabe, eine der letzteren möglichst scharf durch Triangulationen aus der Grundlinie AB abzuleiten. Man ist gewöhnt, als zweckmässigstes Multiplicationsnetz ein solches von der Form 19) zu betrachten, welches aus der Basis AB eine erste Viereckdiagonale $C_1 C_2$, aus dieser eine zweite $D_1 D_2$, etc. ableitet. Die letzte dieser Diagonalen ist die grosse, abzuleitende Dreiecksseite. Es wird in der That auch verhältnissmässig leicht sein, ein zur Basismessung passendes Terrain so auszusuchen, dass zunächst zu beiden Seiten der Basis zwei Punkte C liegen, welche weit bessere Fernsicht als die Endpunkte der Basis selbst gewähren. Doch kann auch der Fall eintreten, wo wenigstens einer der Endpunkte A oder B eine gute Fernsicht bietet und hier ist es fraglich, ob nicht ein Basisnetz von der Form 20), welches successive die Längen AC, CD, etc. bestimmt, bessere Dienste leisten würde, als das schon erwähnte Multiplicationsnetz.

41.

Aus der Basis $AB = 2c$ in Fig. 21. 22. 23. soll die gleiche Länge $AC = C_1 C_2 = 2s = a$, wobei AC immer grösser als AB genommen werden wird, mit Hilfe eines oder zweier, der Basis anliegenden Dreiecke gefunden werden.

In dem Dreiecke ABP, wo P in Fig. 21. irgend welche Lage auf der Peripherie eines mit dem Radius AC um A beschriebenen Kreises erhalten kann, wird auf die Bestimmung der Länge $AP = a$ den grössten Einfluss

nächst der Winkelmessung in B diejenige des Winkels P haben, welche den Schnitt III. in der Figur*) giebt.

Die Visur von B aus schneidet AP am günstigsten, wenn der Winkel P ein Maximum erreicht, d. h. in dem in B rechtwinkligen Dreiecke $AC'B$, wie sich leicht beweisen lässt. Gleichzeitig bekommt der Schnitt III. zu AC' die günstigste Neigung, nämlich die senkrechte. Jedoch ist hierbei die Genauigkeit der Visur von B aus an der Stelle P, sowie diejenige des Schnittes III. noch nicht die grösstmögliche; sie nimmt zu, je kleiner der Winkel bei A wird, je mehr die Seite $BP = b$ abnimmt. Daher ist zu vermuthen, dass die günstigste Dreiecksform nicht ABC', sondern die eines Dreieckes ist, dessen Spitze P zwischen C' und C'' liegt, wenn C'' den zweiten Durchschnitt des Kreises um A mit dem Kreise, welcher dem gleichschenkligen Dreiecke ABC umschrieben ist, bezeichnet. Für letztern Punkt (Fig. 20.) ist die Neigung der Visur von B aus, sowie auch die des Schnittes III. gegen die Linie AC'' dieselbe (ohne Rücksicht auf den Quadranten) wie im Dreiecke ACB.

Allgemein ist für eine beliebige Lage von AP die Präcision in der Bestimmung dieser Länge dieselbe, welche sich für eine bestimmende Gerade senkrecht zu AP aus den Formeln des Abschnittes 20. ergiebt. Man hat daselbst zu substituiren, indem man jene bestimmende Gerade als Achse der x betrachtet und wenn n_1, n_2, n_3 die Beobachtungszahlen für die Winkel A, B, P bedeuten,

wegen Visur AP $\gamma_1 = 90^0$ $\qquad h_1^2 = \frac{n_1}{2a^2\omega^2}$,

wegen Visur BP $\gamma_2 = 90^0 - P$ $\qquad h_2^2 = \frac{n_2}{2b^2\omega^2}$,

wegen Schnitt III. $\gamma_3 = 90^0 - B$ $\qquad h_3^2 = \frac{2n_3c^2}{a^2b^2\omega^2}$,

ferner die Zwischenwinkel $(1.2) = P$; $(1.3) = B$; $(2.3) = A$.

Damit wird das Quadrat der Präcision in der Bestimmung von AP

$$H^2 = \frac{\left\{\frac{n_1 . n_2}{4a^2b^2\omega^4} sin^2 P + \frac{n_1 n_3 c^2}{a^4 . b^2 \omega^4} sin^2 B + \frac{n_2 n_3 c^2}{a^2 b^4 . \omega^4} sin^2 A\right\}}{\left\{\frac{n_1}{2a^2\omega^2} . 1 + \frac{n_2}{2b^2\omega^2} . cos^2 P + \frac{2n_3c^2}{a^2b^2\omega^2} . cos^2 B\right\}},$$

oder auch

$$55) \begin{cases} H^2 = \dfrac{(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)\, sin^2 P}{2\omega^2 (n_1 b^2 + n_2 . a^2 cos^2 P + 4 n_3 c^2 . cos^2 B)}, \\ H^2 = \dfrac{(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) . sin^4 P}{8\omega^2 c^2 (n_1 sin^2 A + n_2 sin^2 B cos^2 P + n_3 sin^2 P . cos^2 B)}. \end{cases}$$

*) Der Deutlichkeit wegen in derselben nur bei den besonderen Lagen C und C' von P angegeben.

Um die günstigsten Beobachtungszahlen n bei unveränderter Dreiecksform zu finden, suche man das Maximum von H^2 für $(n_1+n_2+n_3)=$ Const. Die Beziehungen der n unter einander werden dabei

$$(n_2+n_3).(n_1 \sin^2 A+n_2 \sin^2 B \cos^2 P+n_3 \sin^2 P \cos^2 B)-\sin^2 A(n_1 n_2+n_1 n_3+n_2 n_3)$$
$$=(n_1+n_3).(n_1 \sin^2 A+n_2 \sin^2 B \cos^2 P+n_3 \sin^2 P \cos^2 B)-\sin^2 B \cos^2 P\,(n_1 n_2+n_1 n_3+n_2 n_3)$$
$$=(n_1+n_2).(n_1 \sin^2 A+n_2 \sin^2 B \cos^2 P+n_3 \sin^2 P \cos^2 B)-\sin^2 P \cos^2 B\,(n_1 n_2+n_1 n_3+n_2 n_3).$$

Daraus folgt

$$n_1-n_2 : n_1-n_3 : n_2-n_3 : (n_1 n_2+n_1 n_3+n_2 n_3) =$$
$$=(\sin^2 B \cos^2 P-\sin^2 A):(\sin^2 P \cos^2 B-\sin^2 A):(\sin^2 P \cos^2 B-\sin^2 B \cos^2 P)$$
$$:(n_1 \sin^2 A+n_2 \sin^2 B \cos^2 P+n_3 \sin^2 P \cos^2 B).$$

Setzt man für den Augenblick zur Abkürzung

$\sin^2 A=\alpha^2$; $\sin^2 B \cos^2 P=\beta^2$; $\sin^2 P.\cos^2 B=\gamma^2$, $\Sigma(n)=n_1+n_2+n_3$, so findet sich

$$n_2=\frac{n_1(\gamma^2-2\beta^2+\alpha^2)+\Sigma(n).(\beta^2-\alpha^2)}{\gamma^2-2\alpha^2+\beta^2},$$

$$n_3=\frac{n_1(\alpha^2+\beta^2-2\gamma^2)+\Sigma(n).(\gamma^2-\alpha^2)}{\gamma^2-2\alpha^2+\beta^2},$$

$$n_2-n_3:(n_1 n_2+n_2 n_3+n_1 n_3)=\gamma^2-\beta^2:(n_1\alpha^2+n_2\beta^2+n_3\gamma^2),$$

$$n_1 n_2+n_2 n_3+n_1 n_3=\frac{(-3n_1^2+2n_1.\Sigma(n))(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-\alpha^2\beta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2)+\Sigma^2(n).(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)}{(\gamma^2-2\alpha^2+\beta^2)^2},$$

$$n_1\alpha^2+n_2\beta^2+n_3\gamma^2=\frac{-2n_1(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-\alpha^2\beta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2)+\Sigma(n).(\gamma^4+\beta^4-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2))}{(\gamma^2-2\alpha^2+\beta^2)}.$$

Führt man $A=180-(B+C)$, $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma$ ein, so geht die Proportion über in

$$(3n_1-\Sigma n):\left[(-3n_1^2+2n_1\Sigma(n))\,(\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma)^2+\Sigma^2(n).(\beta^2+2\beta\gamma)(\gamma^2+2\beta\gamma)\right]=$$
$$=1:\left[-2n_1.(\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma)^2-2\Sigma(n).((\beta^2+\gamma^2)\beta\gamma+\beta^2\gamma^2)\right].$$

Daraus folgt

$$n_1^2+2n_1.\frac{\Sigma(n).\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}+\frac{\Sigma^2(n).\beta^2\gamma^2}{(\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma)^2}=0, \text{ oder}$$

$$n_1=\Sigma(n).\frac{-\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}.$$

Damit hat man weiter

$$n_2=\Sigma(n).\frac{\gamma^2+\gamma\beta}{\beta^2+\gamma^2+\gamma\beta};\quad n_3=\Sigma(n).\frac{\beta^2+\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2+\gamma\beta};$$

$$n_1 n_2+n_1 n_3+n_2 n_3=\Sigma^2(n).\frac{\gamma^2\beta^2}{(\beta^2+\gamma^2+\gamma\beta)^2};$$

$$n_1\alpha^2+n_2\beta^2+n_3\gamma^2=\Sigma(n).\frac{\gamma^2\beta^2}{(\beta^2+\gamma^2+\gamma\beta)} \text{ und endlich}$$

$$H^2=\frac{\Sigma(n)}{8\omega^2 c^2}.\frac{\sin^4 P}{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}.$$

Geht man auf die ursprüngliche Bezeichnung zurück, so sind die **günstigsten Beobachtungszahlen** n und der ihnen entsprechende Werth von H^2

$$56)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} n_1 = -Q\,.\,\sin B\cos B\,.\,\sin P\cos P \\ n_2 = Q\,.\,\sin A\,.\,\cos B\,.\,\sin P \\ n_3 = Q\,.\,\sin A\,.\,\sin B\,.\,\cos P \end{array}\right\}, \; Q = \dfrac{\Sigma(n)}{\sin^2 B\cos^2 P + \sin^2 P\cos^2 B + \sin B\sin P\cos B\cos P}; \\ H^2 = \dfrac{\Sigma n}{8\omega^2 . c^2} \cdot \dfrac{\sin^4 P}{\sin^2 B\,.\,\cos^2 P + \sin^2 P\cos^2 B + \sin B\sin P\cos B\cos P}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind praktisch nicht streng zu gebrauchen, denn für Dreiecke, in welchen Winkel $B > 90^0$ ist, wird n_2 negativ; dagegen ist für Dreiecke, wo $B < 90^0$, wieder n_1 negativ. Nimmt man daher bei allen **Dreiecksformen** (Fig. 20.) **zwischen** ABC **und** ABC', wo $B < 90^0$, n_1 **sehr klein an**, so geht H^2 über in

$$57)\quad H^2 = \frac{\sin^4 P}{8\omega^2 c^2} : \left\{\frac{\sin^2 B\cos^2 P}{n_3} + \frac{\sin^2 P\cos^2 B}{n_2}\right\}.$$

Unter Voraussetzung von $n_2 + n_3 = \Sigma(n) =$ Const. wird dieses H^2 am grössten für

$$n_2 : n_3 : \Sigma n = \sin P\cos B : \sin B\cos P : \sin A$$

nämlich gleich

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{8\omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^4 P}{\sin^2 A} \quad 58).$$

H^2 nimmt beständig zu, wenn die Dreiecksspitze P sich von C nach C' bewegt und man hat insbesondere

für das gleichschenklige Dreieck ABC

$$59)\begin{cases} n_1 = 0,\; n_2 = 2\,\Sigma(n)\,.\,\cos^2 A = \dfrac{2c^2}{a^2}\,.\,\Sigma(n);\; n_3 = \Sigma(n) - n_2 \\ H^2 = \dfrac{2\,\Sigma(n)\,.\,c^2\,.\,(a^2 - c^2)}{\omega^2\,.\,a^6} \end{cases}$$

dagegen

für das rechtwinklige Dreieck ABC'

$$60)\begin{cases} n_1 = 0 = n_2;\quad \Sigma(n) = n_3 \\ H^2 = \dfrac{2\,\Sigma n\,.\,c^2}{\omega^2 a^2 (a^2 - 4c^2)} \end{cases}$$

Setzt man weiter für **Dreiecke**, wo $B > 90^0$ ist, $n_2 = 0$, so wird

$$57^*)\quad H^2 = \frac{\sin^4 P}{8\omega^2 c^2} : \left(\frac{\sin^2 A}{n_3} + \frac{\sin^2 P\,.\,\cos^2 B}{n_1}\right).$$

Ein Maximum hiervon tritt ein für

$$n_1 : n_3 : \Sigma(n) = -\sin P\,.\,\cos B : \sin A : \sin B\cos P;$$

es beträgt dann

$$H^2 = \frac{\Sigma n}{8\omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^2 P}{\sin^2 B} \,.\, \tan^2 P = \frac{\Sigma n}{8\omega^2 s^2} \,.\, \tan^2 P. \quad 61).$$

Da Winkel P in C' einen grössten Werth erlangt, so ist das rechtwinklige Dreieck überhaupt bei Annahme der günstigsten Beobachtungszahlen n von der günstigsten Form' zur Multiplication der Basis AB.

Obgleich negative Beobachtungszahlen nicht möglich sind, so kann man doch nach der Lage von P fragen, für welche H^2 aus Gleichung 56) ein Maximum wird. Man erkennt dann einestheils, wie viel Verlust an Genauigkeit eintritt, indem man eben die negativen n-Werthe mit Null vertauscht, anderntheils aber hat die Untersuchung noch die praktische Bedeutung, zu der günstigsten Dreiecksform unter Annahme gleicher n, $n_1 = n_2 = n_3$, zu führen, wie Gleichung 62) später zeigen wird. Um also das Maximum von H^2 für veränderliche Lagen P (immer unter Voraussetzung von $AP = a = 2s =$ Const.) zu suchen, bringe man H^2 zunächst auf die Form

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{2\omega^2} : (a^2 cot^2 P + 4c^2 \,.\, csc^2;\;\; P - a^2 + 2ac \cos B \cos P \,.\, csc^2 P).$$

Durch Differentiation nach P und B, wobei zu bedenken ist, dass

$$\sin B : \sin P = a : 2c,$$

findet man die Bedingungsgleichung für das Max. von H^2

$$0 = \frac{8ac^2}{a^2 + 4c^2} + 4c \,.\, \cos B \cos P - a \sin^2 P..$$

Werden mit x, y, z und k folgende constructiv leicht darstellbare Grössen bezeichnet, nämlich

$$x = -2c \cos B = BM, \quad y = a \cos P = MP, \quad z = a \sin P = AM$$

$k = \dfrac{2ac}{\sqrt{a^2 + 4c^2}} = AF$, wenn AF senkrecht zur Hypotenuse NB des in A rechtwinkligen Dreiecks ABN genommen wird, so geht obige Gleichung über in

$$xy + \frac{z^2}{2} = k^2,$$

und da $b = y - x$, sowie $z^2 + x^2 = 4c^2$ ist, so wird daraus

$$x = \frac{k^2 - 2c^2}{b + \frac{x}{2}} = \frac{2c^2}{b + \frac{x}{2}} \cdot \frac{a^2 - 4c^2}{a^2 + 4c^2},$$

woraus x sich rasch ausprobiren lässt.

Betrachtet man x und $b + \frac{x}{2}$ als Veränderliche, so erhellt, dass x rasch zunimmt, wenn P von C nach C' geht, dagegen ändert sich $b + \frac{x}{2}$ fast gar nicht:

Für C' hat man $\underline{x = 0}$, $b + \frac{x}{2} = b = \underline{\sqrt{a^2 - 4c^2} = b'} = \underline{BC'}$,

für C'' wird $\sin P = \frac{2c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}$, $\cos P = \frac{a^2 - 2c^2}{a^2}$

(ebenso gross wie für P, wenn es die Lage C hat),

$$x'' = \frac{2c^2}{a}, \; b = BC'' = \frac{a^2 - 4c^2}{a} = b'' \text{*)}; \quad b'' + \frac{x}{2} = \frac{a^2 - 3c^2}{a}.$$

Während nun der Werth $x\left(b + \frac{x}{2}\right)$ für C' Null ist, erreicht er für C'' einen Betrag, grösser als $(k^2 - 2c^2)$; es wird nämlich für C''

$$x''\left(b + \frac{x''}{2}\right) - (k^2 - 2c^2) = 2c^2\left\{\frac{a^2 - 3c^2}{a^2} - \frac{a^2 - 4c^2}{a^2 + 4c^2}\right\} = \frac{2c^4(5a^2 - 12c^2)}{a^2(a^2 + 4c^2)},$$

was in praktischen Fällen stets positiv ist.

Zwischen C' und C'' muss daher dasjenige P liegen, dessen entsprechendes x obige Gleichung erfüllt. Der Werth dieses x kann näherungsweise dadurch angegeben werden, dass man oben für $b + \frac{x}{2}$ diejenige Grösse substituirt, welche $b + \frac{x}{2}$ für C' oder C'' annimmt. Die erstere Substitution giebt x zu klein, die letztere zu gross:

$$\frac{2c^2\sqrt{a^2 - 4c^2}}{a^2 + 4c^2} < x < \frac{2c^2(a^2 - 4c^2)\,a}{(a^2 + 4c^2)(a^2 - 3c^2)}. \text{ **)}$$

Der Unterschied dieser Grenzen ist nicht von Belang, man erhält z. B. bei $a^2 = 4s^2 = 12c^2$

$$0{,}35\,c < x < 0{,}38\,c;$$

bei $a^2 = 4s^2 = 46c^2$ aber $x = 0{,}28\,c$ aus beiden Grenzen.

In Fig. 21. ist P so gelegt, dass für Dreieck ABP H^2 ein Maximum wird und dazu gesetzt worden

$$x \lesssim \frac{2c^2 \cdot (a^2 - 4c^2)\,a}{(a^2 + 4c^2)(a^2 - 3c^2)} = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2c \cdot b'}{BN \cdot GC'}\right)^2,$$

welcher Werth sich ohne Mühe construiren lässt.

Berechnet man endlich H^2 für das gleichschenklige, das rechtwinklige und das günstigste Dreieck, so ergiebt sich

bei $a^2 = 12c^2$ resp.

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 \cdot c^2} \text{ mal } \frac{1}{78}, \text{ mal } \frac{1}{48}, \text{ mal } \frac{1}{46};$$

*) Es ist also $(BC) \cdot (BC'') = (BC')^2$, BC' von BC und BC'' das geometrische Mittel.

**) x ist hiernach immer kleiner, als die Projection AG' von $AG = c$ auf AC'; $x < AG'$.

bei $a^2 = 46\,c^2$ resp.

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 \,.\, c^2} \text{ mal } \frac{1}{1081}, \text{ mal } \frac{1}{966}, \text{ mal } \frac{1}{953}.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, wie gering der Verlust ist, welchen man erleidet, indem das rechtwinklige Dreieck für dasjenige der günstigsten Form — aber wegen z. Th. negativer n unmögliche — substituirt wird, denn es bietet mit dem Dreiecke der günstigsten Form fast gleiche Genauigkeit.

Bisher war immer vorausgesetzt worden, dass die Winkel des Dreiecks auf die rationellste Weise nach den günstigsten Beobachtungszahlen beobachtet werden. Nimmt man indess jeden Winkel gleich oft,

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\Sigma(n)}{3},$$

so geht H^2 über in

$$62)\quad H^2 = \frac{\Sigma(n)}{16\,\omega^2\,c^2} \cdot \frac{sin^4 P}{sin^2 B\, cos^2 P + sin^2 P\, cos^2 B + sin B\, cos B\, sin P\, cos P},$$

also von dem Werthe bei günstigsten n ungefähr die Hälfte nur. Da das veränderliche Glied in H^2 völlig übereinstimmt mit demjenigen von H^2 aus Gleichung 56), so ist — wie schon früher angedeutet — die Rechnung auf Seite 167—169 zur Bestimmung der günstigsten Form des Dreiecks auch für den Ausdruck der Gleichung 62) gültig, nur ist das Dreieck der günstigsten Form (ABP Fig. 21.) im jetzigen Falle nicht mehr praktisch unbrauchbar, wie sich zufolge der Werthe der n von selbst versteht. Das rechtwinklige Dreieck giebt H^2 genau halb so gross wie in Gleichung 60); dagegen giebt das gleichschenklige Dreieck die Formel

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2} \cdot \frac{c^2\,(a^2 - c^2)}{a^2\,(a^4 - 2\,a^2 c^2 + 4\,c^4)}.$$

Dieser Werth ist für $a^2 = 12\,c^2$ $\quad H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2\,c^2} \cdot \frac{1}{135}$,

für $a^2 = 46\,c^2$ $\quad H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2\,c^2} \cdot \frac{1}{2073}$

d. i. ebenfalls nahezu nur die Hälfte des früheren Werthes.

Nach diesen Erörterungen möge nun zu derjenigen Form des Multiplicationsnetzes übergegangen werden, welche zunächst aus AB eine erste Diagonale $C_1\,C_2$ (Fig. 21. 22. 23.) ableitet.

42.

Die günstigste Form der Dreiecke eines derartigen Netzes ist offenbar die gleichschenklige; ihr entspricht (Fig. 21.) der Rhombus $AB\,C_1\,C_2$. Jedoch werden sehr häufig auch andere Formen vorkommen und es

können Fig. 22. und 23. als Grenzformen angesehen werden, zwischen denen sich jene bewegen.

Im Anschluss an Fig. 21. hat man in dem allgemeinen Ausdrucke für H^2 aus Abschnitt 20. zu setzen, um das Quadrat der Präcision in der Bestimmung der Längen $C_1 G$ und $C_2 G$ zu erhalten,

wegen Visur AC_1 $h_1^2 = \frac{\sin^2\varphi}{2\omega^2 c^2} \cdot n_1$ $\gamma_1 = 90^0 - \varphi$ $(1.2) = 2\varphi = \sphericalangle AC_1B$

wegen Visur BC_1 $h_2^2 = h_1^2$ $\gamma_2 = 90^0 - \varphi$

wegen Winkelmessung in C_1 $h_3^2 = \frac{2\sin^4\varphi}{\omega^2 c^2} \cdot n_3$ $\gamma_3 = 0$ $(1.3) = (2.3) = 90^0 - \varphi$,

wobei $n_1 = n_2$ als selbstverständlich eingeführt wurde.

Mit diesen Werthen gehen über $\Sigma(h^2 \sin^2\gamma)$ und $(1:N)$ in

$$\Sigma(h^2\sin^2\gamma) = \frac{n_1}{c^2\omega^2} \cdot \sin^2\varphi \cos^2\varphi;\quad (1:N) = \frac{n_1(n_1 + 2n_3)}{\omega^4 c^4} \sin^6\varphi \cos^2\varphi,$$

und es wird für $C_1 G$, ebenso für $C_2 G$

$$H^2 = \frac{(n_1 + 2n_3)\sin^4\varphi}{\omega^2 c^2},$$

daraus folgt das Quadrat der Präcision in $C_1 C_2$, der abgeleiteten Diagonale

$$63)\quad H'^2 = \frac{(n_1 + 2n_3)\sin^4\varphi}{2\omega^2 c^2} = \frac{(n_1 + 2n_3)c^2}{2\omega^2(c^2 + s^2)^2}.$$

Erscheint die Basis um die Mitte G gedreht und zwar soweit, dass je ein Winkel an der Basis in jedem Dreiecke 90^0 wird, wie in Fig. 22., so sind zu substituiren

wegen AC_1 $h_1^2 = \frac{n_1}{2b_1^2\omega^2}$ $\gamma_1 = 90^0 - \psi$ $(1.2) = 90^0 - \beta_1$

wegen BC_1 $h_2^2 = \frac{n_2}{2a_1^2\omega^2}$ $\gamma_2 = \beta_1 + \psi$ $(1.3) = \beta_1$

wegen Schnitt III. $h_3^2 = \frac{2n_3c^2}{a_1^2 b_1^2\omega^2}$ $\gamma_3 = 90^0 - \psi - \beta_1$ $(2.3) = 90^0$.

Damit hat man

$$\Sigma(h^2\sin^2\gamma) = \frac{n_1\cos^2\psi}{2b_1^2\omega^2} + \frac{n_2\sin^2(\beta_1+\psi)}{2a_1^2\omega^2} + \frac{2n_3c^2\cos^2(\beta_1+\psi)}{a_1^2 b_1^2\omega^2},$$

$$(1:N) = \frac{n_1n_2\cos^2\beta_1}{4a_1^2b_1^2\omega^2} + \frac{n_1n_3c^2\sin^2\beta_1}{a_1^2b_1^4\omega^4} + \frac{n_2n_3c^2}{a_1^4b_1^2\omega^4},\ \text{also}$$

das Quadrat der Präcision für $C_1 G$ (und $C_2 G$)

$$H^2 = \frac{2c^2}{\omega^2 \cdot a_1^2} \cdot \frac{n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3}{n_1a_1^2\cos^2\psi + n_2b_1^2\sin^2(\beta_1+\psi) + 4n_3c^2\cos^2(\psi+\beta_1)}.$$

Da hierin der besondere Werth von ψ noch nicht eingeführt ist, kann diese Formel auch auf Fig. 23. für AC_1, resp. AC_2 Anwendung finden, indem man $\psi = 0$ nimmt.

Zunächst ist für Fig. 22:

$$b_1{}^2 = s^2 - c^2;\ a_1{}^2 = s^2 + 3c^2;\ \cos\psi = \frac{b_1}{s};\ \sin(\beta_1 + \psi) = \frac{s^2 + c^2}{a_1 s}$$

$$\sin\beta_1 = \frac{b_1}{a_1};\ \cos\beta_1 = \frac{2c}{a_1};\ \cos(\beta_1 + \psi) = \frac{c\, b_1}{s\, a_1}$$

somit

$$H^2 = \frac{2c^2 \,.\, s^2}{\omega^2(s^2 - c^2)} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1(s^2 + 3c^2)^2 + n_2(s^2 + c^2)^2 + 4n_3 c^4}.$$

Das Quadrat der Präcision für $C_1 C_2$ ist wieder nur die Hälfte hiervon, $H'^2 = \frac{H^2}{2}$,

$$64)\quad H'^2 = \frac{c^2 s^2}{\omega^2(s^2 - c^2)} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1(s^2 + 3c^2)^2 + n_2(s^2 + c^2)^2 + 4n_3 c^4}.$$

Bezüglich der Fig. 23. hat man in der Formel für H^2 auf voriger Seite zunächst die Indices 1 an a und b mit 2 zu vertauschen, sodann aber zu substituiren

$$b_2 = s;\ a_2 = s^2 + 4c^2;\ \psi = 0;\ \sin\beta_2 = \frac{s}{a_2};\ \cos\beta_2 = \frac{2c}{a_2};$$

es wird hiermit, ähnlich wie oben, für $C_1 C_2$

$$65)\quad H'^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1(s^2 + 4c^2)^2 + n_2 \,.\, s^4 + 16 n_3 c^4}.$$

Werden in jedem Dreiecke die drei Winkel gleich oft beobachtet, und setzt man

$$2(n_1 + n_2 + n_3) = 6n = \Sigma n, \quad \text{so werden}$$

$$66)\ \begin{cases} \text{für Fig. 21.}\ H'^2 = \dfrac{\Sigma n \,.\, c^2}{4\omega^2(c^2 + s^2)^2}; \\ \text{für Fig. 22.}\ H'^2 = \dfrac{\Sigma n}{4\omega^2} \cdot \dfrac{c^2 s^2}{(s^2 - c^2)(s^4 + 4c^2 s^2 + 7c^4)}; \\ \text{für Fig. 23.}\ H'^2 = \dfrac{\Sigma n}{4\omega^2} \cdot \dfrac{c^2}{s^4 + 16c^4 + 4c^2 s^2}; \end{cases}$$

d. h. es ist Fig. 21. günstiger wie Fig. 22. und diese günstiger als Fig. 23.

43.

Die Werthe von H'^2 können bedeutend vergrössert werden — unter Voraussetzung gleicher Mühe, $\Sigma n = \text{Const.}$ — wenn die Beobachtungszahlen so verschieden genommen werden, dass H'^2 einen Maximalwerth erreicht.

1) Für H'^2 aus Gleichung 63), zu Fig. 21. gehörig, nehme man

$n_1 = n_2$ sehr klein, also $\Sigma n = 2n_3$ nahezu,

und hat damit

$$67)\quad H'^2 = \frac{\Sigma n : c^2}{2\omega^2(c^2 + s^2)^2},$$

d. i. gegen den Werth aus Gleichung 66) das Doppelte.

2) Für H'^2 aus Gleichung 64), zu Fig. 22. gehörend, ist die Rechnung schwieriger. Hinsichtlich der n gleicht nun Ausdruck 64) völlig dem zweiten der Ausdrücke 55), es lassen sich daher die daselbst gewonnenen Resultate übertragen, wenn man setzt für $sin^2 A$, dort α^2 genannt im weiteren Laufe der Rechnung,

$$sin^2 A = \alpha^2 = (s^2 + 3c^2)^2, \text{ ferner}$$

$$sin^2 B \; cos^2 P = \beta^2 = (s^2 + c^2)^2; \; sin^2 P \, . \, cos^2 B = \gamma^2 = 4c^4.$$

Die daselbst angegebene Relation $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$ bleibt auch hier giltig.

Man bemerkt nun sofort, dass für das Maximum n_1 sich negativ ergeben wird. Nimmt man daher $n_1 = 0$ (oder sehr klein), so giebt Gleichung 64):

$$H'^2 = \frac{c^2 s^2}{\omega^2 (s^2 - c^2)} : \left\{ \frac{(s^2 + c^2)^2}{n_3} + \frac{4c^4}{n_2} \right\}.$$

Sucht man jetzt das Maximum für H'^2 bei $2(n_2 + n_3) = \Sigma n = \text{Const.}$, so erhält man die Relation zwischen n_2 und n_3

$$(s^2 + c^2) : 2c^2 = n_3 : n_2; \quad \Sigma n = \frac{s^2 + 3c^2}{c^2} \, . \, n_2$$

und es wird

$$68) \quad H'^2 = \frac{\Sigma n}{2\omega^2} \cdot \frac{c^2 s^2}{(s^2 - c^2)(s^2 + 3c^2)^2}.$$

3) Verfährt man mit H'^2 aus Gleichung 65) so, wie mit H'^2 aus Gleichung 64), dann findet man ebenfalls einen negativen Werth von n_1 für ein Maximum von H'^2. Man wird dem entsprechend n_1 sehr klein nehmen. Für $n_1 = 0$ giebt Gleichung 65)

$$H'^2 = \frac{c^2}{\omega^2} : \left(\frac{s^4}{n_3} + \frac{16c^4}{n_2} \right).$$

Dieses wird ein Grösstes, wenn zwischen n_2 und n_3 die Relation stattfindet

$$s^2 : 4c^2 = n_3 : n_2;$$

$$\text{also} \quad \Sigma n = 2(n_2 + n_3) = \frac{s^2 + 4c^2}{2c^2} \, . \, n_2, \quad \text{und}$$

$$69) \quad H'^2 = \frac{\Sigma n}{2\omega^2} \cdot \frac{c^2}{(s^2 + 4c^2)^2}.$$

Die Werthe von H'^2 der letzten beiden Gleichungen sind ungefähr doppelt so gross, als diejenigen für dieselben Figuren aus Gleichung 66). Uebrigens sieht man, dass den wesentlichsten Einfluss auf die Bestimmung der Länge $C_1 C_2 = AC$, wie bei nur einem Dreiecke an der Basis, die Winkel bei C_1 und C_2 haben.

44.

Um einen Ueberblick über die Resultate zu erhalten, möge eine Zusammenstellung der H und H' folgen und zwar für zwei verschiedene Längen von $C_1 C_2 = AC = 2s = a$:

$$1)\ s^2 = 3c^2$$

wird einer kleinsten Multiplication der Basis $2c$ entsprechen und man hat dafür

$s^2 = 3c^2$	$H^2 = \frac{\Sigma n}{\omega^2 c^2}$ multiplicirt mit		Verhältnisse der günstigsten n.
1) Ein Dreieck.	$n_1 = n_2 = n_3$.	günstigste n.	$n_1 : n_2 : n_3 : \Sigma n$
Gleichschenkliges Dreieck ABC	$^1/_{135}$	$^1/_{78}$	0 : 17 : 83 : 100
Rechtwinkliges Dreieck ABC'	$^1/_{96}$	$^1/_{48}$	0 : 0 : 100 : 100
Günstigstes Dreieck ABP	$^1/_{53}$	—	— — — —
2) Zwei Dreiecke.			
Rhombische Form (Fig. 21.)	$^1/_{64}$	$^1/_{32}$	0 : 0 : 50 : 100
Form von Fig. 22.	$^1/_{75}$	$^1/_{48}$	0 : 17 : 33 : 100
Form von Fig. 23.	$^1/_{118}$	$^1/_{98}$	0 : 29 : 21 : 100

Hierin ist $\Sigma(n) = 100$ gesetzt und bedeutet bei einem Dreiecke $(n_1 + n_2 + n_3)$, bei zwei Dreiecken, da sie doch jenem entsprechen, $2(n_1 + n_2 + n_3)$.

Es sei weiter 2) $s^2 = 11,5c^2$, einer grössten Multiplication der Basis entsprechend:

$s^2 = 11,5c^2$.	Coefficienten von $\frac{\Sigma n}{\omega^2 c^2}$		Günstigste n:
1) Ein Dreieck.	$n_1 = n_2 = n_3$.	n ungleich.	$n_1 : n_2 : n_3 : \Sigma(n)$
Das gleichschenklige Dreieck	$^1/_{2078}$	$^1/_{981}$	0 : 5 : 95 : 100
Das rechtwinklige Dreieck	$^1/_{1932}$	$^1/_{966}$	0 : 0 : 100 : 100
Günstigste Form ABP	$^1/_{1307}$	—	— — — —
2) Zwei Dreiecke.			
Rhombische Form (Fig. 21.)	$^1/_{625}$	$^1/_{312}$	0 : 0 : 50 : 100
Form von Fig. 22.	$^1/_{677}$	$^1/_{343}$	0 : 7 : 43 : 100
Desgl. für Fig. 23.	$^1/_{777}$	$^1/_{460}$	0 : 13 : 37 : 100

Die Tabelle lehrt:

„Man bestimmt 1) die gleiche Länge $AC = C_1 C_2$ immer günstiger aus zwei Dreiecken als aus nur einem Dreiecke. 2) Dabei sind im erstern Falle Formen, wo die Basis gegen ihre Lage im Falle der rein rhombischen Form nur gedreht erscheint, wesentlich günstiger, als solche, bei welchen die Basis in ihrer Richtung verschoben erscheint. 3) Die Winkel, welche der Basis gegenüberliegen, sind die eigentlich maassgebenden der Bestimmung."

45.

Es möge nun noch die Frage erörtert werden, wieviel man (vergl. Fig. 19. und 20.) einzelne Dreiecke oder Rhomben anzuwenden hat, um

eine grössere Länge aus der Basis AB bei gleicher Mühe am genauesten abzuleiten.

Ist m_1^2 das Quadrat des mittleren Fehlers der ersten abgeleiteten Seite, so wird für die nächste abgeleitete Seite

$$m_2^2 = m_1^2 \cdot \frac{s^2}{c^2} + m_1^2 \cdot \frac{s^2}{c^2},$$

wo der erste Summand wegen der fehlerhaften Winkelmessung bei Ableitung der zweiten Seite aus der ersten und der zweite Summand wegen des Fehlers m_1 in der letztern angesetzt worden sind. Selbstverständlich ist dabei Voraussetzung, dass die zur Verbindung der ersten und zweiten Abgeleiteten dienende Figur derjenigen ähnlich sei, welche zur Herleitung der ersten Abgeleiteten aus der Basis diente.

Allgemein ist für eine $p$te Abgeleitete das Quadrat des mittlern Fehlers

$$m_p^2 = m_1^2 \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1} + m^2_{p-1} \cdot \frac{s^2}{c^2} \text{ und daher}$$

$$70) \quad m_p^2 = m_1^2 \cdot p \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1},$$

und nennt man S die Länge der $p$ten Abgeleiteten, so ist dabei

$$\left(\frac{s}{c}\right)^p \cdot 2c = S.$$

1) Für das rechtwinklige Dreieck folgt aus Gleichung 61) u. 62)

$$m_1^2 = \frac{1}{2H^2} = \frac{\varepsilon}{\Sigma n} = \frac{s^2}{tan^2 P},$$

wo $\varepsilon = 4\,\omega^2$ oder $8\,\omega^2$ ist, je nachdem man die günstigsten n oder gleiche n annimmt.

Damit wird

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon}{\Sigma n} \cdot \frac{s^2}{tan^2 P} \cdot p \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1}.$$

Bezeichnet man nun mit $N = p \,.\, \Sigma n$ die Summe aller Winkelmessungen, welche constant zu bleiben hat für dieselben c und S, und führt man in m_p^2 hiernach ein

$$\Sigma n = \frac{N}{p},$$

ferner

$$p = \frac{l\left(\frac{S}{2c}\right)}{l\left(\frac{s}{c}\right)},$$

wo l den *log. nat.* bedeutet, so geht m_p^2 über in

$$m_p^2 = \left\{\frac{\varepsilon}{4}\frac{S^2}{N}\left(l\,\frac{S}{2c}\right)^2\right\} : \left(tan\,P \,.\, l\,\frac{1}{sin\,P}\right)^2.$$

m_p^2 wird ein Minimum für $\dfrac{\partial m_p^2}{\partial P} = 0,$ d. i. für

$$cos^2 P = l\,\frac{1}{sin\,P}.$$

Diesem entspricht $P = 27^0$, $s = 2{,}20\,c$ d. h. das rechtwinklige Dreieck ist am günstigsten, wenn die Hypotenuse AC' von der bekannten Kathete (Basis) das 2,20fache beträgt. Es ist dabei

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon \,.\, S^2}{\sin^2 2P \,.\, N}\left(l\,\frac{S}{2c}\right)^2;\ \sin 2P = 0{,}81.$$

Für $P = 22^0$ wird $m_p^2 = \dfrac{\varepsilon \,.\, S^2}{(0{,}80)^2\, N}\left(l\,\dfrac{S}{2c}\right)^2$, also wenig grösser,
für $P = 32^0$ tritt an Stelle der Zahl $(0{,}80)^2$ im Nenner von m_p^2 $(0{,}79)^2$,
für $P = 45^0$ und $P = 13^0$ aber $(0{,}69)^2$.

Man erkennt daraus, dass alle Dreiecke, deren Winkel P (d. i. Winkel C') zwischen 45^0 und 13^0 liegt, nahezu die gleiche, nämlich die Maximalsicherheit bieten.

2) Für die rhombische Form des Netzes ist nach 66) und 67)

$$m_1^2 = \frac{1}{2H'^2} = \frac{\varepsilon'}{\Sigma n} \,.\, \frac{c^2}{\sin^4 \varphi},$$

wo $\varepsilon' = 2\omega^2$ oder ω^2 ist, je nachdem die n gleichwerthig oder die günstigsten sind. Aus Gleichung 70) folgt hiermit

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon'}{\Sigma n} \,.\, \frac{c^2}{\sin^4 \varphi} \,.\, p \,.\left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1},$$

oder auch

$$m_p^2 = \left\{\frac{\varepsilon'\, S^2}{N}\left(l\,\frac{S}{2c}\right)^2\right\} : (\sin 2\varphi \,.\, l \cot \varphi)^2,$$

und bezüglich φ wird dieses ein Minimum, wenn

$$1 = \cos 2\varphi \,.\, l \operatorname{cotan} \varphi,$$

d. i.

$$\underline{2\varphi = 33^0.}$$

Das rhombische Multiplicationsnetz ist daher am günstigsten, wenn die Winkel, welche der bekannten Diagonale (Basis) gegenüber liegen, 33^0 betragen. Die Multiplication beträgt dabei in jedem Rhombus etwa das $\frac{10}{3}$fache.

Der entsprechende kleinste Werth von m_p^2 beträgt

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon' \,.\, S^2}{\tan^2 2\varphi \,.\, N}\left(l\,\frac{S}{2c}\right)^2,$$

oder

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon' \,.\, S^2}{(0{,}65)^2 \,.\, N}\left(l\,\frac{S}{2c}\right)^2.$$

Da nun $\varepsilon = 4\,\varepsilon'$, so ist zwischen den kleinsten Werthen von m_p^2 für die Netze aus rechtwinkligen Dreiecken und Rhomben die Relation vorhanden:

$$m'^2_p = \left(\frac{0{,}80}{0{,}65}\right)^2 . \frac{1}{4} \,.\, m_p^2,$$

oder

$$m'^2_p = \frac{4}{11} \,.\, m_p^2,$$

wo $m'_p{}^2$ sich auf das Rhombennetz bezieht. Man sieht daraus, dass es sehr unvortheilhaft ist, „Dreiecke" und nicht Rhomben zu nehmen.

Für $2\varphi = 60^0$ wird in $m_p{}^2$ aus dem Divisor $(0{,}65)^2$
$(0{,}48)^2$,
für $2\varphi = 50^0$ ebenso . . . . . $(0{,}59)^2$.

Interessant ist für letztere Grösse von 2φ, dass sie derjenigen Rhombenform entspricht, für welche $m_p{}^2$ ein Min. ist, ohne Rücksicht auf die Mühe.

Schreibt man nämlich $m_p{}^2$ in der Form

$$m_p{}^2 = \left\{ \frac{\varepsilon' S^2}{\Sigma n} \cdot l\frac{S}{2c} \right\} \cdot (sin^2 2\varphi \cdot l\, cot\, \varphi)$$

so wird dieses $m_p{}^2$ bei constantem Σn und veränderlichem φ ein Min. für $2\varphi = 50^0$, doch ist dabei die Mühe, entsprechend der Gesammtzahl $N = p \cdot \Sigma n$ aller Winkelmessungen, veränderlich mit der Zahl der Dreiecke.

46.

Man könnte noch manche ähnliche Betrachtung über die Basisnetze anstellen. Hier sei nur noch ein wichtiger Punkt erwähnt. Die vorhergehenden Berechnungen zeigen nämlich, dass in jedem Basisnetze gewisse, als „maassgebende Winkel" bezeichnete Winkel hervorragenden Einfluss haben, auch dann, wenn alle Beobachtungszahlen gleich genommen werden. Es kann daher auch nicht davon die Rede sein, dass das Resultat ein wirklich ausgeglichenes ist, denn die maasgebenden Winkel unterdrücken sozusagen den Einfluss der anderen. Dem lässt sich allerdings abhelfen, wenn man die maassgebenden Winkel wenig, die andern oft beobachtet, also gerade nicht so verfährt, wie es bisher als rationell bezeichnet worden ist. Abgesehen von der Ungereimtheit, die darin liegt, erzielt man dadurch doch nur soviel, dass das Endresultat aus etwa zwei Einzelresultaten sich bestimmt. Daher ist es jedenfalls zweckmässiger, die maassgebenden Winkel auf die feinste Art zu ermitteln, sie vielleicht mit mehreren guten Theodoliten zu beobachten, kurzum dafür zu sorgen, dass in ihnen selbst schon ein sicheres, weiterer Ausgleichung nicht bedürftiges Resultat vorliegt.

Anhangsweise sei ferner bemerkt, dass Richtungsbeobachtungen (insbesondere bei dem Rhombusnetze) Anwendung finden könnten. Besonderer Untersuchung bedarf dieser Fall nicht, eben darum, weil die maassgebenden Winkel den grössten Einfluss behaupten, sodass in das Resultat der Character der Richtungsbeobachtungen wenig eingeht*).

*) Einige Bemerkungen über günstigste Basisnetze finden sich auch in dem Vorwort von Struve zu der Ermittelung des Höhenunterschieds zwischen dem Schwarzen u. Kaspischen Meere etc. von Fuss, Sabler u. Sawitsch. Petersburg 1849." Seite IX. u. f. Besonders umfassend sind aber die Untersuchungen hierüber in dem Werke: „die kleine Speyerer Basis" von F. M. Schwerd 1822.

IV. Ueber die günstigste Vertheilung der Hauptpunkte eines grossen Dreiecksnetzes.

47.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Arbeit sein, über die Grösse der Entfernungen benachbarter Hauptpunkte etwas Maassgebendes anzuführen, ebenso wenig wie im vorhergehenden Hauptabschnitte die wirkliche Länge der Basis in den Kreis der Betrachtungen gezogen wurde. Bessel empfahl möglichst grosse Distanzen, Struve fand Distanzen von 3 bis 4 geographischen Meilen als die praktisch zweckmässigsten, namentlich hinsichtlich der Schnelligkeit der Messungsarbeit und der Elimination der Lateralrefraction.

Man scheint indess im Allgemeinen der Ansicht zu sein, die grösste Genauigkeit durch Verbindung möglichst weit entfernter Nachbarpunkte erreichen zu können, und lässt das Terrain in gewissen Richtungen Lateralrefraction vermuthen, so sucht man ihren Einfluss durch Controlverbindungen zu mindern. Ist die Messung Theil einer Gradmessung, so ist sicher dabei auch der Zweck „geringsten Kostenaufwandes“ erreicht; triangulirt man aber nur, um die Grundlage einer Landesvermessung zu erhalten, so geben Punkte in kurzen Distanzen meist ausreichende Genauigkeit bei weniger Gesammtkosten.

Im Folgenden möge der in neuerer Zeit häufigste Fall der Combination beider Endzwecke durch eine einzige Triangulation festgehalten werden. Diese muss, soll sie möglichst vortheilhaft sein, die Lage einer grössern Anzahl gleichmässig vertheilter Punkte zu ermitteln suchen. Es hätte einestheils keinen Sinn, im Allgemeinen eine andere Vertheilung anzunehmen, anderntheils erleichtert aber die gleichmässige Vertheilung der Punkte ihre gleichmässige Bestimmung, sowie auch diejenige der Punkte zweiter Classe. Unter „gleichmässiger Bestimmung“ ist dabei eine solche zu verstehen, welche nicht nur Punkte in gleicher Entfernung von der Basis gleichgenau angiebt (also mit gleichem M ermittelt), sondern auch jeden einzelnen Punkt gleichmässig nach allen Richtungen bestimmt (H constant). Wenn sich überhaupt eine Triangulation dem entsprechend vornehmen lässt, so ist es gewiss diejenige, deren Nachbarpunkte zu regelmässigen Figuren verbunden werden können.

48.

Kann man alle Nachbarpunkte in gleiche Entfernung legen, so erhält man als Grundfigur des Netzes das gleichseitige Dreieck. Dieser Grundfigur steht am nächsten das Quadrat mit zwei Diagonalen.

Weitere Grundformen giebt es nicht. Denn ist $ABCD\ldots$ (Fig. 24.) eine solche Grundform, also ein reguläres n-Eck, innerhalb dessen keine Netzpunkte liegen, so muss der Winkel des n-Eckes sich im Umkreise jeder Ecke (B z. B.) eine ganze Anzahl Male auftragen lassen, weil jeder Punkt Theil ist von mehreren Vielecken gleicher Form. Das giebt

$$4 : \frac{2n-4}{n} = \text{einer ganzen Zahl},$$

oder

$$\frac{4}{n-2} = \text{einer ganzen Zahl}, \quad \text{was nur möglich ist}$$

für

$$n = 3,\ 4 \text{ und } 6.$$

Das reguläre Sechseck giebt durch die zu seiner Construction nöthigen Diagonalen ein dem Netze aus gleichseitigen Dreiecken verwandtes Netz. Es bleiben hiernach nur die erwähnten zwei Grundfiguren übrig.

Bei gleicher Punktzahl auf gleicher Fläche sind die Distanzen benachbarter Punkte für beide Grundfiguren ziemlich gleich; denn indem einem Quadrate immer etwa zwei Dreiecke entsprechen werden, muss

$$s_q^2 = 2\, s_d^2 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4}\,; \quad s_q = 0{,}93\ s_d$$

sein, wo s_q die Quadratseite, s_d die Dreiecksseite bedeuten.

Die in der Praxis vorkommenden Netzformen werden aber, falls nicht besondere örtliche Verhältnisse es hindern, zwischen dem Quadratnetze und regulären Dreiecknetze schwanken. Es ist daher im Folgenden ein Vergleich beider Grenzfälle dahin ausgeführt worden, welcher von beiden das Verhältniss entsprechender Seiten der Grundfiguren am genauesten „bei gleicher Mühe" angiebt.

49.

Im Anschluss an Fig. 25. sei ABC ein im Innern des Netzes gelegenes, gleichseitiges Dreieck. Die Messung von $\sphericalangle\, BAC = \alpha$ und $\sphericalangle\, ABC = \beta$ giebt für die Gegenseiten $BC = a$ und $AC = b$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \text{wobei } d\left(\frac{a}{b}\right) = \cot\alpha\, d\alpha - \cot\beta\, d\beta = \frac{d\alpha - d\beta}{\sqrt{3}}$$

die Grösse des Fehlers in $\frac{a}{b}$ bezeichnet, welcher den Winkelfehlern $d\alpha$ und $d\beta$ entspricht.

Diese Formel gilt für jedes andere Seitenverhältniss im Dreiecke, und es hat daher das gleichseitige Dreieck die Eigenschaft, sich von jeder Seite aus gleich gut construiren zu lassen. (Vergl. Abschnitt 38). Die Beobachtung des dritten Winkels $\sphericalangle\, ACB = \gamma$ hat auf $d\left(\frac{a}{b}\right)$ im Mittel keinen Einfluss, denn γ controlirt nur die Summe von α und β, indem

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = 0$$

sein soll. Findet man nun rechts anstatt Null einen Werth v, so sind aus

$$d\alpha + d\beta + d\gamma = v$$

die wahrscheinlichen Aenderungen $d\alpha = d\beta = d\gamma = \frac{v}{3}$, daher $d\alpha - d\beta$, wie es in $d\left(\frac{a}{b}\right)$ nur vorkommt, gleich Null. Bezeichnet nun $\pm\,\omega$ den mittleren Fehler in der Messung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ (in Bogen) und $\pm\,\delta$ den mittleren Fehler in $\frac{a}{b}$, so ist also bei Messung von α und β oder α, β und γ

$$71\text{a)} \qquad \delta^2 = \frac{2}{3}\,\omega^2.$$

Da nun das Dreieck ABC von andern Dreiecken umschlossen wird, muss man $\frac{a}{b}$ noch aus der Dreieckskette (1. 2. 3. 4. 5), sowie aus der Kette (1. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5), (Fig. 25.), welche als unabhängig von einander angesehen werden können, berechnen. Die erste Kette giebt $\frac{a}{b}$ durch 5 Seitenverhältnisse, die zweite durch 9 solche. Obgleich sich nun jedes dieser Verhältnisse schliesslich für sich betrachtet ebenso genau bestimmt, wie $\frac{a}{b}$ für sich betrachtet, so darf man doch hier, wo benachbarte Dreiecke in Frage kommen, den Seitenverhältnissen diese Genauigkeit nicht beilegen, wie sofort klar ist. Nennt man $\pm\,\delta_2$ und $\pm\,\delta_3$ die mittleren Fehler in $\frac{a}{b}$ aus beiden Ketten, $\pm\,m_1$ den noch unbekannten, aus allen Einzelbestimmungen sich ergebenden mittlern Fehler in $\frac{a}{b}$, so wird

$$5\,m_1^2 < \delta_2^2 < 5\,\delta^2; \quad 9\,m_1^2 < \delta_3^2 < 9\,\delta^2.$$

Betrachtet man weiter die Winkel um A und B, so zeigt sich, dass diese bei den Bestimmungen von δ_2 und δ_3 bisher nur zum kleinen Theil in Anwendung gekommen sind. Man wird daher der Wahrheit näher kommen, wenn man sich α und β noch aus den Summengleichungen der Winkel um A und B bestimmt denkt und zwar mit dem mittlern Fehler $\pm\frac{\omega}{\sqrt{5}}$, wie leicht einzusehen. Das Quadrat des mittlern Fehlers der Bestimmung von $\frac{a}{b}$ mit Hilfe von α und β geht damit über in

$$\delta_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\,\omega^2 = \frac{5}{9}\,\omega^2.$$

In die obern Grenzen von δ_2^2 und δ_3^2 darf dieser Werth für δ^2 nicht eingeführt werden. Es kommt z. B. in der Kette (1. 2. 3. 4. 5.) der Quo-

tient $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3}$ vor, und da α_2 und β_3 gleich sind, sowie derselben Summengleichung angehören, gilt für den Quotienten eine ähnliche Bemerkung, wie sie früher für $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ gemacht wurde: Der Einfluss der Summengleichungen fällt bei den Dreiecksketten beinahe gänzlich weg.

Vernachlässigt man nun noch den geringen Einfluss verschiedener Polygonzusammenschlüsse, so bekommt man zur Bestimmung von $\pm m_1$, dem schliesslichen mittlern Fehler in $\left(\frac{a}{b}\right)$, die Ungleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{9}\omega^2}+\frac{1}{5\,m_1^2}+\frac{1}{9\,m_1^2}} < m_1^2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{9}\omega^2}+\frac{1}{5\,\delta^2}+\frac{1}{9\,\delta^2}}.$$

Die obere Grenze giebt $m^2 < 0{,}44\ \omega^2$ und hiermit giebt die untere Grenze $0{,}40\ \omega^2 < m^2$. Der Gesammtbestimmung des Verhältnisses zweier Nachbarseiten im Netze (zweier Seiten desselben Dreieckes) entspricht sonach das mittlere Fehlerquadrat

$$71\text{b)}\quad m^2_1 = 0{,}42\ \omega^2.$$

Hat man Richtungen beobachtet, so ändert sich δ^2 in 71a) gar nicht, dagegen muss für m_1^2 der Factor $\frac{5}{6}$ in δ_1^2 weggelassen werden, wie sich von selbst versteht. δ_2^2 und δ_3^2 bleiben in den früheren Grenzen eingeschlossen; denn betrachtet man z. B. wieder ... $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3}$ ... in der Kette (1.2.3.4.5.), so könnte man zunächst erwarten, dass der mittlere Fehler dieses Verhältnisses sich anders als zu $\left(\frac{2\delta^2}{2}\right)$ ergeben würde, da α_2 und β_3 eine Visur gemeinsam haben. Man überzeugt sich indess leicht, dass dieses keinen Einfluss hat, indem man $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3}$ differenzirt und die Richtungsfehler einführt. (Vergleiche später eine ähnliche Rechnung bei Untersuchung des Quadrates.) Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}\omega^2}+\frac{1}{5m'^2_1}+\frac{1}{9m'^2_1}} < m'^2_1 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}\omega^2}+\frac{1}{5\,\delta^2}+\frac{1}{9\,\delta^2}}$$

folgt wie vorher $\quad 0{,}51\ \omega^2 > m'^2_1 > 0{,}46\ \omega^2$

$$71\text{c)}\quad m'^2_1 = 0{,}48\ \omega^2.$$

m'^2_1 ist somit nicht viel grösser als m_1^2.

Das Verhältniss $AB : CD$ im Rhombus $ABCD$ bestimmt sich aus

(ABC und CDB), aus (ABC, 1, 2, 3, 4) und aus (9, 8, 7, 6, CDB), also auf drei verschiedenen, ziemlich unabhängig von einander bestehenden Wegen. (ABC und CDB) geben $\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ACB}{\sin BCD} \frac{\sin CDB}{\sin CAB}$, und da diese Winkel in verschiedenen Summengleichungen vorkommen, ist das Quadrat des mittlern Fehlers

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot (4\,\omega^2) = \frac{10}{9}\,\omega^2.$$

Berücksichtigt man nun die beiden Ketten aus je 5 Dreiecken und nennt $m_2{}^2$ das Quadrat des mittlern Fehlers der schliesslichen Bestimmung von $\frac{AB}{CD}$, so ist

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{10}{9}\omega^2} + \frac{1}{5\,m_1{}^2} \cdot 2} < m_2{}^2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{10}{9}\omega^2} + \frac{1}{5\,\delta^2} \cdot 2},$$

$$\text{72a)} \quad 0{,}55\,\omega^2 < m_2{}^2 < 0{,}67\,\omega^2; \quad \underline{m_2{}^2 = 0{,}61\,\omega^2}.$$

Für Richtungsbeobachtungen hat man unter Weglassung des Factors $\frac{5}{6}$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}\omega^2} + \frac{1}{5\,m'_1{}^2} \cdot 2} < m'^2_2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}\omega^2} + \frac{1}{5\,\delta^2} \cdot 2},$$

$$\text{72b)} \quad 0{,}63\,\omega^2 < m'_2{}^2 < 0{,}74\,\omega^2; \quad \underline{m'_2{}^2 = 0{,}68\,\omega^2}.$$

Das Verhältniss der Seiten $AB : BD$ im Rhombus bestimmt sich aus

(ABC und CDB); (ABC, 1, 2, 3, 4, CDB); (9, 8, 7, 6)

und zwar wieder ziemlich unabhängig. Erstere 2 Dreiecke geben

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin ACB}{\sin BCD} \cdot \frac{\sin CDB}{\sin CAB};$$

die Winkel des erstern Verhältnisses gehören hierbei zu derselben Summengleichung, der Factor $\frac{5}{6}$ darf daher auf sie nicht angewendet werden. Man erhält das Quadrat des mittlern Fehlers dieser Bestimmung zu

$$\frac{1}{3}\,\omega^2 \left(2 \cdot \frac{5}{6} + 2\right) = \frac{11}{9}\,\omega^2.$$

m^2_3, das mittlere Fehlerquadrat aus allen Bestimmungen, wird mithin

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{11}{9}\omega^2} + \frac{1}{6m_1{}^2} + \frac{1}{4m_1{}^2}} < m_3{}^2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{11}{9}\omega^2} + \frac{1}{6\,\delta^2} + \frac{1}{4\,\delta^2}},$$

$$\text{73a)} \quad 0{,}56\,\omega^2 < m_3{}^2 < 0{,}69\,\omega^2; \quad \underline{m_3{}^2 = 0{,}62\,\omega^2}.$$

Für Richtungsbeobachtungen kommt wieder der Factor $\frac{5}{6}$ in Wegfall und man findet, ähnlich wie früher:

$$73\text{b)}\quad 0{,}62\ \omega^2 < m'^2_3 < 0{,}72\ \omega^2;\quad m'^2_3 = 0{,}67\ \omega^2.$$

Man erkennt hieraus, dass sich die Verhältnisse zweier Rhombusseiten, die zu verschiedenen Dreiecken gehören, ziemlich gleich genau bestimmen. Es mögen daher im Folgenden solche Seiten (also AB und BD, AB und CD etc.) kurz „Gegenseiten" heissen. Liegt der Rhombus nicht im Netze, sondern isolirt, so ist das mittlere Fehlerquadrat des Verhältnisses solcher Gegenseiten

$$74)\quad \delta'^2 = 2 \,.\, \delta^2.$$

50.

Für ein im Innern des Netzes gelegenes Quadrat $ABCD$ (Fig. 26.) hat man zunächst die directen Bestimmungen

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin ACB}{\sin ABC},\quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d\,(ACB) - d\,(ABC)\ \text{und}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ACB}{\sin CAB}\cdot\frac{\sin BDC}{\sin CBD},\quad d\left(\frac{AB}{CD}\right) = d(ACB) - d\,(CBD).$$

Werden also nur die nöthigsten Winkel gemessen, so bestimmen sich beide Verhältnisse gleich genau. Das mittlere Fehlerquadrat beträgt $2\omega^2$. Beobachtet man alle Winkel, so hat man noch

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin ADB}{\sin ABD}\cdot\frac{\sin ACD}{\sin CDA};\quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d\ (ADB) - d\ (CDA)$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ADB}{\sin ABD}\cdot\frac{\sin ACD}{\sin CAD};\quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d\,(ADB) - d\,(CAD).$$

Die sämmtlichen Bestimmungen aus den Winkelmessungen im Quadrate hängen daher von den 45^0-Winkeln ab. Ein Einfluss der rechten Winkel kommt erst herein, wenn man die Gleichung zwischen den 3 Winkeln jedes Dreieckes berücksichtigt. Die erste Bestimmung von $\frac{AB}{BC}$ ändert sich jedoch auch dann nicht, weil die betreffenden Winkel derselben Summengleichung angehören; in den andern Verhältnissen jedoch ist es erlaubt, überall das mittlere Fehlerquadrat eines Winkels gleich $\frac{2}{3}\,\omega^2$ anzunehmen, da die Summengleichungen die einzelnen Winkel noch mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ bestimmen. Man hat daher für das erste und zweite Verhältniss die Bestimmungen mit den Fehlerquadraten:

$$2\,\omega^2,\ \frac{4}{3}\,\omega^2,\ \text{resp.}\ \frac{4}{3}\,\omega^2,\ \frac{4}{3}\omega^2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Bestimmungen jedes Verhältnisses

völlig unabhängig von einander sind, nicht etwa irgend ein Winkel oder eine Summengleichung mehrfach Anwendung fanden. Es sind sogar für $\frac{AB}{AC}$ noch die Winkel CDB, CAB, BCD und CBD unberücksichtigt, doch geben sie nur Summengleichungen von ACB und ABC, ADB und CDA, ihr Einfluss ist mithin Null.

Vereinigt man die Resultate, so ist das Quadrat des m. F.

$$75\text{a)}\left\{\begin{array}{ll} \text{für } \frac{AB}{AC} \ldots\ldots & \vartheta^2 = \frac{\omega^2}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}\omega^2; \\ \text{für } \frac{AB}{CD} \ldots\ldots & \vartheta'^2 = \frac{\omega^2}{2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\omega^2. \end{array}\right. \; *)$$

Diese Rechnung gilt in gleicher Weise für Winkel- und Richtungsbeobachtungen.

Im letztern Falle könnte man vermuthen, dass z. B. die zweite Bestimmung von $\frac{AB}{BC}$ einen andern mittlern Fehler erhielte. Nun ist $d\left(\frac{AB}{BC}\right) = d(ADB) - d(ADC) = 2d(A) - d(B) - d(C)$, wo $d(A)$ etc. die Richtungsfehler sind. Im Mittel ist ein Richtungsfehler $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$, also bleibt der mittlere Fehler von $\frac{AB}{BC}$ hier genau so gross, als wenn die Winkel unabhängig von einander gemessen worden wären.

$\frac{AB}{AC}$ bestimmt sich weiter durch die Ketten $(\overline{1.\ 2.\ 3.})$ und $(\overline{9.\ 8.\ 7.\ 16.}\ 15.\ \overline{14.\ 13.}\ 12.\ 11)$, erstere drei Nachbarseitenverhältnisse, letztere 4 solche und 2 Gegenseitenverhältnisse enthaltend. Für die mittlern Fehler dieser Verhältnisse hat man Werthe einzuführen, die zwischen ϑ, resp. ϑ' und denjenigen mittlern Fehlern liegen, welche sich schliesslich für $\frac{AB}{AC}$, resp. $\frac{AB}{CD}$ aus allen Bestimmungen ergeben. Letztere Grössen mögen mit $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ bezeichnet werden. Berücksichtigt man nun noch die Summengleichungen der Winkel um A, B, C, D, welche für die erste der directen Bestimmungen von $\frac{AB}{AC}$ den Factor $\frac{7}{8}$ erheischen und nennt man das m. Fehlerquadrat für das Mittel der beiden directen Bestimmungen

$$\vartheta_1^2 = \frac{\omega^2}{\frac{1}{2\cdot\frac{7}{8}} + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{4}\omega^2,$$

*) Eine strenge Ausgleichung gab genau gleiche Resultate.

so ist

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1^2}+\frac{1}{3\cdot m^2}+\frac{1}{4\,m^2+2\,m_1^2}} < m^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1^2}+\frac{1}{3\,\vartheta^2}+\frac{1}{4\,\vartheta^2+2\,\vartheta^2}};$$

die obere Grenze giebt $m^2 < 0{,}51\ \omega^2$.

Für $\frac{AB}{CD}$ hat man 2 ganz gleiche indirecte Bestimmungen aus $(\overline{3.\ 2.\ 10.}\ 9.\ 8.\ 7.)$ und $(11.\ 12.\ \overline{13.\ 14.}\ 15.\ 16)$ mit je 4 Nachbarseiten- und einem Gegenseitenverhältnisse. Wegen der Summengleichungen um A, B, C, D ist der Factor $\frac{7}{8}$ bei beiden directen Bestimmungen, also bei ϑ'^2 selbst in Anwendung zu bringen. Nennt man daher

$$\vartheta'^2_1 = \frac{7}{8}\cdot\vartheta'^2 = \frac{7}{12}\,\omega^2,$$

so wird

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2_1}+2\cdot\frac{1}{4\,m^2+m_1^2}} < m_1^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2_1}+2\cdot\frac{1}{4\,\vartheta^2+\vartheta'^2}}.$$

Die obere Grenze giebt $m_1^2 < 0{,}45\ \omega^2$.

Führt man jetzt die Näherungswerthe in die untern Grenzen ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} m^2 > 0{,}43\ \omega^2 \\ m^2 < 0{,}51\ \omega^2 \end{array}\right\}, \qquad \begin{array}{l} m_1^2 > 0{,}40\ \omega^2 \\ m_1^2 < 0{,}45\ \omega^2 \end{array}$$

$$75\,b)\quad \underline{m^2 = 0{,}47\ \omega^2}, \qquad \underline{m_1^2 = 0{,}42\ \omega^2}.$$

Man kann hiernach für $\frac{AB}{AC}$ und $\frac{AB}{CD}$ das mittlere Fehlerquadrat zu $0{,}45\ \omega^2$ annehmen.

Sind Richtungsbeobachtungen gemacht, so ist nur der Factor $\frac{7}{8}$ wegzulassen, sonst ändert sich an der Rechnung weiter nichts. Die Ungleichungen gehen über in

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2}+\frac{1}{3\,m'^2}+\frac{1}{4m'^2+2m'^2_1}} < m'^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2}+\frac{1}{3\,\vartheta^2}+\frac{1}{4\,\vartheta^2+2\,\vartheta'^2}}$$

für $\frac{AB}{AC}$, sodass also

$$m'^2 < 0{,}53\ \omega^2,$$

und für $\frac{AB}{CD}$ in

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2}+2\cdot\frac{1}{4\cdot m'^2+m'^1}} < m'^2_1 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2}+2\cdot\frac{1}{4\,\vartheta^2+\vartheta'^2}},$$

woraus $m'^2_1 < 0{,}50\ \omega^2$ folgt.

Hiermit geben die untern Grenzen resp.

$$m'^2 > 0{,}45\ \omega^2 \qquad m'^2_1 > 0{,}44\ \omega^2$$

und da

$$m'^2 < 0{,}53\ \omega^2 \qquad m'^2_1 < 0{,}50\ \omega^2$$

war, so kann man setzen

$$75c)\quad m'^2 = 0{,}49\ \omega^2. \qquad m'^2_1 = 0{,}47\ \omega^2.$$

Hiernach kann das mittlere Fehlerquadrat für $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AB}{CD}$ zu 0,48 ω^2 bei Richtungsbeobachtungen gesetzt werden.

51.

Die gewonnenen Formeln stellen sich am übersichtlichsten dar, wenn man noch alle Fehlerquadrate auf gleiche Mühe, etwa diejenige für Winkelbeobachtungen in einem Quadratnetze, reducirt. Man hat hier in einem Quadrate 12 Winkel zu messen, d. i. soviel wie 24 Einstellungen; dieses gilt für ein Quadrat im Netze ebenso, wie für ein isolirtes Quadrat. Dagegen hat man im Rhombus nur 6 Winkelmessungen gleich 12 Einstellungen zu machen. Für Richtungsbeobachtungen im isolirten Quadrate, resp. Rhombus beträgt die Anzahl der Einstellungen 12, resp. 10, dagegen hat man für dieselben Figuren im Netze nur 8, resp. 6 Einstellungen zu rechnen, da die begrenzenden Visuren (z. B. *AB*, *AC* ...) auch für die Nachbarfiguren gelten, also nur zur Hälfte in Anschlag zu bringen sind. Reducirt man nun alle mittleren Fehlerquadrate auf 24 Einstellungen, so ergiebt sich, wenn $\pm\omega$ der mittlere Fehler einer Winkelmessung $\left(\pm\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right.$ der einen Richtung$\left.\right)$ ist:

	Mittleres Fehlerquadrat des			
	Verhältn. 2r Nachbar-		und 2r Gegenseiten	
	Winkel	Richtungen	Winkel	Richtungen
Rhombus isolirt,	0,33 ω^2	0,28 ω^2	0,67 ω^2	0,56 ω^2
„ im Netz,	0,21	0,12	0,31	0,17
Quadrat isolirt,	0,80	0,40	0,67	0,33
„ im Netze	0,47	0,16	0,42	0,16

Wenn nun auch die Zahlen dieser Tabelle, soweit sie sich auf Figuren im Netze beziehen, der Vernachlässigungen wegen nur relativen Werth für die Vergleichung des Rhombus und Quadrates im Netze besitzen, so erhellt doch daraus mit Gewissheit, dass insbesondere bei Richtungsbeobachtungen das Quadratnetz recht günstige Bestimmungen liefert und dem Dreiecksnetz gleichgestellt zu werden verdient.

52. Schluss.

Um die Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, sind weitere Betrachtungen über Netzformen im Allgemeinen, über Kranzsysteme (was z. Th.

eine Rechnung wie in Abschn. 45. geben würde) und Anderes mehr nicht angestellt worden. Freilich ist nicht zu verkennen, dass das hier Gegebene nur den leichtesten Theil der Discussion der Landestriangulirung vollständiger abhandelt, nämlich die Einschaltung der Punkte niederster Ordnung, und dass der vierte Hauptabschnitt sehr dürftig ausgefallen ist. Wer jedoch weiss, welche Anhäufung von Fragen bei der Untersuchung eines Hauptnetzes entsteht und wie gerade hier die speciellen Terrainverhältnisse zu berücksichtigen sind, wird es nicht sonderbar finden, dass zunächst das Einfachere eingehender untersucht wurde, um so mehr, als in demselben das Allgemeinere, in allen Fällen Giltige zur Darstellung gelangte.

Anmerkung zu Abschn. II. 32. Da unter gleichen Umständen die aufgewandte Mühe umgekehrt proportional M^2 ist, in diesem Abschnitte es aber darauf ankam, die Resultate gleicher Mühe zu vergleichen, so hat sich der Verf. erlaubt, hier — abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche — die Genauigkeit in der Bestimmung des Punktes ebenfalls umgekehrt proportional dem Quadrate des mittlern Gesammtfehlers M zu setzen, sodass sie direct proportional der aufgewandten Mühe wird.

VI.

Mathematische Studien über die Materie.

Zur Lehre der Aequivalentvolumina.

Von

L. Pudenz,

Candidat des höheren Schulamts zu Ershausen auf dem Eichsfelde.

Aus dem Dalton'schen Gesetze für chemische Verbindungen ergibt sich für den Verstand der nothwendige Schluss, dass eine bestimmte Masse eines elementaren Stoffes eine bestimmte Anzahl von Individuen enthält; die ganze Eigenthümlichkeit dieser Individuen zu verstehen, reicht es aber nicht aus. Der Verstand fasst diese Individuen, diese die Materie räumlich constituirenden Momente, je als ein für sich dastehendes Ganze auf, gerade wie er die Zellen eines organischen Körpers ihrem constituirenden Charakter nach als Einheiten nimmt. Es folgt aus diesem Dalton'schen Gesetze durchaus nicht die Nothwendigkeit, dass diese Individuen überhaupt untheilbare seien; die Annahme der Untheilbarkeit ist nur eine wahrscheinliche Hypothese. So klein auch diese Individuen immer sein mögen, wir können sie wohl in Theile zerlegt denken, aber ob sie in Wahrheit theilbar sind, wissen wir nicht. Eine Theilbarkeit auf mechanischem Wege lässt sich nicht gut verstehen, denn dann müsste ein Individuum das andere durchschneiden und gäbe also letzteres Individuum eher seine Einheit auf, als seine Verknüpfung mit benachbarten anderen. Ebenso wenig, wie der Verstand die Theilbarkeit auf mechanischem Wege nothwendig findet, muss er das Individuum für sich als aus Theilen constituirt auffassen. Denn der Umstand, dass wir wohl eine Vorstellung von Raumform, aber kein Verständniss des Raumes, resp. der ihn anfüllenden Masse, gewinnen, führt uns weder zum Individuum als Atom, noch zum Individuum als aus Atomen constituirt, analog der Pflanzenzelle.

Wir können also diese Individuen eben nur als Individuen fassen und ihrer Constitution nach weiter nicht verstehen.

Wenn wir die Individuen aber auch nur als Individuen fassen, so

wird dadurch die Unveränderlichkeit der Raumgrenzen dieser Individuen nicht ausgeschlossen. Es folgt aus dem Begriffe des Individuums und aus dem Unverständniss seiner Raumconstitution nicht die Unmöglichkeit seiner Formänderung. Es wäre möglich, dass es sein Volumen vergrössere oder verringere; dass es seine Form ändere, etwa aus der Form des Würfels in die des Oktaeders übergehe. Diese Möglichkeit wird heute allgemein nicht angenommen — man nennt das Individuum starr. Die Veränderlichkeit der Individuen anzunehmen, wird man gezwungen, wenn man den Raum des durch sie constituirten Körpers nur durch sie erfüllt denkt, in welchen Temperaturzuständen der Körper sich auch befinde. Die Individuen als starre zu nehmen bedingt in der allgemein gewordenen Hypothese des Aethers; man denkt sich das Individuum starr, dagegen die es umgebende Aethersphäre elastisch.

Suchen wir diese Elastizität des Aethers zu verstehen, so kommen wir zu dem Resultate, dass man die Individuen der Körper als starre nimmt, dagegen die Individuen des Aethers als veränderliche. Denn da nach unserer Aetherlehre kein leerer Raum existirt, so heisst Condensation des Aethers Condensation des Aether-Individuums. Es ist daher ein durchaus falscher Vergleich, wenn die Freunde des Aethers lehren, die Condensation des Aethers sei analog der Condensation eines Gases. Denn letztere wird als Annäherung der Gas-Moleküle erklärt, während die nächsten Aethertheilchen als sich berührende gedacht werden. — Dies denjenigen Denkern, welche die Veränderlichkeit eines Körper-Individuums ungereimt finden!

Der Aether ist ein Phantasiegeschöpf, geschaffen, die Schwierigkeiten der Erklärung des Leuchtprozesses in sich aufzunehmen. Seine Existenz ist wegen der, durch die bis unendlichfache Condensibilität erhaltenen, Eigenthümlichkeit, dass ein phantasievoller Physiker von einigem mathematischen Takte durch ihn alle physikalischen Erscheinungen sinnlich vorstellen kann, noch keineswegs erwiesen. Ja wegen dieser seiner Eigenthümlichkeit führt er zu vielen Spielereien der Phantasie; ich erinnere nur an die hübschen Zeichnungen der Aether-Ellipsoiden in der jüngst erschienenen Molekularphysik des Hrn. Cornelius. — So geistreich auch durch den Aether manche Vorstellungen entstanden sind, als z. B. die Vergleichung der Körperconstitution mit dem Makrokosmos — diese Vorstellungen werden dadurch nicht wahr, sie sind eben nur Zeugniss einer guten Phantasie.

Abgesehen davon, dass durch den Aether der Begriff des Atoms ein zweifacher (Körper-Atom = starr, Aether-Atom = veränderlich) geworden ist, und dass wegen der durch ihn hervorgerufenen schwindelhaften Gedankenbahn mehr und minder die Naturforscher ihn fallen lassen, wie z. B. Schrauf in seinen physikalischen Studien; so viel ist gewiss, dass durch seine Annahme jedes tiefere Eindringen in die

Körperconstitution abgeschnitten ist und dass er gerade hierbei nicht zu Grunde gelegt werden darf, da ja die Annahme seiner Existenz höchstens Frucht dieses Studiums sein könnte, wenn er wirklich existirte. Wie man aber hierbei den Aether bei Seite setzen muss, ebenso auch den leeren Raum — eine Meinung, welche der Hr. Rath Karsten in seinen hierher gehörigen Aufsätzen schon ausgesprochen hat. Man stellt sich dadurch freilich auf den simplen Standpunkt eines gewöhnlichen Menschen und sieht einen Berg voll Schwierigkeiten, aber so nur findet man des Pudels Kern.

Auf diesen Standpunkt stelle ich mich. Alsdann muss ich annehmen, dass die kleinsten Individuen der Elemente ihr Volumen ändern. Hierzu nehme ich noch die Hypothese, begründet durch die Polymorphie der Körper, dass das Individuum auch seine Form ändern könne. Der Uebergang von einer Form zur anderen geschieht durch einen Wärmeprozess (vergl. Rose über TiO_2, SiO_2, TaO_2, NbO_2 etc., ferner die Modifikationen des P, S etc.).

Ob diese Hypothese ihre Wahrheit hat, wird die Untersuchung über die Form und Anordnung der Individuen in den Krystallen ergeben; welche Untersuchung freilich erst dann geschehen kann, wenn durch das Studium der Aequivalentvolumina genug Boden zur Abstraktion gewonnen ist. Ein wesentliches Mittel für diese Untersuchungen sind die sogenannten Vikariationen. Wird z. B. in einem Krystalle FeO durch MnO vertreten, ohne dass Form- und Volumen-Aenderung eintritt, so folgt sofort, dass MnO und FeO an Form und Anzahl gleiche Individuen besitzen. Auch sehr lehrreich sind in dieser Beziehung gewisse Abänderungen, z. B. die des Kieselzinkerzes von Nertschink (nach Hermann):

I.	210 SiO_2 = 26,08	(gefunden	25,96
	390 ZnO = 65,54		65,66
	225 HO = 8,38		8,38)
II.	210 SiO_2 = 25,39	(gefunden	25,38
390 {	384 ZnO = 62,84		62,85
	6 PbO = 2,70		2,70
	250 HO = 9,07		9,07)

In II. ist nicht, wie Hr. Rammelsberg meint, $Pb.O^2 SiO_2 + HO$ mit I. vermengt, sondern bei gleichem Verhältniss der Kieselerde zu den basischen Oxyden (= 7 : 13) eine grössere Anzahl von Wasseratomen vorhanden. Worin hat das seinen Grund? Etwa nur darin, dass die PbO-Individuen grösser sind als die ZnO-Individuen? Mussten, um die räumliche Ungleichheit aufzuheben, gerade $\frac{1}{9}$ der Wasseratome von I. in II. mehr sein? Um diese Fragen zu lösen, muss erst diese beantwortet sein: Sind die Aequivalentvolumina, oder die Individuen, der SiO_2, ZnO, HO in I. und II. dieselben? — Sed haec hactenus!

Aus der Annahme der möglichen Polymorphie der Individuen folgt die Möglichkeit der verschiedenen Aequivalentvolumina desselben Elementes, derselben Verbindung, oder was dasselbe ist: die Möglichkeit, dass dasselbe Element, dieselbe Verbindung verschiedene spezifische Gewichte haben kann, und dass, wenn dies ist, wir in Wahrheit verschiedene Körper vor uns haben, ebenso verschieden, wie es die isomeren Verbindungen der organischen Chemie sind. Man hatte früher die Meinung, dass das verschiedene spezifische Gewicht desselben Körpers nur Folge schlechter Beobachtung sei — eine Meinung, welche dem intelligenten Herapath seine Ehre kostete bei den Deutschen Buff, Kopp und Anderen — bis man durch die Polymorphie der Krystalle derselben Verbindung anders denken lernte. Man fand jedoch nicht gleich das Rechte. Denn man nahm die Verschiedenheit der Moleküle nur da an, wo eine augenfällige Formänderung dazu zwang, und bedachte nicht, dass wir neben dem Gesichtssinne noch andere Sinne haben, welche auch ihre Berechtigung bei Beurtheilung der Körper haben. Denn warum sollen die Körper, welche dem Gesichte verschieden erscheinen, ihrem spezifischen Gewicht nach verschieden angenommen werden, und nicht auch die Körper, welche nach Geschmack, nach Gefühl verschieden sind? Oder aber: wenn die Krystalle des Anatas, Rutils, Brookits uns nicht bekannt wären und die Individuen dieser Mineralien nur in scheinbar amorphen Pulvern entgegenträten, würden dann diese verschiedenen Individuen und ihre verschiedenen spezifischen Gewichte nicht existiren sollen?

Hr. Kopp schreibt im Graham-Otto, dass die Studien der Aequivalentvolumina fester Verbindungen darum von so weniger Frucht gefolgt seien, weil man nicht die Temperaturen kenne, bei welchen die Volumina zu vergleichen seien. Dies ist durchaus nicht Schuld, denn die Ausdehnungen der festen Körper sind viel zu gering, als dass durch sie die Fehlergrenze bei der Angabe der spezifischen Gewichte merklich verändert würde. Die Schuld lag darin, dass man auf die mögliche Polymorphie eines jeden Elementes, einer jeden Verbindung, nicht kam; und man kam nicht darauf, weil man nicht vorsichtig genug zu Werke ging. Wie man aber zu Werke ging, ergibt sich daraus, dass man aus verschiedenen Angaben des spezifischen Gewichts einer Verbindung das arithmetische Mittel als das wahrscheinlichste spezifische Gewicht annahm, ohne zu bedenken, dass die verschiedenen spezifischen Gewichte der Fingerzeig für verschiedene Modifikationen seien, oder dass die eine Angabe die genaueste sei, dagegen die anderen weniger genau. Hatte man, um ein handgreifliches Beispiel vorzuführen, etwa für CaO die Angaben $p' = 2{,}95$ (für Arragonit), $p'' = 2{,}72$ (für Kalkspath), so nahm man das wahrscheinlichste spez. Gewicht für $CaO =$ $\frac{1}{2}(2{,}95 + 2{,}72) = 2{,}84$, also ein spez. Gew., welches keine Modifikation

des *CaO* hat. Freilich kann man nicht jede Angabe des spezifischen Gewichts eines Körpers als wahr annehmen, am wenigsten bei unkrystallisirten Körpern, weil in einem solchen verschiedene Modifikationen derselben chemischen Verbindung vorhanden sein können. Dieses Zusammensein hängt von der Präparation ab. Am einleuchtendsten ist dies beim Schwefel. Hr. Rath Karsten machte auf die Präparation des *S* aufmerksam, indem er sagt, dass von der Vorsicht beim Abkühlen abhinge, ob die äusseren Schichten krystallisirten, d. h. anderer Modifikation seien, als die inneren. Eine Norm für solche Präparate kann gelten ihre Löslichkeit in den verschiedenen Lösungsmitteln. — Auch sehr lehrreich in dieser Hinsicht sind die interessanten Versuche des Hrn. Beudant*).

Sehr Recht hat dagegen Hr. Kopp, wenn er obige Bemerkung bei flüssigen Verbindungen macht, welche mit wenigen Graden schon bedeutende Aenderungen des Aequivalentvolumens haben. Hier wird die Frage: bei welchen Temperaturen muss man ihre Aequivalentvolumina vergleichen, um sofort einen Einblick in die räumliche Constitution zu haben? sehr kritisch. Sie ist auch schon vielfach der Gegenstand der Diskussion gewesen. Um aus dem Multa das einzig Brauchbare zu nennen, gedenke ich der Untersuchungen des Hrn. Kopp, welcher die Aequivalentvolumina bei den Siedepunkten verglich. So lehrreich diese Untersuchungen uns auch noch werden, so erkennt man doch sofort, dass durch sie zur in Frage stehenden Aufklärung wenig geleistet ist; denn, wenn gewisse isomere Verbindungen beim Siedepunkt dasselbe Volumen haben, so ist für diese Verbindungen nur die Thatsache festgestellt, dass in ihnen beim Uebergang in die Dampfform die constituirenden Elemente resp. elementare Verbindungen gleiches Volumen haben, aber der Grund ihrer Verschiedenheit ist um nichts mehr ergründet.

Da diese Frage so eng mit der Wärmelehre zusammenhängt, und letztere durch die Beziehungen zwischen Raum und Wärme in der organischen Chemie ausgezeichnete Nahrung erhält, falle ihre Diskussion hier weg, wo ich vorläufig mich auf die Aequivalentvolumina der festen Körper beschränke. Bei der späteren Behandlung dieser Frage werde ich auch im Stande sein, den Beweis zu liefern, dass **die Individuen des Wassers bei 4⁰ Cels.**, wo es also am dichtesten ist, **in festen Hydraten wieder gefunden werden.** Aus diesem Satze lernen wir, dass nicht gerade nur feste Körper mit festen zu vergleichen sind, um einfache Relationen zu gewinnen; dass man nicht gerade das Eis hierzu in Vergleichung bringen muss. — Die Thatsache, dass die Individuen des Wassers bei 4^0 C. in festen Körpern auftreten, neben dem Umstande, dass die spezifischen Gewichte der festen Körper meist auf

*) Ann. de chim. et de phys. XXXVIII, 398 und Pogg. ann. tom. XIV pag. 474.

solches Wasser bezogen sind, ist von höchstem Interesse für das Berechnen der Aequivalentvolumina, wie wir gleich sehen werden.

Beziehungen der Aequivalentvolumina aufzufinden, haben bekanntlich schon Viele angestrebt (die Meisten in den Jahren 1842—1845), aber noch Keiner hat es zu einem glaubwürdigen System gebracht. Ich werde in Folgendem mein System der mathematischen Chemie für feste Körper skizziren. Es hat Vieles in sich, was schon Hr. Schröder gesagt; steht aber zu dessen Arbeiten in demselben Verhältniss, wie dasjenige System, welches die Beziehungen der Aequivalentvolumina durch Potenzverhältnisse erschlösse — wenn's also möglich wäre — zu den Priorität suchenden Anstrengungen des Engländers Playfair sich stellen würde, welcher Chemiker alle möglichen Wurzeln der Aequivalentzahlen und ihrer Multipla mit den spezifischen Gewichten der Elemente verglich.

Mein Hauptsatz für die Aequivalentvolumina fester Körper in allen ihren Modifikationen ist der, dass sie in rationalem Verhältniss zu einander stehen; und der durch Untersuchungen sich heraustellende Untersatz ist, dass diese Verhältnisse einfacher Art sind.

Jetzt macht sich die Zahl 9 des Aequivalentvolumens von Wasser bei 4° C. geltend. Es stellt sich heraus, dass die Aequivalentvolumina durch 3 theilbar sind. Hierin liegt die Norm für die Bestimmung der Aequivalentvolumina. So finden wir in den Otyden, dass der Sauerstoff die Aequivalentvolumina:

...2,7; 3,9; 4,5; 4,8; 5,1; 5,4 ...

hat.

Mancher, welcher in dieser Sache noch keine Studien gemacht hat und vor dem Prüfen zu verwerfen leicht geneigt ist, mag denken, ich schaffe mir mit diesen vielen Zahlen eine Schablone der Willkühr. Ich bitte ihn, diesmal erst nach sorgfältiger Prüfung sein Urtheil fällen zu wollen; mag dann sein Urtheil mit meiner Ueberzeugung von meinem System differiren, zu der Ueberzeugung glaube ich ihn dann doch geführt zu haben, dass die Modifikationen der Elemente, resp. elementarer Verbindungen, in ihren Verbindungen uns wieder entgegentreten.

Ehe ich jedoch zur wirklichen Rechnung übergehe, glaube ich noch Etwas sagen zu müssen über die sogenannte Binartheorie. Durch meine Untersuchungen stellt sich heraus, dass in einer höheren Verbindung die Moleküle der elementaren Verbindungen ihren individuellen Charakter behalten, sodass sie also Individuen sind, wie die kleinsten Theile der Elemente. Es wird sich z. B. herausstellen, dass die Individuen des Rubins, Sapphirs, Corunds in den Thonerdesalzen wieder zum Vorschein kommen.

Ich schicke mich an, mein System und meine Ansichten durch praktisch gewonnene Grössen zu vertheidigen. Ich bin mir dabei recht

bewusst, dass Naturwissenschaft keine Wissenschaft ist, bei der man a priori schliesst, und dass meine Angaben bei den Lesern am besten dann ziehen würden, wenn diese schon die Mühe sich genommen hätten, die sämmtlichen bekannten Mineralien nach ihrer räumlichen Constitution verstehen zu wollen. — Zunächst will ich einige Hydrate anführen, in denen das Aequivalentvolumen des Wassers 9 ist.

Zur Abkürzung bezeichne ich die Aequivalentzahl, das Aequivalentvolumen, das spezifische Gewicht eines Körpers K mit

$$ae(K),\quad v(K),\quad p(K)$$

z. B.

$$ae(Fe_2\,O_3) = 80$$
$$v(Fe_2\,O_3) = 15{,}3$$
$$p(Fe_2\,O_3) = 5{,}225.$$

Um aber z. B. das Aequivalentvolumen von Fe in $v(Fe_2\,O_3) = 15{,}3$ anzugeben, schreibe ich $2.Fe_v\,(Fe_2\,O_3)$ oder kurz Fe_v^2. Die berechneten p markire ich.

$$(HO)_v = 9.$$

1. $v(P) = 17{,}4;\quad p' = 1{,}781$
   $p = 1{,}77$ (Berzelius)
   $v(P.HO) = 17{,}4 + 9{,}0 = 26{,}4;\quad p' = 1{,}515$
   $p = 1{,}515$ (Pelouze)

2. $v(ZnO) = 7{,}2;\quad p' = 5{,}666$
   $p = 5{,}657$ (Rose).
   $v(ZnO.HO) = 7{,}2 + 9{,}0 = 16{,}2;\quad p' = 3{,}055$
   $p = 3{,}053$ (Filhol)

. $v(CaO.) = 8{,}85;\quad p' = 3{,}164$
   $p = 3{,}161$ (Karsten)
   $v(CaO.HO) = (8{,}85 + 9{,}0) = 17{,}85;\quad p' = 2{,}073$
   $p = 2{,}078$ (Filhol)

4. $v(KO) = 17{,}7;\quad p' = 2{,}666$
   $p = 2{,}656$ (Karsten)
   $v(KO.HO) = 17{,}7 + 9{,}0 = 26{,}7;\quad p' = 2{,}105$
   $p = 2{,}10$ (vulgo)

5. $v(NaO) = 11{,}1;\quad p' = 2{,}793$
   $p = 2{,}805$ (Karsten)
   $v(NaO.HO) = 11{,}1 + 9{,}0 = 20{,}1;\quad p' = 1{,}948$
   $p = 2{,}0$ (Dalton)

6. $v(Fe_2\,O_3) = 15{,}3;\quad p' = 5{,}224$
   $p = 5{,}225$ (Boullay)
   $v(Fe_2\,O_3.HO) = 15{,}3 + 9{,}0 = 24{,}3;\quad p' = 3{,}662$
   $p = 3{,}65$ (Berzelius).

Diese Hydrate könnte ich noch vermehren, wenn nicht das v der Metalloxyde in den gedachten Hydraten erst nach den später kommenden Regeln bestimmt werden müsste. An betreffender Stelle werde ich sie erwähnen.

Die v der vorgeführten Metalloxyde lernen wir ihrer Constitution nach später kennen, und zwar nach dem System als mathematisch genaue Grössen, z. B.

$$v(CaO) = 8{,}85 \text{ besteht aus } Ca_v = 6{,}3 \quad O_v = 2{,}55$$

wo O_v die oft auftretende Hälfte von 5,1 ist und Ca_v die Hälfte des

$$v(Ca) = 12{,}6; \quad p' = 1{,}587 \quad p = 1{,}584 \text{ (Bunsen).}$$

Es gehört nämlich Ca zu denjenigen Metallen, welche häufig Verbindungen mit der Hälfte des v im freien Zustande eingehen.

Dass in obigen Hydraten das $v(HO) = 9{,}0$ auftritt, ist sicher; es käme darauf an, die Constitution dieses Wassers kennen zu lernen. Dieselbe lässt sich nur durch die Volumenänderung des flüssigen Wassers bei anderen Temperaturen als 4^0 C. angeben und ihre Erkennung würde also die Frucht der Vergleichung mit den Flüssigkeiten der organischen Chemie sein. Ich ponire in $v(HO) = 9{,}0$ das $H_v = 3{,}6$ und $O_v = 5{,}4$. Dies anzunehmen hindert nicht

$$v(HO_2) = 11{,}7 = 9{,}0 + 2{,}7; \quad p' = 1{,}453 \quad p = 1{,}452 \text{ (Thénard)}$$

denn das zweite O ist eine vom ersten verschiedene Modifikation*).

---

*) Darin jedoch, dass das zweite O bei geringer Erwärmung weggeht, liegt nicht gerade der Grund seiner Verschiedenheit vom ersten. So geht z. B. auch aus dem Polianit des Hrn. Plattner das O und HO fort, obgleich dies fortgehende O von derselben Modifikation mit dem im MnO zurückbleibenden zu sein scheint. Dieser Polianit nämlich ist

$$64(MnO + O) + (MnO + HO)$$

denn

$$\begin{array}{lll} 65\,MnO = 81{,}37 & \text{(gefunden } 81{,}40 \\ 64\,O = 18{,}31 & 18{,}28 \\ 1\,HO = 0{,}32 & 0{,}32). \end{array}$$

Hierin scheint nämlich das Mn mit dem Fe des Hrn. Beaudrimont:

$$v(Fe) = 3{,}6; \quad p' = 7{,}778 \quad p = 7{,}778 \text{ (Beaudrimont)}$$

isoster zu sein; ebenso aber auch das O_v des entweichenden Sauerstoffs gleich dem O_v des aus HO_2 entweichenden O und gleich dem O_v des O im zurückbleibenden MnO. Denn $v[64(MnO + O) + MnO.HO] = 64.[(3{,}6 + 2{,}7) + 2{,}7] + [(3{,}6 + 2{,}7) + 9{,}0] = 573{,}3$ liefert $p' = 4{,}877$, also gleich dem $p = 4{,}88$ des Hrn. Plattner.

Das Studium des Entweichens ein und desselben Stoffes bei verschiedenen Temperaturen aus ein und derselben Verbindung ist noch wenig in Angriff genommen worden, und desswegen will ich an diesem Orte nicht unterlassen, die chemische Constitution eines Pyrolusits vom $p = 4{,}91$ anzugeben:

$$(HO)_v = 6,3.$$

Man hat einen gewissen Anhaltspunkt für eben angegebene Constitution des $(HO)_v = 9,0$ in dem oft als Base sich geltend machenden Wasser vom $v = 6,3$. Dieses Wasser hat die Constitution: $H_v = 3,6$ und $O_v = 2,7$. Die Existenz dieses Wassers ergibt sich aus:

1. $v(MGO) = 6,3$; $p' = 3,174$
   $p = 3,20$ (Karsten)
   $v(MGO.HO) = 6,3 + 6,3 = 12,6$; $p' = 2,30$
   $p = 2,30$ (Kirvann)
2. $v(SnO_2) = 10,8$; $p' = 6,944$
   $p = 6,96$ (Kopp)
   $v(SnO_2.HO) = 10,8 + 6,3 = 17,1$; $p' = 4,912$
   $p = 4,932$ (Grh.-Otto).

$$(HO)_v = 7,65.$$

Dass in diesem, sehr oft auftretenden Wasser vom $v = 7,65$ auch $H_v = 3,6$ existirt, hat sehr viel Wahrscheinlichkeit. Denn dann müsste $O_v = 4,05 = \frac{3}{2}.2,7$ sein, welches O_v uns *u.i.a.*𝔅. in $v(SO_3) = 20,25$ auch entgegentritt:

$v(S) = 8,1$; $p' = 1,975$
$p = 1,976$
$v(SO_3) = 8,1 + 3.4,05 = 20,25$; $p' = 1,975$
$p = 1,970$ (Bussy).

Dass $(HO)_v = 7,65$ existirt, ergibt sich aus

1. $v(NaO) = 11,1$ (siehe oben)
   $v(NaO.HO) = 11,1 + 7,65 = 18,75$; $p' = 2,133$
   $p = 2,130$ (Filhol)
2. $v(Fe_2O_3) = 15,3$ (siehe oben)
   $v(Fe_2O_3 + HO) = 15,3 + 7,65 = 22,95$; $p' = 3,878$
   $p = 3,878$ (Vohl).

Ich habe schon drei verschiedene Modifikationen des Wassers angeführt; es sei mir erlaubt, hier noch auf zwei Modifikationen aufmerksam zu machen. Die eine ist die Modifikation von $(HO)_v = 8,1$, welche dadurch charakterisirt ist, dass sie gewöhnlich bei 100^0 C. entweicht und die Verwitterung so leicht möglich macht. Die andere ist die durch ihr grosses Aequivalentvolumen merkwürdige Modifikation

---

Pyrolusit $= 1290\,(MnO + O) + 35\,(MnO + 2.HO) + 2\,(2.BaO + HO)$;
gefunden: MnO 80,44; 17,90 O; 1,13 HO; 0,53 BaO;
berechnet: „ 80,444; 17,901 „ 1,124 „ 0,531 „

$$HO_v = 15{,}0.$$

1. $v(NaO) = 11{,}1$ (siehe oben)
   $v(NaO.HO) = 11{,}1 + 15{,}0 = 26{,}1$; $p' = 1{,}533$
   $p = 1{,}536$ (Gehlers Lex.)
2. $v(KO) = 17{,}7$ (siehe oben)
   $v(KO.HO) = 17{,}7 + 15{,}0 = 32{,}7$; $p' = 1{,}721$
   $p = 1{,}708$ (Gehl. Lex.)

Es wäre manchem Leser gewiss interessant gewesen, neben den erwähnten Modifikationen des Wassers nicht die des Eises vermissen zu müssen; es thut mir leid, darin nicht entsprechen zu können; auf dem Dorfe, worin ich zur Zeit mich aufhalten muss, habe ich keine Gelegenheit, die mir verloren gegangenen Notizen über das Eis wieder ersetzen zu können.

Ich will jetzt dazu übergehen, die einfachen Verhältnisse zwischen den O_v an verschiedenen Oxyden zu zeigen. Dazu ist nothwendig, über die v der Metalle gewiss zu werden. Wie soll ich es anfangen, hierüber so überzeugend als möglich für die Leser mich auszudrücken? Es würde mancher Leser vielleicht erwarten, dass ich erst die v aller Metalle systematisch anführe und darauf die v ihrer Oxyde mit ihnen vergliche. Dies zu thun finde ich für meinen Zweck nicht angemessen. Ich will vielmehr also verfahren: ich will erst an mehreren Oxyden, in denen solche Metall-Individuen, welche im freien Zustande bekannt sind, uns entgegentreten, die Existenz verschiedener Modifikationen des Sauerstoffs und die v derselben bis zur Gewissheit lehren; dann nach Kenntniss der O_v auf die v solcher Metall-Individuen, welche als freie nicht bekannt sind, zurückschliessen.

$$O_v = 1{,}35 = \tfrac{1}{2}.2{,}7$$
$$O_v = 2{,}7.$$

Die dichteste Modifikation des O finden wir als $O_v = \frac{1}{2}.2{,}7 = 1{,}35$ im Zinnstein und krystallisirten Kadmiumoxyd:

1. $v(Sn) = 8{,}1$; $p' = 7{,}284$
   $p = 7{,}291$ (Karsten)
   $v(SnO_2) = 8{,}1 + 2.1{,}35 = 10{,}8$; $p' = 6{,}944$
   $p = 6{,}96$ (Kopp)
2. $v(Cd) = 6{,}45$; $p' = 8{,}682$
   $p = 8{,}677$ (Herapath)
   $v(CdO) = 6{,}45 + 1{,}35 = 7{,}8$; $p' = 8{,}205$
   $p = 8{,}183$ (Herapath).

Die Modifikation des O, deren v doppelt so gross ist, finden wir im CdO des Hrn. Kopp:

3. $v(CdO) = 6,45 + 2,7 = 9,15;\; p' = 6,994$
$p = 7,00$ (Kopp);

ferner in $(HO)_v = 6,3 = 3,6 + 2,7$; ferner in

4. $v(Fe) = 3,6;\; p' = 7,778$
$p = 7,778$ (Beaudrimont)
$v(Fe_2O_3) = 2.3,6 + 3.2,7 = 15,3;\; p' = 5,224$
$p = 5,225$ (Boullay)

5. $v(Zn) = 4,5;\; p' = 7,24$
$p = 7,24$ (Böckmann)
$v(ZnO) = 4,5 + 2,7 = 7,2;\; p' = 5,666$
$p = 5,657$ (Rose).

Die eben erwähnte Modifikation: $O_v = 2,7$ tritt sehr oft auf, wie wir später sehen werden. Eine fast nicht minder oft uns begegnende Modifikation ist

$$O_v = \tfrac{1}{2}.3,9 = 1,95$$
$$O_v = 3,9.$$

1. $v(Ni) = 3,6$; Ni isoster mit dem eben erwähnten Fe und dem Cr, dessen $p = 7,3$ angegeben wird.
$v(NiO) = 3,6 + 1,95 = 5,55;\; p' = 6,666$
$p = 6,661$ (Rammelsberg)

2. $v(Sn) = 8,1$ (siehe oben!)
$v(SnO) = 8,1 + 1,95 = 10,05;\; p' = 6,666$
$p = 6,666$ (Herapath)

3. $v(Ag) = 10,2;\; p' = 10,587$
$p = 10,567$ (G. Rose)
$v(AGO) = 10,2 + 3,9 = 14,1;\; p' = 8,227$
$p = 8,256$ (Karsten)

4. $v(Si) = 5,7;\; p' = 2,456$
$p = 2,490$ (Wöhler)
$v(SiO_2) = 5,7 + 2.3,9 = 13,5;\; p' = 2,222$
$p = 2,222$ (Schaffgotsch).

$$O_v = \tfrac{1}{2}.5,1 = 2,55.$$

Die Modifikation $O_v = 2,55$, welche auch oft auftritt, haben wir in

1. $(CaO) = 6,3 + 2,55 = 8,85$ (siehe oben!)

kennen gelernt. Als fernere Beispiele gelten:

2. $v(Cu) = 3,6;\; Cu_v = Fe_v = Ni_v = 3,6;$
$v(CuO) = 3,6 + 2,55 = 6,15;\; p' = 6,455$
$p = 6,451$ (Jentzsch)

3. $v(Pb) = 9,15$; $p' = 11,312$

$v(Pb_2O_3) = 2.9,15 + 3.2,55 = 25,95$; $p' = 8,902$
$p = 8,902$ (Herap.)

4. $v(Pb_3O_4 =$ Mennige$) = 3.9,15 + 4.2,55 = 36,75$;
$p' = 9,097$
$p = 9,096$ (Herap.).

Hierhin wäre vielleicht etwa noch zu rechnen

5. $v(PbO) = 9,15 + 2,55 = 11,7$; $p' = 9,530$
$p = 9,50$ (Boullay),

aber nicht mit Gewissheit. Denn es existirt auch die Modifikation $(Pb)_v = 9,0$, und da könnte $v(PbO) = 11,7$ die Constitution $Pb_v = 9,0 + O_v = 2,7$ haben. Sehr oft begegnen uns Verbindungen, deren v so beschaffen ist, dass verschidene Modifikationen der sie constituirenden Elemente der Grösse des v Genüge leisten. So z. B. die andere, oktaed. kryst., Modifikation von PbO:

$v(PbO) = 13,95$; $p' = 8,025$
$p = 8,02$.

Hier kann nun sein $v(PbO) = 9,15 + 4,8$, aber auch $= 9,0 + 4,95$ (dies wahrscheinlich!); denn dass $O_v = 4,95$ existirt, ergibt sich a. a. O. auch aus

$v(As) = 13,2$; $p' = 5,682$
$p = 5,672$ (Herap.)*)

$v(AsO_3 =$ regul. Octaed.$) = 13,2 + 3.4,95 = 28,05$;
$p' = 3,5294$
$p = 3,529$ (Regn. Stre.).

Die dritte Modifikation

$v(PbO) = 9,0 + 3,0 = 12,0$; $p' = 9,277$
$p = 9,275$ (Herap.)

lässt freilich keinen Zweifel über ihre Constitution übrig, weil $O_v = 3,0$ wohl oft auftritt, aber nie $O_v = 2,85$.

Zu den Oxyden, in denen $O_v = 2,55$ existirt, gehört auch noch

6. $v(HGO) = 7,2 + 2,55 = 9,75$; $p' = 11,077$
$p = 11,078$ (Herapath).

Man verzeihe mir, wenn ich hier von der Norm abweiche und das oft auftretende $HG_v = 7,2$ hierhersetze, ohne seine Existenz im isolirten Zustande angeben zu können. Ich that es, weil ich nicht wusste, wie ich diese Constitution später passend anbringen könne, und um gleich durch folgendes

*) Dieses As ist isoster und isomorph mit dem rothen krystallisirten Phosphor: $v(P) = 13,2$; $p' = 2,348$; $p = 2,34$ (Hittorf).

$$v(HG_2O) = 2.7,2 + 5,1 = 19,5; \quad p' = 10,67$$
$$p = 10,69 \quad \text{(Herapath)}$$

den Ammermüller'schen Satz*), dass im Oxydul das O_v doppelt so gross auftreten kann als im Oxyd, in Erinnerung zu bringen.

Wir haben in den vorgeführten Oxyden nun schon verschiedene Modifikationen des O kennen gelernt, als:

$$\begin{aligned} O_v &= 1,35; \quad 2,7 \\ &= 1,95; \quad 3,9 \\ &= 2,55; \quad 5,1 \\ &= 3,0\ ; \quad 4,95 \\ &= 4,05 = 3.1,35 \text{ vergl. } v(SO_3) = 20,25. \end{aligned}$$

Diese Anzahl von Modifikationen wird genügen, um die weiteren Untersuchungen über Oxyde ohne Meinungsdifferenz mit mir durchzugehen.

BO_3.

Wir haben oben $v(Sn) = 8,1$ kennen gelernt. Mit diesem Sn ist isomorph das diamantenartige Bor (dimetrisch) vom $p = 2,681$. Dieser Modifikation des Bor entspricht das $v = 4,05 = \frac{1}{2}.8,1 = \frac{1}{2}.v(Sn)$. Die v würden für diese isomorphen Stoffe gleich sein, wenn man statt BO_3 schriebe $B(O^3)_2$; und diese Schreibweise würde zweifelsohne zweckmässiger sein, als das dieser Isomorphie einst zur Liebe geschriebene SnO_3 für SnO_2.

Die Individuen dieses Bor finden wir mehrfach wieder:

1. Im Boracit $= MGO^3.BO_3{}^4$. Es ist hierin

$$\begin{aligned} 3(MGO)_v &= 3.6,3 = 18,9 \quad \text{(siehe oben!)} \\ 4(BO_3)_v &= 4(4,05 + 3.2,7) = 4.12,15 = 48,6 \\ v(MGO^3.BO_3{}^4) &= 67,5; \quad p' = 2,956 \\ & \qquad\qquad p = 2,955 \quad \text{(Rammelsberg).} \end{aligned}$$

2. Im oktaedrischen Borax $= NaO.BO_3{}^2 + 5HO$.

$$\begin{aligned} NaO_v &= 11,1 &&= 11,1 \\ 2(BO_3)_v &= 2.12,15 &&= 24,3 \\ 5(HO)_v &= 5.9,0 &&= 45,0 \\ & & v &= 80,4; \quad p' = 1,813 \\ & & & \qquad\quad p = 1,815 \end{aligned}$$

3. In $NaO.BO_3{}^2 + 10.HO$.

$$\begin{aligned} NaO_v &= 11,1 &&= 11,1 \\ 2(BO_3)_v &= 2.12,15 &&= 24,3 \\ 10(HO)_v &= 10.7,65 &&= 76,5 \\ & & v &= 111,9; \quad p' = 1,705 \\ & & & \qquad\quad p = 1,692 \quad \text{(Filhol).} \end{aligned}$$

*) Vergl. Ammermüller's Dissertation in Poggend. ann. tom. 49 pag. 341; 1840, Nr. 2.

In den drei erwähnten Verbindungen war das $(BO_3)_v$ dasselbe; in den beiden letzten finden wir verschiedene, schon bekannte, Modifikationen des Wassers.

Jene Individuen des Bors finden wir wieder:

4. im Borax anhydre $= NaO.BO_3^2$:

$$(NaO)_v = 11,1 \quad = 11,1$$
$$2.(BO_3)_v = 2.15,75 = 31,5$$
$$v = 42,6; \quad p' = 2,366$$
$$p = 2,367 \quad \text{(Filhol).}$$

Diese Borsäure enthält nicht die Modifikation $O_v = 2,7$, sondern die $O_v = 3,9$ d. h. $(BO_3)_v = 4,05 + 3.3,9 = 15,75$.

5. In der geschmolzenen BO_3 des Hrn. Davy:

$$v(BO_3) = 4,05 + 3.5,1 = 19,35; \quad p' = 1,804$$
$$p = 1,803 \quad \text{(Davy).}$$

Hierin ist also $O_v = 5,1$, wie oben in $(HG_2O)_v$.

6. Die eben erwähnte BO_3 des Hrn. Davy begegnet uns wieder in $BO_3 + 3HO$ oder $BO_3HO + 2HO$. Es ist bekannt, dass $2HO$ hieraus bei Erhitzung weggehen. Dies hat hier seinen Grund darin, dass zwei verschiedene Modifikationen von HO in der Verbindung existiren, nämlich die abgehende ist vom $HO_v = 8,1$, die zurückbleibende dagegen die schon kennen gelernte $HO_v = 6,3$. Demnach

$$v(BO_3.HO + 2HO) = 19,35 + 6,3 + 2.8,1 = 41,55$$
$$p' = 1,479$$
$$p = 1,480 \quad \text{(Berzel.)}$$
$$p = 1,4797 \quad \text{(Böttger).}$$

Würde man die $2HO$ so entfernen, dass das Restirende BO_3HO dabei keine Aenderung erleidet, so würde man

$$p(BO_3.HO) = \frac{ae(BO_3.HO)}{19,35 + 6,3} \text{ finden.}$$

Eine dieser Constitution ganz ähnliche haben wir in $C_2O_3.HO + 2HO$. Es ist hierin $(C_2O_3)_v = 16,2$, welche (C_2O_3)-Modifikation uns auch in anderen Verbindungen wieder entgegentritt. Es ist alsdann

$$v(C_2O_3.HO + 2HO) = 16,2 + 6,3 + 2.8,1 = 38,7; \quad p' = 1,628$$
$$p = 1,629 \text{ (Buignet)}$$
$$p = 1,63 \text{ (Bödeck.)}$$

und

$$v(C_2O_3.HO) = 16,2 + 6,3 = 22,5; \quad p' = 2,000$$
$$p = 2,00 \quad \text{(Bödecker).}$$

Durch das Zusammenhalten solcher analoger Verbindungen wie $HO.BO_3 + 2HO$ und $HO.C_2O_3 + 2HO$ kann man viel lernen. Aus der Differenz:

$$v(HO.C_2O_3 + 2HO) - v(HO.C_2O_3) = 16,2$$

ergibt sich $HO_v = 8,1$. Denke ich mir dieses Wasser auch in $HO.BO_3 + 2HO$, so ist $v(HO.BO_3) = 25,65$ d. h. gleich dem $HO_v = 6,3$ und $(BO_3)_v$ des Hrn. Davy. Setze ich nun wieder $HO_v = 6,3$ in $HO.C_2O_3$, so bleibt $(C_2O_3)_v = 16,2$, was auch durch oxalsaure Salze als recht erkannt wird. Welche Constitution hat $(C_2O_3)_v = 16,2$?

Es ist hierin $C_v = 4,05$ und $O_v = 2,7$. Diese Kohle hat man freilich im freien Zustande noch nicht wahrgenommen, obgleich sie oft auftritt, wie auch in $(CO_2)_v = 10,05$. Von den als freien beobachteten C-Individuen ist die Modifikation, welche am öfteren auftritt, diejenige des Hrn. Kenngott:

$v(C) = 2,7; \quad p' = 2,222$
$p = 2,229$ (Kenngott).

Diese existirt z. B. im Arragonit und im $PbO.CO_2$ des Hrn. Beudant. Es ist hierin

$$(CO_2)_v = 2,7 + 2.2,7 = 8,1,$$

daher

1. $(CaO)_v = 8,85$ (siehe oben!)
   $v(CaO.CO_2) = 8,85 + 8,1 = 16,95; \quad p' = 2,9498$
   $p = 2,949$ (H. Rose)
2. $(PbO)_v = 11,7$ (siehe oben!)
   $v(PbO.CO_2) = 11,7 + 8,1 = 19,8; \quad p' = 6,742$
   $p = 6,7293$ (Beudant).

In der erwähnten Kohlensäure-Modifikation ist $C_v = O_v$.

Einige Erdmetalle.

I. Ba, Sr, Tl.

Zunächst will ich an einigen Erdmetallen eine noch nicht beachtete Gleichheit des Aequivalentvolumens zeigen, nämlich an Barium, Strontium und Thallium.

$ae(Ba) = 68,5; \quad v = 17,1; \quad p' = 4,006$
$p = 4,00$ (Gehl. Lex.)
$ae(Sr) = 43,8; \quad v = 17,1; \quad p' = 2,561$
$p = 2,504 - 2,580$ (Bunsen)
$ae(Tl) = 203,5; \quad v = 17,1; \quad p' = 11,901$
$p = 11,9$ (Crookes).

Mit dem $v = 17,1$ aber treten diese Metalle in Verbindungen höchst selten auf; ja $(Ba)_v = 17,1$ liegt gar nicht vor.

Wie wir später sehen werden, tritt in den salpetersauren Salzen sehr oft $(NO_5)_v = 26,1$ auf; diese NO_5-Modifikation existirt auch in den Salzen:

1. $v(SrO.NO_5) = (17,1 + 2,7) + 26,1 = 45,9; \quad p' = 2,305$
   $p = 2,305$ (Buign.)
2. $v(TlO.NO_5) = (17,1 + 2,7) + 26,1 = 45,9; \quad p' = 5,80$
   $p = 5,80$

(Wien. Ac. Ber. vol. 48, pga. 370 ff.)

Obgleich es keinem Zweifel unterliegt, dass in diesen zwei Verbindungen das v des Metalls gleich 17,1 ist, so will ich doch noch eine analoge Constitution zur weiteren Erhärtung hinzufügen:

3. $v(AG) = 10{,}2$ (siehe oben!)

$v(AGO.NO_5) = (10{,}2 + 2{,}7) + 26{,}1 = 39{,}0;\ p' = 4{,}3590$

$p = 4{,}3554$ (Karst.)

In den meisten Verbindungen des *Ba* und *Sr* tritt uns das v der Metalle bald als $\frac{2}{3}.17{,}1$ d. i. als 11,4, bald als $\frac{1}{2}.17{,}1 = 8{,}55$ entgegen. Wir haben also dann speziell hier eine Gesetzmässigkeit, welche Hr. Schöder (Pogg. ann. 1842) allgemein für die Aequivalentvolumina der Elemente geltend gemacht hat.

So ist z. B.

$v(BaO) = 11{,}4 + 2{,}7 = 14{,}1;\ p' = 5{,}425$

$p = 5{,}456$ (Filhol).

Diese *BaO*-Modifikation begegnet uns wieder z. B. in

1. $v(BaO + 9HO) = 14{,}1 + 9.9{,}0 = 95{,}1;\ p' = 1{,}657$

$p = 1{,}656$ (Filhol)

2. $v(BaO.NO_5) = 14{,}1 + 26{,}1 = 40{,}2;\ p' = 3{,}246$

$p = 3{,}240—3{,}242$ (Krem.)

Die Uebereinstimmung der $p(BaO + 9HO)$ und $p(BaO.NO_5)$ mit ihren p' lehrt, dass das $p(BaO)$ des Hrn. Filhol nicht exact ausgefallen ist.

Sollte nicht auch $v(SrO) = 14{,}1$ existiren? Diese Modifikation des *SrO* ist noch nicht beobachtet worden, aber, dass sie existirt, ergibt sich aus

$v(SrO + 9HO) = 14{,}1 + 9.9{,}0 = 95{,}1;\ p' = 1{,}396$

$p = 1{,}396$ (Filhol).

Es ist also dieses Strontianhydrat gleicher Constitution mit dem angeführten Barythydrat.

Dass auch $(Ba)_v$ und $(Sr)_v$ in Oxyden mit der Hälfte von 17,1 auftreten, will ich nun zeigen. Ein solches *BaO* liegt mir zwar augenblicklich nicht vor, aber seine mögliche Existenz ergibt sich aus einem solchen *SrO*.

1. $v(SrO) = 8{,}55 + 2{,}7 = 11{,}25;\ p' = 4{,}605$

$p = 4{,}611$ (Filhol).

Wir haben hier, wie in der angeführten Modifikation von *SrO*, die Modifikation $O_v = 2{,}7$; es wird uns aber nicht wundern, wenn auch die Modifikation $O_v = 1{,}95$ in diesem Oxyde existirte. Und es exisirt in der That:

2. $(SrO)_v = 8{,}55 + 1{,}95 = 10{,}5.$

Dies erhellt aus:

1. $v(SrO.HO) = 10{,}5 + 6{,}3 = 16{,}8;\ p' = 3{,}619$

$p = 3{,}625$ (Filhol)

2. $v(SrO.NO_5) = 10{,}5 + 26{,}1 = 36{,}6;\ p' = 2{,}8907$

$p = 2{,}8901$ (Karsten).

Wir haben demnach bis jetzt vier Modifikationen von SrO kennen gelernt:

1. $v(SrO) = 17{,}1 + 2{,}7 \quad = 19{,}8$
2. $v(SrO) = 11{,}4 + 2{,}7 \quad = 14{,}1$
3. $v(SrO) = 8{,}55 + 2{,}7 \quad = 11{,}25$
4. $v(SrO) = 8{,}55 + 1{,}95 = 10{,}5.$

Und zwei Modifikationen von $SrO.NO_5$:

1. $v(SrO.NO_5) = 19{,}8 + 26{,}1 = 45{,}9$
2. $v(SrO.NO_5) = 10{,}5 + 26{,}1 = 36{,}6.$

Sollten dies die einzigen Modifikationen von SrO und $SrO.NO_5$ sein? Ganz wahrscheinlich nicht!

II. Ueber *Ca* und *MG*.

Die merkwürdige Eigenschaft der Volumenänderung des *Ba* und *Sr* theilt im gleichen Maasse das *Ca* und das *MG*.

1. $v(Ca) = 12{,}6$ (siehe oben!)
   $v(CaO) = \frac{1}{2}.12{,}6 + 2{,}55 = 8{,}85$ (siehe oben!)
2. $v(CaO) = \frac{2}{3}.12{,}6 + 3{,}9 = 12{,}3$; $p' = 2{,}277$
   $p = 2{,}3$ (Berzel.)
3. $v(MG) = 7{,}2$; $p' = 1{,}667$
   $p = 1{,}69 — 1{,}71$ (Kopp)
   $v(MGO) = \frac{1}{2}.7{,}2 + 2{,}7 = 6{,}3$ (siehe oben!)
4. $v(MGO) = \frac{2}{3}.7{,}2 + 3{,}9 = 8{,}7$; $p' = 2{,}30$
   $p = 2{,}3$ (Berzel.).

Man findet hier $v(CaO) = 12{,}3$ und $v(MGO) = 8{,}7$ paralleloster!

III. Ueber Al_2O_3.

Wie nach ihrem zahlreichen Auftreten die Thonerde eine grosse Rolle unter den elementaren Verbindungen spielt, so auch nicht minder durch ihre zahlreichen Modifikationen. Ohne letztere wahrscheinlich nicht die erstere! Die Verschiedenheit dieser Modifikationen lässt sich leicht klar darthun, weniger jedoch die spezielle Constitution, denn die meisten Modifikationen existiren für sich und lassen sich in Verbindungen meist leicht wieder erkennen; dagegen ist das Aluminium-Metall, so wie es in den verschiedenen Modifikationen der Thonerde auftritt, nicht in freiem Zustande wahrgenommen: es ist selbst mehrerer Zustände fähig und in diesen nur durch Schlussfolgerung per analogiam aus dem $v(Al_2O_3)$ zu bestimmen. Für gewalztes Aluminium gibt Deville das $p = 2{,}67$, wofür $v = 5{,}1$ und $p' = 2{,}686$ ist. Neben diesem p findet man noch für krystallis. Aluminium $p = 2{,}56$, wofür $v = 5{,}4$ ist. Aus den von mir bald vorgeführten Thonerde-Modifikationen werden wir aber schliessen, dass $(Al_2)_v$ weder mit $v = 2.5{,}1$ noch mit $v = 2.5{,}4$, überhaupt mit einem v über 8 wohl nicht auftritt, und dass das Aluminium-Metall nicht zu denjenigen gehört,

welche die **Schröder**'sche Regel befolgen. Nur bei einer einzigen Modifikation scheint dies stattzufinden, nämlich bei $(Al_2O_3)_v = 13{,}2$:

$$v(Al_2O_3) = 5{,}1 + 3.2{,}7 = 13{,}2.$$

Die Existenz dieser Modifikation ergibt sich aus

$$p[.Al_2O_3.SeO_3{}^3 + KaO\ SeO_3 + 24\,HO] = 1{,}971 \quad \text{(R. Weber).}$$

Hierin ist nämlich $HO_v = 8{,}1$
$KaO = 17{,}7$ (siehe oben!)
$SeO_3 = 15{,}9.$

Diese $SeO_3 = 15{,}9$ ergibt sich aus

1. $v(BaO.SeO_3) = 14{,}1 + 15{,}9 = 30{,}0;\ p' = 4{,}666$
$p = 4{,}67$ (Schafarik)
2. $v(PbO.SeO_3) = 11{,}7 + 15{,}9 = 27{,}6;\ p' = 6{,}341$
$p = 6{,}37$ (Schafarik)

und ist also constituirt:

$$(SeO_3)_v = 7{,}8 + 3.2{,}7 = 15{,}9,$$

worin das $(Se)_v = 7{,}8$ entspricht dem

$$v(S) = 7{,}8;\quad p' = 2{,}051$$
$$p = 2{,}050 \quad \text{(Karsten).}$$

Demnach ist

$$v(Al_2O_3.SeO_3{}^3 + KaO.SeO_3 + 24\,HO) =$$
$$(13{,}2 + 3.15{,}9) + (17{,}7 + 1.15{,}9) + 24.8{,}1 = 288{,}9;\quad p' = p.$$

Diese Al_2O_3-Modifikation begegnet uns noch im Wermiculith des Hrn. **Crossley**.

In anderen Thonerde-Modifikationen ist man gezwungen das $(Al_2)_v = 4{,}8$ anzunehmen, als im

1. orientalischen Sapphir des Hrn. **Scholz**:
$v(Al_2O_3) = 4{,}8 + 3.1{,}95 = 10{,}65;\quad p' = 4{,}836$
$p = 4{,}830$ (Scholz).

Die Individuen dieses Sapphirs haben wir wieder in

a) reinem Diaspor $= Al_2O_3.HO$; $v = 10{,}65 + 7{,}65 = 18{,}3;\ p' = 3{,}306$
$p = 3{,}303$

b) Hydrargillit $= Al_2O_3 + 3\,HO$; $v = 10{,}65 + 3.7{,}65 = 33{,}6$;
$p' = 2{,}336;\quad p = 2{,}34.$

2. Orient. Sapphir des Hrn. **Brisson**:
$v(Al_2O_3) = 4{,}8 + 3.2{,}7 = 12{,}9;\quad p' = 3{,}997$
$p = 3{,}994$ (Brisson).

Die Modifikationen dieses Sapphirs finden wir wieder im Spinell $Al_2O_3.ZnO$. Denn

$(ZnO)_v = 7{,}2$ (siehe oben!)
$(Al_2O_3)_v = 12{,}9$
$v = 20{,}1;\quad p' = 4{,}58;\quad p = 4{,}58$ (Ebelmen).

3. Orient. Sapphir des Hrn. Brisson:

$v(Al_2O_3) = 4,8 + 3.3,9 = 16,5;\quad p' = 3,115$

$p = 3,131$ (Brisson).

Ebendies $(Al_2)_v = 4,8$ scheint auch zu existiren in der nur aus Verbindungen bekannten Modifikation:

4. $(Al_2O_3)_v = 13,8 = 4,8 + 3.3,0$.

War man genöthigt, in den vier erwähnten Modifikationen des $(Al_2)_v = 4,8$ anzunehmen, so ist man in den beiden folgenden $(Al_2)_v = 5,4$ oder $= 4,5$ anzunehmen genöthigt.

5. Orient. Sapphir des Hrn. Muschenbroek:

$v(Al_2O_3) = 5,4 + 3.3,0 = 14,4;\quad p' = 3,569$

$p = 3,562$ (Muschenbroek).

Man findet die Individuen dieses Sapphirs wieder im künstlichen Spinell des Hrn. Ebelmen:

$v(Al_2O_3.MGO) = 14,4 + 6,3 = 20,7;\quad p' = 3,450$

$p = 3,452$ (Ebelmen)

und in der Gemme

$v(MGO.Al_2O_3^?) = 6,3 + 2.14,4 = 35,1;\quad p' = 3,500$

$p = 3,523$ (Mohs).

Die Differenz zwischen p' und p findet ihre Erklärung darin, dass stets ein FeO-Gehalt das p erhöht.

6. Korund:

$v(Al_2O_3) = 4,5 + 3.2,7 = 12,6;\quad p' = 4,079$

$p = 4,0 - 4,07$.

Dass diese Modifikation existirt, ergibt sich aus

$v(Al_2O_3 + 8HO) = 12,6 + 8.9,0 = 84,6;\quad p' = 1,459$

$p = 1,459$ (Filhol).

7. Wie aber ist die Constitution des oft auftretenden orient. purpurrothen Rubins zu fassen?

$v(\text{Rubin} = Al_2O_3) = 12,0;\quad p' = 4,2833$

$p = 4,2813$ (Brisson).

Etwa $v = 6,15 + 3.1,95 = 12,0$?

Ueber die Alkalien KaO, NaO, LiO.

Wir haben oben schon je eine Modifikation zweier Alkalien kennen gelernt, nämlich $(KaO)_v = 17,7$ und $(NaO)_v = 11,1$. Diese alkalischen Individuen sind die einzigen, welche allein für sich erkannt worden sind. Von LiO liegt leider keine Bestimmung vor. Es ist

$v(Ka) = 45,0;\quad p' = 0,871$

$ae(Ka) = 39,2;\quad p = 0,865$ (Gay-Lussac)

$v(Na) = 23,4;\quad p' = 0,983$

$p = 0,988$ (Schröder)

$v(Li) = 11,7$; $p' = 0,5983$
$p = 0,598$ (Bunsen).

Zwischen $v(Na)$ und $v(Li)$ herrscht die merkwürdige Gesetzmässigkeit: $v(Na) = 2 . v(Li)$.

In den bemerkten Oxyden existiren die $\frac{1}{3}$ dieser v:

$$v(KaO) = \tfrac{1}{3} . 45,0 + 2,7 = 15,0 + 2,7 = 17,7$$
$$v(NaO) = \tfrac{1}{3} . 23,4 + 3,3 = 7,8 + 3,3 = 11,1.$$

Aus $v(NaO) = 11,1$ ergibt sich also als wahrscheinlich $O_v = 3,3$. Diese O-Modifikation scheint auch im Lithion des folgenden salpetersauren Lithion zu existiren:

$$v(LiO) = \tfrac{1}{3} . 11,7 + 3,3 = 3,9 + 3,3 = 7,2$$
$$v(LiO . NO_5) = 7,2 + 21,0 = 28,2\,; \quad p' = 2,447$$
$$p = 2,442 \quad \text{(Troost).}$$

Es existirt neben $(NO_5)_v = 26,1$, welches wir schon kennen gelernt haben, nämlich auch die Modifikation $(NO_5)_v = 21,0$, wie sich aus folgenden Salzen ergibt:

1. $v(NaO . NO_5) = 11,1 + 21,0 = 32,1$; $p' = 2,649$
   $p = 2,654$ (Kremers)
2. $v(SrO . NO_5) = 14,1 + 21,0 = 35,1$; $p' = 3,0050$
   $p = 3,0061$ (Hassenfratz).

Es wäre freilich auch möglich, dass

$$(LiO)_v = 7,2 = \tfrac{1}{2} . 11,7 + 1,35 = 5,85 + 1,35$$

wäre. Denn dass $(Li)_v = 5,85$ existirt, ergibt sich aus dem Lithion der andern $LiO . NO_5$-Modifikation:

$$v(LiO . NO_5) = 8,55 + 21,0 = 29,55\,; \quad p' = 2,335$$
$$p = 2,334 \quad \text{(Kremers);}$$

dieses $(LiO)_v = 8,55$ ist $5,85 + 2,7$!

In einer NaO-Modifikation ist $(Na)_v = \frac{1}{3} . v(Na) = 7,8$ und $O_v = 4,95$, welche O-Modifikation wir oben fanden im regul. octaed. $As . O_3$ und im octaed. PbO; demnach

$$(NaO)_v = 7,8 + 4,95 = 12,75.$$

Die Existenz dieser Natron-Individuen ergibt sich aus

1. $v(NaO . NO_5) = 12,75 + 26,1 = 38,85$; $p' = 2,1880$
   $p = 2,1880$ (Marx)
2. $v(NaO . C_2 O_3) = 12,75 + 16,2 = 28,95$; $p' = 2,315$
   $p = 2,315$ (Buignet).

Wenn so der Calcul mit der Erfahrung übereinstimmt, muss wohl jeder Zweifel weichen!

In den bisher kennen gelernten alkal. Oxyden KaO und NaO und LiO, mit Ausnahme des $(LiO)_v = 8,55$, nehmen wir das v des verbundenen Metalls als $\frac{1}{3}$ des freien Metalls. Ich werde nun zeigen an Oxyden, dass wie in $(LiO)_v = 8,55 = \frac{1}{2} . v(Li) + 2,7$ so auch in $(NaO)_v$ und $(KaO)_v$ das $(Na)_v$ und $(Ka)_v$ gleich $\frac{1}{2} . v(Na)$ und $\frac{1}{2} . v(Ka)$ gefunden wurden.

Entsprechend dem $(LiO)_v = \frac{1}{2}.11,7 + 2,7$ finden wir $(NaO)_v = \frac{1}{2}.23,4 + 2,7 = 14,4$ in

$v.(NaO.NO_5) = 14,4 + 26,1 = 40,5;\ p' = 2,099$

$p = 2,096$ (Klapproth, Mohs).

Ich komme nun zu einem KaO, das durch ein besonderes O_v ausgezeichnet ist, nämlich zu

$$(KaO)_v = 28,5 = \frac{1}{2}.45,0 + 6,0 = 22,5 + 6,0.$$

Diese KaO-Modifikation ergibt sich aus

1. $v(KaO.BO_3^2) = 28,5 + 2.19,35 = 67,2;\ p' = 1,741$
   $p = 1,740$ (Buignet)
2. $v(KaO.HO + 2.C_2O_3) = 28,5 + 9,0 + 2.16,2 = 69,9;$
   $p' = 1,834;\ p = 1,836$ (Buignet)
3. $v(KaO.NH_4O.C_8H_4O_{10})$, dessen $p = 1,700$ (Schiff) ist.

Auch dass $(Na)_v$ als $\frac{2}{3}\ v(Na)$ auftritt, scheint gewiss zu sein; denn

$$(NaO)_v = \tfrac{2}{3}.23,4 + 3,9 = 15,6 + 3,9 = 19,5$$

scheint wirklich zu existiren in

$v(NaO.NO_5) = 19,5 + 26,1 = 45,6;\ p' = 1,864$

$p = 1,8694$ (Muschenbroek).

In Vorstehendem habe ich gezeigt, wie man sich aus den verschiedentlichsten Angaben des spezifischen Gewichtes für ein und dieselbe Verbindung zurechtfinden kann. Die Verbindung $NaO.NO_5$, deren p folgende sind:

$p(NaO.NO_5) = 1,8694$ (Muschenbroek)
$= 2,096$ (Klapproth)
$= 2,188$ (Marx)
$= 2,654$ (Kremers)

ist sehr lehrreich. Aus ihr kann man lernen den Glauben an die mehrfachen Modifikationen ein und derselben Verbindung und dass das wahre spezifische Gewicht nicht das arithmetische aus seinen verschiedenen Angaben ist.

Ich habe nur vier verschiedene Modifikationen der $NaO.NO_5$ angeführt, ich will noch eine hinzufügen:

$v(NaO.NO_5) = 37,5;\quad p' = 2,266$

$p = 2,265$ (Buignet).

Ist hier $v = 11,4 + 26,1$? Diess stimmte mit

$$v(NaO.ClO_5) = 11,4 + 35,1 = 46,5;\ p = 2,289;$$

denn dass $(ClO_5)_v = 35,1$ existirt, ergibt sich aus

1. $v(KaO.ClO_5) = 17,7 + 35,1 = 52,8;\ p = 2,325$ (Buignet)
2. $v(BaO.ClO_5.HO) = 10,5 + 35,1 + 8,1 = 53,7;\ p = 2,988$ (Buign.)

und seine Constitution ist einfach diese

$$v(ClO_5) = 21,6 + 5.2,7 = 35,1;$$

denn

1. $v(NiCl) = 3,6 + 21,6 = 25,2;\quad p = 2,56$ (Schiff)

2. $v(Fe.Cl) = 3,6 + 21,6 = 25,2$; $p = 2,53$

3. $v(HG_2.Cl) = 2.7,2 + 21,6 = 36,0$; $p = 6,56$ (Schiff).

Nach dieser Uebereinstimmung zwischen $v(NaO.NO_5) = 37,5$ und $v(NaO.ClO_5) = 46,5$ scheint es gewiss zu sein, dass $(NaO)_v = 11,4 = 7,8 + 3,6$ existirt. Aber es scheint nur so! absolute Gewissheit ist es nicht, wie man aus Folgendem erkennen kann.

Hr. Kremers (vergl. Liebig's und Kopp's Jahresbericht für 1852 pag. 15) fand

$$p_1(BaO.NO_5, \text{ bei } 14^0 \text{ krystallis.}) = 3,240 - 3,242$$
$$p_2(BaO.NO_5, \text{ bei } 100^0 \text{ krystallis.}) = 3,222 - 3,228$$

Wir haben oben kennen gelernt $v(BaO) = 14,1$. Dieses $v(BaO)$ ist in $v(BaO.NO_5)$ vom p_1; denn

$$v_1(BaO.NO_5) = 14,1 + 26,1 = 40,2; \; p'_1 = 3,246$$

aber in

$$v_2(BaO.NO_5) = 40,5 \; (p'_2 = 3,222 = p_2)$$

kann BaO oder auch NO_5O_5 modifizirt sein. Wäre hier $(BaO)_v = 14,4$, so wäre oben auch $(NaO)_v = 11,4$; ist dagegen hier $(NO_5)_v = 26,4$, so ist oben auch $(NO_5)_v = 26,4$. Diese exakte Untersuchung des Hrn. Kremers lässt also sehr wahrscheinlich erscheinen, dass obiges $NaO.NO_5$ des Hrn. Buignet nach nochmaliger Auflösung, bei niederer Temperatur mit einem um 0,3 geringeren v krystallisiren würde.

Ueber SiO_2.

Oben haben wir kennen gelernt

$v(Si) = 5,7$

a. $v(SiO_2) = 5,7 + 2.3,9 = 13,5$; $p' = 2,222$
$p = 2,222$ (Schaffgotsch).

Diese SiO_2-Modifikation finden wir wieder im

1. Leucit $= Al_2O_3.SiO_2^3 + KaO.SiO_2$

$v = (16,5 + 3.13,5) + (17,7 + 13,5) = 88,2$; $p' = 2,479$
$p = 2,480$ (Rammelsb.).

In diesem Al_2O_3 (siehe oben!) ist also dasselbe O_v wie im SiO_2.

2. Eudnophit $= Al_2O_3.SiO_2^3 + NaO.SiO_2 + 2HO$.

$v = (16,5 + 3.13,5) + (11,1 + 13,5) + 2.7,65 = 96,9$;
$p' = 2,274$; $p = 2,27$ (Berlin).

Man kann diesen Eudnophit als ein Natron-Leucit-Hydrat auffassen.

3. Natrolith $= Al_2O_3.SiO_2^2 + NaO.SiO_2 + 2HO$; er gibt leicht sein Wasser ab ($HO_v = 8,1$).

$v = (16,5 + 2.13,5) + (11,1 + 13,5) + 2.8,1 = 84,3$;
$p' = 2,259$; $p = 2,254 - 2,258$ (Kenngott).

4. Apophyllit aus dem Radanthale am Harze $= 4.CaO^2.SiO_2^3 + KaO.SiO_2^3 + 16.HO$.

$v = 4(2.8{,}85 + 3.13{,}5) + (17{,}7 + 3.13{,}5) + 16.9{,}0 = 435{,}0$
$p' = 1{,}966$; $p = 1{,}96$ (Rammelsberg).

Man übersehe nicht, dass hier $2(CaO)_v = (KaO)_v$ ist! Hat $(KaO)_v$ vielleicht noch einmal so viel Individuen als $(CaO)_v$?

5. Bronzit $= MGO.SiO_2$.

$v = 8{,}7 + 13{,}5 = 22{,}2$; $p' = p = 2{,}252$.

Hier haben wir also das oben discutirte $v(MGO) = 8{,}7$, worin $O_v = 3{,}9$ ist, wie in $v(SiO_2) = 13{,}5$.

6. Thomsonit von Dumbarton:

$8(Al_2O_3.SiO_2) + 6(CaO.SiO_2) + NaO^2.SiO_2^3 + 20HO$.

$v = 8(12{,}6+13{,}5)+6(8{,}85+13{,}5)+(2.11{,}1+3.13{,}5)+20.7{,}65=558{,}6$
$p' = p = 2{,}383$ (Rammelsberg).

In diesem Thomsonit haben wir also die Individuen des Korunds.

7. Glas, von Pelouze kurz vor seinem Tode hergestellt (Compt. rend. 14 Janvier 1867):

102 SiO_2	= 74,97 (75,00);	v = 102.13,5 =	1377,0
23 NaO	= 17,46 (17,40)	23.11,1 =	255,3
6 Al_2O_3	= 7,57 (7,60)	6.13,8 =	82,8
		v =	1715,1

$p' = 2{,}380$; $p = 2{,}380$ (Pelouze).

8. Tayalit des Hrn. Gmelin: $FeO^5.SiO_2^2$.

$v = 5.6{,}6 + 2.13{,}5 = 60{,}0$; $p' = 4{,}133$
$p = 4{,}138$ (Gmelin).

Hier haben wir $(FeO)_v = 6{,}6$; wie z. B. auch in

$v(FeO.SO_3) = 6{,}6 + 20{,}25 = 26{,}85$; $p' = 2{,}840$
$p = 2{,}841$ (Filhol).

In diesem schwefelsauren Eisenoxydul haben wir nämlich das $v(SO_3) = 20{,}25$, was für $p(SO_3) = 1{,}970$ (Bussy) oben kennen gelernt wurde.

9. $CuO.SiO_2 + 2HO$; schönste Varietät.

$v = 6{,}6 + 13{,}5 + 2.9{,}0 = 38{,}1$; $p' = 2{,}302$
$p = 2{,}304$ (Breithaupt).

b. $v(SiO_2) = 11{,}7 = 5{,}7 + 2.3{,}0$; $p' = 2{,}5641$
$p = 2{,}5648$ (Brisson).

Diese Modifikation nennt Brisson ägyptischen Kiesel. Wir finden sie wieder in

$v(Al_2O_3^4.SiO_2^3) = 4.12{,}0 + 3.11{,}7 = 83{,}1$; $p' = 3{,}559$
$p = 3{,}559$ (Mohs),

worin wir die Individuen des purpurrothen Rubins haben.

c. $v(SiO_2) = 11{,}25$; $p' = 2{,}666$
$p = 2{,}664$ (Brisson).

Auch diese Modifikation nennt Brisson ägyptischen Kiesel. Ihre Con-

stitution lässt sich bis jetzt nicht feststellen. Die Individuen dieser Modifikation finden wir wieder im

1. Wollastonit $= CaO . SiO_2$; $v = 8,85 + 11,25 = 20,1$;
$p' = 2,889$; $p = 2,885$ (Mohs)

2. $v(FeO . SiO_2) = 6,6 + 11,25 = 17,85$; $p' = 1,709$
$p = 1,713$ (Neumann).

Hier haben wir dieselbe FeO, wie in $FeO . SO_3$!

3. Gymnit $= MGO^4 . SiO_2^3 + 6 HO$;
$v = 4 . 6,3 + 3 . 11,25 + 6 . 7,65 = 104,85$; $p' = 2,136$
$p = 2,136$.

d. $v(SiO_2 =$ Bergkrystall$) = 5,7 + 2 . 2,7 = 11,1$; $p' = 2,70$
$p = 2,70$ (Gmel.)

Die Individuen dieses Bergkrystalls finden wir neben den Individuen des Sapphirs von Muschenbroek im

1. Andalusit $= Al_2 O_3^2 . SiO_2^3$;
$v = 2 . 14,4 + 3 . 11,1 = 62,1$; $p' = 3,105$
$p = 3,104$ (Mohs)

2. $Al_2O_3 . SiO_2^2 + 2 HO$;
$v = 14,4 + 2 . 11,1 + 2 . 7,65 = 51,9$; $p' = 2,686$
$p = 2,690$ (Finkenscher).

Die Individuen des Bergkrystalls finden wir wieder im

3. Serpentin $= MGO . HO^2 + 2(MGO . SiO_2)$;
$v = (6,3 + 2 . 6,3) + 2(6,3 + 11,1) = 53,7$; $p' = 2,570$
$p = 2,57$ (Hermann)

4. Sarkolith vom Vesuv $=$
$52 . Al_2 O_3 . SiO_2 + 13 . NaO . SiO_2 + 3 KaO SiO_2 + 47 . CaO^3 SiO_2^2$;
$v = 52(16,5 + 11,1) + 13(11,1 + 11,1) + 3(17,7 + 11,1) +$
$+ 47(3 . 8,85 + 2 . 11,1) = v = 4101,45$; $p' = 2,932$; $p = 2,932$
(Rammelsberg).

Die übrigen Modifikationen der Kieselerde und ihr Auftreten in den Silikaten in der Fortsetzung.

VII.

Beiträge zur Molecularphysik.

Von

Prof. Dr. WITTWER

in Regensburg.

Bekanntlich war es die Lehre vom Lichte, welche zuerst darauf aufmerksam machte, dass es ausser den schweren Stoffen noch einen anderen, den sogenannten Aether, gebe, der sich dadurch auszeichnet, dass seine einzelnen kleinsten Theilchen sich nicht anziehen, wie das Gravitationsgesetz von den Körpern erheischt, sondern sich abstossen; denn wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, so würde es unmöglich sein, dass der Aether den ganzen Raum erfüllte und durch seine Schwingungen das Licht veranlasste. Die Erfüllung des allgemeinen Raumes wäre allenfalls noch denkbar, wenn die Aethertheilchen auf einander weder eine anziehende noch eine abstossende Wirkung ausüben würden, aber die Oscillationen, welche anzunehmen die Optik gezwungen ist, weisen mit strenger Nothwendigkeit auf eine gegenseitige Abstossung hin, welche einerseits das schwingende Aethertheilchen wieder in die Ruhelage zurückzuführen strebt, andererseits einem andern mit dem ersten nicht in unmittelbarer Berührung stehenden Theilchen Bewegung mittheilt. In unmittelbarer Berührung können aber die Aethertheilchen nicht sein, und dabei doch den ganzen Raum erfüllen, denn sonst wäre alle Bewegung unmöglich. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass die Aethertheilchen sich abstossen, und dieser Annahme folgen auch die sämmtlichen Physiker unserer Zeit.

Bezüglich der gegenseitigen Einwirkung der Aether- und der schweren Theilchen gilt zumeist als Thatsache, dass dieselbe eine Anziehung sei, während einzelne Stimmen (z. B. Wiener, die Grundzüge der Weltordnung) sich für eine Abstossung aussprechen.

Als Resultat des Zusammenwirkens von Aether- und schweren Theilchen findet man die Theorie als allgemein herrschend, dass um ein schweres Atom herum eine Atmosphäre von Aethertheilchen sich lagere,

in deren Schichten, wie bei der Atmosphäre unserer Erde, die Aethertheilchen um so dichter bei einander sind, je näher erstere dem schweren Kerne sind, während bei wachsender Entfernung von dem Kerne die Dichtigkeit der Schichten immer geringer wird, bis endlich der Unterschied zwischen der Schichte und dem allgemeinen Raume verschwindet. Am deutlichsten ausgesprochen findet sich dieser Satz in Redtenbachers „Dynamidensystem“.

Was die Bewegung der Lichtstrahlen anbelangt, so heisst es in sämmtlichen mir bekannten Lehrbüchern der Physik, die darüber sprechen, dass die Schwingungen sich in dem dichteren Aether weniger rasch fortpflanzen als in dem dünneren, dass also das Licht im allgemeinen Raume schneller gehe als in den durchsichtigen Körpern, weil in letzteren der Wirkung der schweren Atome auf die Aethertheilchen wegen diese Aethertheilchen dichter bei einander sind. Man denkt sich das Licht etwa so durch das Medium gehend, wie eine Kugel durch die Luft oder einen andern Körper wandert, wobei sie in dem dichteren Medium des grösseren Widerstandes wegen nur langsamer vorwärts kommen kann. Es lässt sich schwerlich behaupten, dass diese Vorstellung über jedes Bedenken erhaben sei, denn der Aether ist nicht das die Bewegung des Lichtes hemmende Medium, sondern er ist selbst der Träger derselben, und die Bewegung muss sich im Allgemeinen um so rascher fortpflanzen, je grösser die gegenseitige Einwirkung der Aethertheilchen ist, und dass diese wächst, wenn die Distanzen der Aethertheilchen kleiner werden, wenn also deren Dichtigkeit wächst, dürfte wohl als sicher angenommen werden. Will man das Licht rücksichtlich seiner Fortpflanzung mit einem andern Vorgange vergleichen, so eignet sich weit besser als die fliegende Kugel oder die bekannte Cavalerieabtheilung der Schall, und von diesem weiss man, dass er in den festen Körpern und in den tropfbaren Flüssigkeiten rascher geht als in den Gasen, und seine grössere Geschwindigkeit fällt also auf die dichteren Medien. Es gibt nun sicherlich Umstände genug, welche veranlassen können, dass der Schall bei nicht sehr bedeutender Dichtigkeitsverschiedenheit in dem dichteren Medium langsamer geht; allein die Vergleichung des Verhaltens der die grösste Verschiedenheit bietenden Stoffe, der festen und der tropfbarflüssigen Körper einerseits, der Gase andererseits, spricht offenbar dafür, dass der Schall in dichteren Körpern schneller geht. Bei dem Lichte, das mit dem Schalle so viel Analogie hat, kann man nun nicht wohl das Entgegengesetzte annehmen.

Offenbar ist die Lehre vom Lichte unter den physikalischen Disciplinen diejenige, welche am ehesten geeignet ist, uns über die Verhältnisse des Aethers Aufschluss zu geben, und sie sagt uns, dass der Aether in der Nähe der schweren Atome weniger dicht sei als im allgemeinen Raume.

Ausser diesen theoretischen Schlussfolgerungen kann ich mich auch auf einen mathematischen Beweis stützen, und mein Gewährsmann ist Cauchy, welcher in seinem *Mémoire sur la dispersion de la lumière* § 9 die Fortpflanzung des Lichtes untersucht, wie sie in denjenigen Medien stattfindet, welche keine Farbenzerstreuung haben, und hierbei gefunden hat (S. 193), dass in denselben die Lichtgeschwindigkeiten sich direct (also die Brechungscoëfficienten umgekehrt) verhalten, wie die Quadratwurzeln der Aetherdichtigkeit.

Ich muss gestehen, dass es mir höchst auffallend war, dass dieser Satz, der sich in einem eben so berühmten als vielfach citirten Werke findet, so ganz in Vergessenheit gerathen konnte, dass die ihm direct widersprechende Annahme, die Aetherkugeln seien in der Nähe der Körper näher bei einander als im allgemeinen Raume, so unbedingt herrschend wurde. Allerdings bezieht sich der Cauchy'sche Satz zunächst nur auf das Verhältniss von allgemeinem Raume und Gasen, unsern einzigen Medien, die keine Farbenzerstreuung haben; aber man kann doch nicht annehmen, dass bei den farbenzerstreuenden Medien bezüglich der Aetherdichtigkeit gerade das Entgegengesetzte von dem eintrete, was die Medien ohne Dispersion zeigen. Einen Rechnungsfehler, der dieses allgemeine Stillschweigen in den allgemeineren Werken rechtfertigte, habe ich in der in Rede stehenden Abhandlung nicht finden können, und Radike hat wohl dasselbe Schicksal gehabt, denn sonst würde er diesen Satz nicht zweimal (Handbuch der Optik II 466 und Abhandlung über die Optik in Doves Repertorium der Physik) in verschiedenen Bearbeitungen wiedergegeben haben.

Die Ursache der in der Nähe der schweren Atome vorkommenden Verdünnung des Aethers sind diese Atome selbst, und da jede Ursache in der Nähe ihrer Quelle stärker wirkt als in der Ferne, so müssen wir annehmen, dass zunächst um die Atome herum diese Verdünnung des Aethers den höchsten Werth erreiche, so dass also entgegengesetzt von der allgemein herrschenden Ansicht die Dynamiden eine von innen nach aussen zunehmende, nicht abnehmende Aetherdichtigkeit zeigen.

Bekanntlich gilt für die Gase die Gleichung $\frac{n^2 - 1}{\partial} = c$, wenn n den Brechungscoëfficienten, ∂ die Dichtigkeit des Gases, c eine Constante bedeutet. Bezeichnet man mit ϱ die Aetherdichtigkeit, so wird $n^2 = \frac{a}{\varrho}$, wenn a eine Constante ist, und durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorhergehenden erhält man:

$$\frac{\frac{a}{\varrho} - 1}{\partial} = c, \text{ d. i. } \varrho = \frac{a}{c\partial + 1};$$

wenn also ∂ (im allgemeinen Raume) $= 0$ wird, so wird $\varrho = a$, welch letzteres mithin die Aetherdichtigkeit im freien Raume angibt. ϱ ist die mittlere Dichtigkeit des Aethers der Dynamide, und da dieselbe abnimmt, wenn das Volumen sich vermindert, d. i. die Dichtigkeit ∂ des Gases wächst, so ergibt sich, dass die einzelnen Aetherschichten von aussen nach innen immer weniger dicht sein müssen. Das Brechungsvermögen der nichtluftförmigen Körper, also die Grösse $\frac{n^2 - 1}{\partial}$, scheint constant zu bleiben, so lange der Körper nicht in den gasförmigen Zustand übergeht (Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik und Meteorologie, 6. Aufl. I 561) und soweit diese Beständigkeit anhält, muss auch für sie bezüglich der Aetheratmosphäre die nämliche Norm gelten wie bei den Gasen.

Es möge mir gestattet sein, über die Annahme, dass bei sehr kleinen Distanzen die kleinsten Theilchen der Körper nach einem andern Gesetze als bei grössern wirken, wie z. B. nach der Formel a^r, in welcher a eine Constante, r die Entfernung bedeutet, einige Bemerkungen zu machen.

Auf solche Formeln musste man zu einer Zeit kommen, als die Lehre vom Aether noch nicht anerkannt war, denn es ist klar, dass, wenn man die Existenz des Aethers ignorirt, man durch die einfache Beobachtung der Porosität der Körper darauf geführt werden muss, dass die Newton'sche Attraction nicht ausreicht, dieselbe zu erklären. Nimmt man Dynamiden mit einem schweren von Aetherkugeln umgebenen Kerne an, so kann man, wie ich in einer andern Abhandlung*) gezeigt habe, die verschiedenen Erscheinungen der Cohäsion, als da sind Abstossung bei sehr geringer Distanz, Indifferenzpunkt, dann Anziehung, die bei wachsender Entfernung zweier Dynamiden zuerst grösser wird, dann abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst u. s. w., ganz leicht aus den Differenzen der verschiedenen Wirkungen ableiten, ohne dass man andere Gesetze zu Hülfe zu nehmen brauchte, als man jeden Tag zu beobachten Gelegenheit hat.

Bekanntlich nimmt die gegenseitige Wirkung zweier Magnete ab, wie die dritte Potenz der Entfernung wächst; sie thut dieses, solange die Entfernung gegen die Dimensionen der Magnete gross ist, und bei Nichterfüllung dieser Bedingung kommt ein ganz anderes Resultat zum Vorschein. Wollte man all den Wechsel, der hier stattfindet, der Wirkung einer einzigen Kraft zuschreiben, so müsste diese wohl nach einem ganz sonderbaren Gesetze wirken; nimmt man aber Differenzen von

*) Entwurf einer Molecularphysik. Diese Zeitschr. XI 3.

Kräften an, die stets abnehmen, wie das Quadrat der Entfernung wächst, so erklären sich die beobachteten Erscheinungen auf die einfachste Weise von der Welt. Ist es unmöglich, ist es nur unwahrscheinlich, dass es bei den Molecularerscheinungen auch so sei? Die Erfahrung lehrt, dass diejenigen Naturgesetze, welche die einfachsten sind, sich am besten bewähren, und hievon sollte man ohne die äusserste Noth nicht abgehen. Dass eine einfache Kraft in geringer Entfernung nach einem andern Gesetze wirke als in grösserer, ist meines Wissens in der Natur ohne Beispiel, denn wo scheinbar eine solche auftritt, ergibt sich bei näherer Betrachtung ein Zusammenwirken von mehreren. Ich werde daher in dem Nachstehenden von dem Satze ausgehen, dass die gegenseitige Einwirkung zweier Elementarkörper in jeder Entfernung dem nämlichen Gesetze gehorche.

Betrachten wir nun das Zusammenwirken von Aether und Massentheilchen in den Dynamiden etwas näher, und nehmen wir der allgemeinen Ansicht folgend an, jede Dynamide bestehe aus einem schweren Kerne und einer ihn umgebenden Atmosphäre, die aus einer ungezählten Menge von Aethertheilchen besteht!

Die Aethertheilchen stossen sich ab. Dieses ist notorisch. Der schwere Kern kann auf die Aethertheilchen

I. anziehend,
II. gar nicht,
III. abstossend

wirken.

I. Ist die Wirkung eine anziehende, so haben wir folgende zwei Möglichkeiten. Es kann

a) die Anziehung bezüglich der Entfernungen dem nämlichen Gesetze gehorchen, welches die Abstossung der Aethertheilchen unter einander beobachtet;

b) die Anziehung kann mit einer höheren Potenz also rascher, oder sie kann mit einer niedrigeren Potenz also langsamer abnehmen als die gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen.

a) Wenn beide Wirkungen das nämliche Gesetz befolgen, so muss sich um den Massenkern eine Anzahl von Aethertheilchen sammeln und dieses wird solange fortdauern, bis die Anziehung, welche der Massenkern auf ein fernstehendes Aetheratom ausübt, durch die Abstossung der bereits angezogenen aufgehoben wird. Es tritt hier der Fall ein, den ich in meinem Entwurfe einer Molecularphysik S. 179 Gleichung 1 und 2 abgeleitet habe. Die durch den Massenkern angesammelten Aetherkugeln sind entweder sämmtlich mit dem Kerne in unmittelbarer Berührung (oder bilden bei gehöriger Anzahl eine Art von Rinde um ihn), oder sie thun dieses nur zum Theile. Im ersten Falle, welcher eintritt, wenn die Kräfte abnehmen, wie das Quadrat der Entfernung

wächst, haben wir einen Massenkern und fest damit verbundene Aetherkugeln, und die ganze Verbindung ist auf den äussern Aether ohne Einfluss, da Anziehung der Massenkugel und Abstossung der Aetherrinde sich aufheben, und wir haben daher den oben unter II. vorgesehenen Zustand. Befolgen die beiden Wirkungen ein anderes Gesetz, so entsteht im Allgemeinen um den Massenkern herum eine Aetheratmosphäre, die durch die Anziehung des Kernes festgehalten wird und auch bleiben würde, wenn der allgemeine Raum frei von allem Aether wäre. Kommt der Aether des allgemeinen Raumes noch in's Spiel, so vermehrt sich durch den Druck desselben die Dichtigkeit des von der um den Kern stehenden Atmosphäre erfüllten Raumes noch um eine der Dichtigkeit, welche der Aether des allgemeinen Raumes hat, entsprechende Grösse und es ergibt sich also, dass der Aether, der den Massenkern umgibt, jedenfalls dichter ist als der fern stehende.

b) Wenn die Anziehung zwischen Aether und Massenkern ein anderes Gesetz befolgt, als die Aetherabstossung, so ist die eben angegebene Sättigung des Kernes nicht möglich, oder, wenn man will, die Sättigung für die eine Entfernung gilt nicht auch für die andere. Es wäre in diesem Falle gar nicht denkbar, dass der in einiger Entfernung von einem Weltkörper befindliche Aether die nämliche Dichtigkeit hätte, als der Aether, welcher fern von allen Sternen sich befindet. In diesem Falle wären die verschiedensten Brechungen des Lichtes im allgemeinen Raume selbst die unausbleibliche Folge, von dem regelmässigen (scheinbaren) Laufe der Gestirne wäre keine Rede mehr. Man könnte allenfalls, insoweit die Erde im Spiele ist, die eintretende Lichtbrechung als in der Strahlenbrechung des Luftkreises einbegriffen betrachten; aber bei Sternbedeckungen des Mondes müsste die Wirkung nothwendig eintreten. Bekanntlich beruht auf der Erscheinung der Sternbedeckungen der Beweis, dass der Mond keine Atmosphäre hat. Der Fall *b*) kommt also in der Natur nicht vor, die Anziehung zwischen Massentheil und Aether und die gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen befolgen rücksichtlich der Entfernung das nämliche Gesetz, es möge dieses sein, welches immer es wolle.

II. Wenn Aethertheilchen und Massentheilchen gar nicht auf einander wirken, so ist auch kein Grund vorhanden, warum in der Nähe der letzteren eine andere Vertheilung der ersteren eintreten sollte als ferne davon.

III. Stossen Massenkern und Aether sich ab, es mag dieses nach was immer für einem Gesetze geschehen, so sind die zwei Fälle möglich:

a) die Massenkerne ziehen sich an;

b) sie stossen sich ab.

a) Ziehen sich die Massentheilchen an, so werden unter vorstehender Bedingung die porösen Körper unmöglich, d. h. es kann nicht mehr

vorkommen, dass zwei Kerne in einiger Entfernung stehen bleiben. Befindet sich eine Aetherkugel zwischen zwei Massenkugeln, so wird jede der letzteren abstossend auf sie wirken, und man kann diese Abstossung in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine in der Verbindungslinie der beiden Massenkugeln liegt, während die andere senkrecht darauf steht. Letztere drückt die Aetherkugel weg und die Massenkugeln nähern sich einander bis zur Berührung. Es wäre denkbar, dass die Aetherkugel genau in der Verbindungslinie der Massenkugeln liegt, dass also die auf dieser senkrecht stehende Componirende der Abstossung verschwindet; allein dieses wäre nur ein dem labilen Gleichgewichte entsprechender Specialfall, der im nächsten Augenblicke bei der geringsten Bewegung (und Oscillationen hat man ja fortwährend) aufgehoben würde.

b) Stossen sich auch die Massenkerne ab, so haben wir in der ganzen Natur keine Anziehung, und das Vorkommen der Körper, die aus mehreren Theilen bestehen und deren Theile zusammenhängen, würde unmöglich.

Es bliebe nun noch übrig, die Möglichkeit zu besprechen, dass die Massenkerne auf einander abstossend, auf den Aether anziehend wirken, sowie der Fall, dass die Massenkerne keine Kugeln sind, sondern beliebige Gestalt haben.

Wenn Abstossung zwischen Massenkern und Massenkern, Anziehung zwischen Kern und Aether stattfindet, so haben wir, insoweit es sich wie hier nur um die Aetherhülle des Kernes handelt, den oben unter I. besprochenen Fall.

Weicht die Gestalt der Massenkerne von der der Kugel ab, so wird darum wohl die Gestalt der Dynamide geändert, auf die Frage aber, ob die Aetherkugeln der Hülle in der Nähe des Kernes dichter seien als ferne davon, ist dieser Umstand ohne Einfluss.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich, dass die Entstehung von Aetherhüllen der schweren Körper unmöglich sei, wenn man die Bedingungen stellt, dass diese Hüllen aus einer grossen Menge von Aethertheilchen zusammengesetzt und dabei weniger dicht sein sollen als der Aether im allgemeinen Raume. Wenn nun die Beobachtung lehrt, dass in dem die schweren Atome rings umgebenden Raume Aether von geringerer Dichtigkeit sich befindet, so muss die erste der obigen Bedingungen nicht in der Natur begründet sein. Ich kann mir nun keine andere Zusammensetzung der Dynamiden denken als die, welche der von mir in meinem Entwurfe einer Molecularphysik (S. 189) angegebenen analog ist, und die darauf beruht, dass die Zahl der sich an einen Massenkern anlagernden Aethertheilchen kleiner ist, als die Zahl der einem Aethertheilchen des freien Raumes zunächststehenden.

Cauchy hat in seinem *Mémoire sur la dispersion de la lumière* (§ 9 p. 191) auch das Gesetz angegeben, nach welchem sich die gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen regelt, er hat nämlich gefunden, dass sie abnimmt wie die vierte Potenz der Entfernung wächst. Man hätte demnach alles, was man zur Ableitung der Molecularerscheinungen braucht, und es wäre nur noch die Constantenbestimmung übrig. Denn setzt man:

1) Massentheilchen und Massentheilchen ziehen sich mit einer Kraft an, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist (Newton'sches Gesetz), und
2) die Aethertheilchen stossen sich mit einer Kraft ab, die im umgekehrten Verhältniss zum Biquadrate der Entfernung steht (Cauchy'sches Gesetz),

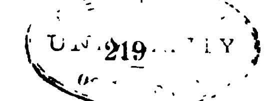
so bleibt nur die Wirkung zwischen Aether und Massentheilchen zu suchen übrig. Diese Wirkung muss eine Anziehung sein, denn sonst gäbe es nach dem oben angeführten Satze III. keine porösen Körper, nur muss die Zahl der sich um ein schweres Atom gruppirenden Aethertheilchen eine kleine sein, und ausserdem nimmt diese Beziehung ab, wie das Biquadrat der Entfernung wächst, weil nach I. *b*) die Dynamiden auf den ihnen fern stehenden Aether des allgemeinen Raumes ohne Einfluss sein müssen.

In meiner mehrerwähnten Abhandlung bin ich von dem Satze ausgegangen, dass alle einfachen Kräfte in der Natur abnehmen wie das Quadrat der Entfernung wächst, und da hiebei auch die gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen, für welche Cauchy das Biquadrat gefunden hat, eingeschlossen ist, so haben wir hier allerdings einen Widerspruch, allein es gibt doch Verhältnisse, welche darauf hinzudeuten scheinen, dass auch bei Zugrundelegung meiner Annahme den von Cauchy aufgestellten Bedingungen Genüge geleistet werden kann.

Bezeichnet man die Menge materieller Substanz eines Theilchens aus der Umgebung eines zunächst betrachteten mit m, sind α, β, γ die Winkel, welche die Verbindungslinie beider Theilchen mit den Coordinatenaxen machen, ist ferner $f(r)$ die von der Entfernung r abhängige Anziehung oder Abstossung, so ist für den Ruhezustand:

$$S\,(m \cos\alpha \; f(r)) = 0$$
$$S\,(m \cos\beta \; f(r)) = 0$$
$$S\,(m \cos\gamma \; f(r)) = 0$$

Nimmt man nun an, das eingeschlossene Theilchen werde aus der Ruhelage entfernt und bedeuten $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ die Componirenden der Verschiebung, $r(1+\varepsilon)$ die nunmehrige Entfernung zweier Theilchen, so bekommt Cauchy (S. 4 Gleichung 16) als Werthe der das Theilchen in die Gleichgewichtslage zurückführenden Kraft:



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S\left\{ m\left(\cos\alpha + \frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{f(r(1+\varepsilon))}{1+\varepsilon}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S\left\{ m\left(\cos\beta + \frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{f(r(1+\varepsilon))}{1+\varepsilon}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S\left\{ m\left(\cos\gamma + \frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{f(r(1+\varepsilon))}{1+\varepsilon}\right\}$$

wobei

$$1+\varepsilon = \left[\left(1+\frac{2}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta) + \frac{1}{r^2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Diese Gleichungen lassen sich als das Fundament betrachten, auf denen das ganze Werk Cauchy's beruht.

Als Bedingung für das Ausbleiben der Farbendispersion im Aether des allgemeinen Raumes findet nun Cauchy (S. 190 Gleichung 26), dass

$$f(r) = \frac{-H}{r^4},$$

wenn H eine Constante bedeutet und das Zeichen — eine gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen angibt.

Demzufolge wird

$$f(r(1+\varepsilon)) = \frac{-H}{r^4(1+\varepsilon)^4}.$$

Nimmt man an, es sei

$$f(r) = \frac{-H}{r^n},$$

wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, und berücksichtigt man, abweichend von Cauchy, der bei den ersten Potenzen von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ stehen bleibt, auch die höheren Potenzen dieser Grössen, so erhält man nachstehende Hauptgleichung:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -HSm\left\{\frac{\cos\alpha}{r^n} - \frac{1}{r^{n+1}}\left[(n+1)(\cos\alpha^2\,\Delta\xi + \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\eta + \cos\alpha\cos\gamma\,\Delta\zeta)\right.\right.$$

$$\left. - \Delta\xi\right] + \frac{1}{r^{n+2}}\left[-\frac{(n+1)}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)\cos\alpha + \frac{(n+1)(n+3)}{1.\,2}\right.$$

$$(\cos\alpha^3\,\Delta\xi^2 + \cos\alpha\cos\beta^2\,\Delta\eta^2 + \cos\alpha\cos\gamma^2\,\Delta\zeta^2 + 2\cos\alpha^2\cos\beta\,\Delta\xi\,\Delta\eta$$

$$+ 2\cos\alpha^2\cos\gamma\,\Delta\xi\,\Delta\zeta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\Delta\eta\,\Delta\zeta) - (n+1)(\cos\alpha\,\Delta\xi^2$$

$$\left. + \cos\beta\,\Delta\xi\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\xi\,\Delta\zeta)\right] + \frac{1}{r^{n+3}}\left[\frac{(n+1)(n+3)}{2}(\cos\alpha^2\,\Delta\xi^3\right.$$

$$+ \cos\alpha^2\,\Delta\xi\,\Delta\eta^2 + \cos\alpha^2\,\Delta\xi\,\Delta\zeta^2 + \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\xi^2\,\Delta\eta + \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\eta^3$$

$$+ \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\eta\,\Delta\zeta^2 + \cos\alpha\cos\gamma\,\Delta\xi^2\Delta\zeta + \cos\alpha\cos\gamma\,\Delta\eta^2\Delta\zeta + \cos\alpha\cos\gamma\,\Delta\zeta^3)$$

$$- \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{1.\,2.\,3}(\cos\alpha^4\,\Delta\xi^3 + \cos\alpha\cos\beta^3\,\Delta\eta^3 + \cos\alpha\cos\gamma^3\,\Delta\zeta^3$$

$$+ 3\cos\alpha^3\cos\beta\,\Delta\xi^2\,\Delta\eta + 3\cos\alpha^3\cos\gamma\,\Delta\xi^2\,\Delta\zeta + 3\cos\alpha\cos\beta^2\cos\gamma\,\Delta\eta^2\,\Delta\zeta$$

$$+ 3\cos\alpha^2\cos\beta^2\,\Delta\xi\,\Delta\eta^2 + 3\cos\alpha^2\cos\gamma^2\,\Delta\xi\,\Delta\zeta^2 + 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma^2\,\Delta\eta\,\Delta\zeta^2)$$

$$- \frac{(n+1)}{2}(\Delta\xi^3 + \Delta\xi\,\Delta\eta^2 + \Delta\xi\,\Delta\zeta^2) + \frac{(n+1)(n+3)}{1.\,2}(\cos\alpha^2\,\Delta\xi^3 +$$

$$+ \cos\beta^2 \Delta\xi\,\Delta\eta^2 + \cos\gamma^2 \Delta\xi\,\Delta\zeta^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\,\Delta\xi^2\Delta\eta + 2\cos\alpha\cos\gamma\,\Delta\xi^2\Delta\zeta$$
$$+ 2\cos\beta\cos\gamma\,\Delta\xi\,\Delta\eta\,\Delta\zeta)\Big] + \cdots\Big\}$$

Wechselt man die Ausdrücke $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ mit einander aus, so erhält man die Werthe von $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$, deren Gleichungen ich im Interesse des Raumersparnisses weglasse.

Die Vertheilung des Aethers im allgemeinen Raume, die zu wissen zur genauen Berechnung der Werthe von $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ nothwendig ist, kennen wir allerdings nicht, es bleibt aber kaum eine andere Annahme übrig, als die, dass diese Vertheilung eine regelmässige sei. Sind ausserdem die Aethertheilchen kleine Kugeln, die nach allen Richtungen in gleicher Weise thätig sind, so muss es möglich sein, durch ein solches Aethertheilchen ein rechtwinkliges Axensystem so zu legen, dass die um die eine Axe stattfindende Gruppirung des Aethers sich bei den andern wiederholt, dass die Aethertheilchen sich etwa so um das den Anfangspunkt der Coordinaten bildende herum lagern, wie die Ecke eines tesseralen Krystalles um dessen Mittelpunkt. Ist dieses richtig, und befindet sich ein Aethertheilchen auf der einen Seite einer Axe, so muss auf der entgegengesetzten Seite in der gleichen Entfernung von dem Ursprunge wieder ein Theilchen sein, und die Gruppirung um die eine Axe, sie möge sein, welche immer sie wolle, wiederholt sich bei den beiden andern. Bezeichnet man die Winkel, welche die Verbindungslinie eines Aethertheilchens und des Coordinatenanfangspunktes mit den drei Axen machen, mit a, b, c, geben also $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Lage dieses Theilchens, so muss sich auch ein Theilchen vorfinden, das auf der andern Seite der Z-Axe gelegen durch $\cos a$, $\cos b$, $-\cos c$ bestimmt wird. Weitere zwei Theilchen werden bestimmt durch $\cos a$, $-\cos b$, $\cos c$ und $\cos a$, $-\cos b$, $-\cos c$ und jenseits des Anfangspunktes sind wieder vier Theilchen, deren Lage bestimmt wird durch

$$\begin{array}{ccc} -\cos a, & \cos b, & \cos c \\ -\cos a, & \cos b, & -\cos c \\ -\cos a, & -\cos b, & \cos c \\ -\cos a, & -\cos b, & -\cos c. \end{array}$$

Bilden diese acht Theilchen je eine Gruppe auf der positiven und auf der negativen Seite der X-Axe, so müssen auch solche Gruppen um die beiden andern Axen vorhanden sein. Tauscht man daher a, b und c ordnungsgemäss aus, so erhält man:

A. für die um die Y-Axe stehenden Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \cos c, & \cos a, & \cos b \\ \cos c, & \cos a, & -\cos b \\ \cos c, & -\cos a, & \cos b \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
\cos c, & -\cos a, & -\cos b \\
-\cos c, & \cos a, & \cos b \\
-\cos c, & \cos a, & -\cos b \\
-\cos c, & -\cos a, & \cos b \\
-\cos c, & -\cos a, & -\cos b.
\end{array}$$

B. für die um die Z-Axe stehende Gruppen

$$\begin{array}{rrr}
\cos b, & \cos c, & \cos a \\
\cos b, & \cos c, & -\cos a \\
\cos b, & -\cos c, & \cos a \\
\cos b, & -\cos c, & -\cos a \\
-\cos b, & \cos c, & \cos a \\
-\cos b, & \cos c, & -\cos a \\
-\cos b, & -\cos c, & \cos a \\
-\cos b, & -\cos c, & -\cos a.
\end{array}$$

Die Glieder der ersten Verticalreihe beziehen sich insofern auf die Axe der X, als sie die Cosinusse der Winkel angeben, welche die verschiedenen Verbindungslinien der zum ganzen Systeme gehörigen Theilchen und des Anfangspunktes der Coordinaten mit der X-Axe machen. Man hat also diese verschiedenen Cosinusse in der obigen Formel an die Stelle von $\cos\alpha$ zu setzen. Ebenso repräsentiren die Glieder der zweiten und dritten Verticalreihe den $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ der Formel. Mit dem Worte System bezeichne ich die Gesammtheit der zusammengehörigen Aethertheile, etwa analog der Bezeichnung, die man bei den Linsen der Mikroskope benutzt.

Im Allgemeinen machen 24 Aethertheilchen ein System aus, doch sind auch Specialfälle vorhanden, in denen nur $\frac{24}{2}, \frac{24}{3}, \frac{24}{4}$ Theilchen vorkommen. Ist z. B. eine der vorstehenden Grössen, etwa $\cos c = 0$, so deutet der Rest auf 12 Theilchen hin, die sich in den Ebenen der XY, XZ und YZ selbst befinden, wie dieses bei den Ecken der Fall ist, welche die charakteristischen Kanten des Pentagondodecaëders abschliessen. Wird auch $\cos b = 0$, so werden noch 6 Theilchen angegeben, die in den Axen selbst liegen (Octaëderecke). Ist $\cos a = \cos b = \cos c$, so erhält man 8 Theilchen, deren Gruppirung die der Würfelecke ist. Ist $\cos c = 0$ und $\cos a = \cos b$, so erhält man die 12 Ecke der Combination von Würfel und Octaëder. Das Rhombendodecaëder besteht aus zwei Systemen, die auch schon die verschiedene Entfernung der Ecke von dem Mittelpunkte nothwendig macht. Das eine System umfasst die 8 Würfelecke, das andere die 6 Octaëderecke.

Nimmt man die vorstehende Anordnung als Grundlage, so erhält man aus der Hauptgleichung für je ein System, wenn man nach Cauchy $n = 4$ setzt, und mit p die Zahl der Glieder des Systems bezeichnet, da

16*

$$S \cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{Hm}{r^5}\left(\frac{-5p}{3}(\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2)\,\varDelta\xi - p\varDelta\xi\right)$$

$$= \frac{Hm}{r^5}\left(\frac{5}{3} - 1\right)p\varDelta\xi.$$

Wir haben also eine Kraft, deren Werth positiv ist, und die abnimmt, wie die fünfte Potenz der Entfernung wächst.

Nimmt man nach meiner Voraussetzung $n = 2$, so wird

$$S \cos\alpha = 0$$

$$S\,[(n+1)\,(\cos\alpha^2\,\varDelta\xi + \cos\alpha\cos\beta\,\varDelta\eta + \cos\alpha\cos\gamma\,\varDelta\zeta) - \varDelta\xi]$$

$$= \left[\frac{3p}{3}(\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2) - p\right]\varDelta\xi = 0.$$

Dieses Glied fällt also aus. Ebenso ist es mit dem nächstfolgenden Gliede, weil seine sämmtlichen Theile ungerade Potenzen von Cosinussen enthalten. Das zweitnächste Glied (das mit $\frac{1}{r^5}$ multiplicirt ist) verschwindet nicht, weil in ihm die Producte

$$\frac{15}{2}\cos\alpha^2\,\varDelta\xi\,(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2) - \frac{35}{2}\cos\alpha^4\,\varDelta\xi^3 - \frac{35}{2}\cdot 3\,\varDelta\xi\,(\cos\alpha^2\cos\beta^2\,\varDelta\eta^2$$

$$+ \cos\alpha^2\cos\gamma^2\,\varDelta\zeta^2) - \frac{3}{2}\varDelta\xi(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2) + \frac{15}{2}\varDelta\xi\,(\cos\alpha^2\,\varDelta\xi^2 + \cos\beta^2\,\varDelta\eta^2$$

$$+ \cos\gamma^2\,\varDelta\zeta^2)$$

vorkommen, und es wird, wenn wieder p die Zahl der zum System gehörenden Aethertheilchen bedeutet, die Wirkung des Systemes

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{Hm}{r^5}\left(\frac{15}{2}\cdot\frac{p}{3}\varDelta\xi(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2) - \frac{35}{2}\cdot\frac{p}{3}(\cos a^4 + \cos b^4 + \cos c^4)\,\varDelta\xi^3\right.$$

$$- \frac{35}{2}\cdot p\,\varDelta\xi\,(\cos a^2\cos b^2 + \cos a^2\cos c^2 + \cos b^2\cos c^2)\,(\varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2)$$

$$\left. - \frac{3}{2}p\,\varDelta\xi(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2) + \frac{15}{2}\cdot\frac{p}{3}\cdot\varDelta\xi(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2)\right) + \dots$$

$$= \frac{Hmp\varDelta\xi}{r^5}\left(-\frac{7}{2}(\varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2) + \frac{35}{6}(\cos a^4 + \cos b^4 + \cos c^4)\,\varDelta\xi^2\right.$$

$$\left. + \frac{35}{2}(\cos a^2\cos b^2 + \cos a^2\cos c^2 + \cos b^2\cos c^2)\,(\varDelta\eta^2 + \varDelta\zeta^2)\right) + \dots$$

Um das Aethertheilchen, das oben als Anfang der Coordinaten genommen wurde, und das sich irgendwo im allgemeinen Raume befinden mag, lagert nun eine unendliche Anzahl anderer, die sich alle zu Systemen von 6, 8, 12 oder 24 Gliedern vereinigen lassen. Bei jedem einzelnen dieser Systeme heben sich die ersten Glieder der Hauptgleichung auf, also auch für alle zusammen. Das mit $\frac{1}{r^5}$ versehene Glied verschwindet im Allgemeinen für jedes System nicht und wenn mehrere derselben zusammenwirken, so wird das Verschwinden immer unwahrscheinlicher. Bezüglich der Frage, ob dieses Glied einen positiven, ob

einen negativen Werth habe, ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Vertheilung des Aethers jedenfalls eine Gleichgewichtslage desselben darstellen muss, und dass bei der geringsten Verschiebung eines Theilchens nothwendig eine Thätigkeit auftritt, welche die Gleichgewichtslage wieder herzustellen sucht.

Es hat also $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ einen positiven Werth wie bei Cauchy, und die von ihm repräsentirte Kraft nimmt für jedes System ebenfalls ab wie die fünfte Potenz der Entfernung wächst. Diese Abnahme ist eine sehr rasche, und es werden daher nicht allzuviele Systeme in der Natur in's Spiel kommen, denn für die ferneren wird die Wirkung bald verschwinden.

Was für $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ gilt, findet selbstverständlich *mutatis mutandis* auch auf $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ seine Anwendung.

Geht die Verschiebung in der Richtung einer Axe vor sich, so kann nicht wohl etwas anderes eintreten als das, was man Polarisation des Lichtstrahles nennt, und es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{A \Delta \xi^3}{r^5},$$

wenn A eine Constante bedeutet.

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Cauchy'schen dadurch, dass die beschleunigende Kraft nicht der ersten, sondern der dritten Potenz der Verschiebung proportional ist. Dass auch im letzteren Falle Schwingungen um die Gleichgewichtslage stattfinden müssen, ist offenbar und ebenso haben wir auch Interferenzen und Beugungen des Lichtes, es könnte aber schon sein, dass es die eine oder andere Lichterscheinung gibt, die mir bis jetzt entgangen ist, und die sich mit der vorstehenden Annahme nicht verträgt.

Nach dem, was ich in meinem Entwurfe einer Molecularphysik (S. 196) über die Construction der Gase gesagt habe, ist es leicht, sich die Erscheinung zu erklären, warum die Gase die Eigenschaft des freien Aethers, die Farben nicht zu zerstreuen, theilen, denn die Vertheilung der einzelnen Aetherkugeln in den Gasen kann sich von der des Aethers im allgemeinen Raume nicht wesentlich unterscheiden, solange jedes Massenatom eine grosse Aetherhülle besitzt, solange die Dichtigkeit der Luft nicht bedeutend ist. Es hat dieses jedoch seine Gränzen, und bei dichten Gasarten wird auch eine Farbendispersion eintreten müssen. Bei den tropfbar-flüssigen und den festen Körpern ist die Vertheilung der Aetherkugeln um den Massenkern eine andere, es verschwinden die ersten Glieder der Hauptgleichung nicht mehr, und die Farbenzerstreuung tritt ein. Bei den farbenzerstreuenden Körpern wächst

die in die Gleichgewichtslage zurückführende Kraft nicht wie die dritte, sondern wie die erste Potenz der Verschiebung.

Auf die Bestimmung des Aethergesetzes lässt Cauchy eine Untersuchung über die Dichtigkeit des Aethers im Raume und eine Vergleichung der mittleren Aetherdichtigkeit und der Dichtigkeit der schweren Atome auf der Erde folgen. Er findet (S. 192 Gleichung 35) die Zahl ϱ der in einem Kubikmeter enthaltenen Aetherkugeln

$$\varrho = 22968\,(10)^{12}\,\frac{1}{H},$$

wenn H die in Metern ausgedrückte Endgeschwindigkeit angibt, welche ein 1 Meter von einem andern entferntes Aethertheilchen unter dem Einflusse desselben in einer Secunde bekommt. Das Verhältniss der Aetherdichtigkeit ϱ zur Dichtigkeit D der schweren Atome findet Cauchy in Gleichung 40

$$\frac{\varrho}{D} = 62448\,(10)^{13}\,\frac{G}{H},$$

wenn G die Anziehungsconstante zweier schweren Theilchen, die in 1 Meter Entfernung sind, vorstellt.

Was das erste dieser beiden Resultate anbelangt, so müssen wir uns in Ermangelung aller weiteren Anhaltspunkte mit demselben zufrieden stellen, doch glaube ich, dass es nicht unzukömmlich wäre, wenn H nicht einen sehr geringen, sondern einen etwas beträchtlichen Werth hätte, damit der Aetherkugeln nicht allzuviele werden.

Bezüglich der zweiten Gleichung ist es unbedingt nothwendig, dass der Bruch $\frac{\varrho}{D}$ keinen gar grossen Werth hat, denn nach dem, was ich oben über die Aetherdichtigkeit der Dynamidenhüllen angeführt habe, muss die Zahl der ein schweres Atom umgebenden Aethertheilchen eine beschränkte sein, und aus diesem Grunde darf der Bruch $\frac{\varrho}{D}$ keinen grossen Werth bekommen. Folgt man dem Satze, dass die Aethertheilchen sich der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional abstossen, so muss H im Verhältniss zu G sehr gross gesetzt werden. Bei der Annahme, dass die Aethertheilchen sich mit einer Kraft abstossen, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, ist der erwähnte Satz an und für sich Grundbedingung (mein Entwurf u. s. w. S. 179 und 180). Die Schwere muss gegen die Molecularwirkung ausserordentlich klein sein.

Nimmt man an, es stossen sich die Aethertheilchen der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ab, so wird sich um ein im allgemeinen Raume befindliches Massentheilchen eine Aetherhülle bilden, die sich nach der Abstossung von Aether und Aether und der

Anziehung zwischen Aether und schweren Theilchen regelt. Folgt die Anziehung, was man nach dem oben sub I. *b*) Gesagten voraussetzen darf, dem nämlichen Gesetze wie die Aetherabstossung, so wird eine auf solche Weise construirte Dynamide auf ein fernstehendes Aethertheilchen ohne Einwirkung sein, und setzt man voraus, dass die Zahl der Aetherkugeln einer Dynamide eine beschränkte sei, so ist nicht einzusehen, warum sich nicht unter diesen Verhältnissen gerade so gut poröse Körper und Krystalle bilden sollten, als nach meinen früheren Annahmen. Es bleibt noch übrig, für das Zusammenwirken der Massentheilchen eine zweckmässige Norm zu Grunde zu legen, und welche diese sei, darüber lässt das Newton'sche Schweregesetz keinen Zweifel walten. Diese Annahme hat vor der in meinem „Entwurfe u. s. w." vorgetragenen Theorie den grossen Vorzug, dass die Körper zu ihrer Bildung nicht in demselben Maasse den äussern Aetherdruck nothwendig haben, und gerade dieser dürfte wohl manchem Mathematiker mehr als anstössig sein. Andererseits hat die Theorie den nicht unbedeutenden Nachtheil, dass man das Schweregesetz nicht recht rein herausbringt. Nach der Entwicklung, die ich in meinem „Entwurfe u. s. w." (S. 179 Gleichung 1—4) gegeben habe, bekäme man, wenn man sich der dort benützten Bezeichnung bedient, als gegenseitige Einwirkung zweier Körper

$$W = \left(-\frac{c}{r^2} - \frac{a^2}{b r^4}\right) m m_1 ,$$

also zwei Anziehungen, von denen die eine dem Quadrate, die andere dem Biquadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Ich habe nie etwas davon gehört, dass bei irgend einer Erscheinung in der Sternenwelt neben der Schwere eine Spur von einer Anziehung beobachtet worden wäre, der man die letztere Wirkung zuschreiben könnte. Bei der Ebbe und Fluth hat man eine Kraft, die im umgekehrten Verhältnisse zum Kubus der Entfernung steht, alsbald gefunden. Sollte es wohl möglich sein, dass die andere so lange verborgen bleiben konnte? Allerdings nimmt dieselbe noch etwas schneller ab, aber es ist dabei nicht zu übersehen, dass $\frac{a^2}{b}$ ohne Vergleich grösser sein muss als c.

Geht man von dem Satze aus, dass die Aetherabstossung dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sei, so ist die weitere Annahme, dass auch die sogenannten schweren Theile sich gegenseitig nach dem nämlichen Gesetze abstossen, unbedingt nothwendig, denn die Grösse $\left(c - \frac{a^2}{b}\right)$ muss gegen $\frac{a^2}{b}$ ausserordentlich klein sein, und da sie dem Schweregesetze gemäss (nach meiner bisherigen Bezeichnung) negativ sein muss, so ist c positiv und um ein Minimum kleiner

als $\frac{a^2}{b}$. Bei der relativen Grösse der Molecularanziehungen und Abstossungen ist es sehr leicht denkbar, dass bei durch die Zusammensetzung bedingten Differenzen in den Wirkungen bald (für uns) bedeutende Härtegrade u. dgl. der Körper eintreten können. Eine andere Frage ist die, ob unter meinen Voraussetzungen die Weltkörper auf ihrem Wege nicht allzusehr gehemmt werden. In dieser Beziehung verlasse ich mich darauf, dass man sich schon seit langer Zeit mit dem Gedanken befreundet hat, dass die Weltkörper ihren Weg machen können, ohne sonderlich gehemmt zu werden, obwohl sie durch einen Raum müssen, von dem nach Cauchy jedes Kubikmillimeter von Millionen von Aethertheilchen besetzt ist. Ein Vorzug meiner Theorie dürfte wohl darin zu suchen sein, dass sie, ohne mit dem Schweregesetze in die mindeste Collision zu kommen, keine anderen Wirkungen voraussetzt, als man jeden Tag allenthalben zu beobachten Gelegenheit hat. Dass auch in der Sternenwelt polare Wirkungen auftreten, ist nicht neu; schon Bessel hat bei der Beschreibung des Halley'schen Kometen von 1836 darauf aufmerksam gemacht.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten übrig, ob es nicht möglich wäre, dass ein System von Aethertheilchen ein von diesen eingeschlossenes ebenfalls mit einer Kraft in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebe, welche abnimmt wie die fünfte Potenz der Entfernung wächst, wenn die ursprüngliche Abstossung zweier Theilchen der ersten oder dritten Potenz umgekehrt proportional ist.

Im ersten dieser beiden Fälle müssten sich die ersten vier Glieder der Hauptgleichung auf Null reduciren, das fünfte dagegen bleiben; im zweiten Falle müssten die ersten zwei Glieder verschwinden, das dritte dagegen nicht. Man sieht sehr leicht, dass beides nicht geschieht, denn wenn man $n = 1$ beziehungsweise $n = 3$ setzt, so verschwindet das zweite Glied nicht, wohl aber in beiden Fällen das mit $\frac{1}{r^5}$ multiplicirte, weil seine sämmtlichen Theile ungerade Potenzen von Cosinussen als Factoren haben.

Nimmt man an, dass die Aetherabstossung einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sei als der vierten, so kann augenscheinlich die das Aethertheilchen in die Gleichgewichtslage zurückführende Kraft nicht der fünften Potenz umgekehrt proportional sein, wie es die Cauchy'sche Gleichung verlangt, und ebenso ist es bei der Annahme irgend eines andern Gesetzes. Wir haben daher nur die Wahl zwischen der zweiten und der vierten Potenz. Welche von den beiden Annahmen die richtige sei, wird die Zukunft lehren.

VIII.

Ueber Isophoten
(Linien gleicher Lichtintensität).

Von

Dr. L. Burmester,

Lehrer der Physik und der darstellenden Geometrie am deutschen Realgymnasium
zu Lodz in Russisch-Polen.

Erster Theil.

§ 1.

Die Linien gleicher Lichtintensität, welche ich der Kürze wegen mit dem Namen Isophoten*) bezeichne, sind bis jetzt noch sehr wenig analytisch untersucht worden. Ich habe daher diese Linien zum Gegenstande meiner gegenwärtigen Untersuchung gemacht. Hierbei habe ich viele interessante Resultate erhalten, welche ich in einem besonderen Werke zu veröffentlichen gedenke. Da aber das Zeichnen vieler Tafeln viel Zeit und Musse erfordert, so werde ich hier vorläufig einige Resultate meiner Studien mittheilen.

Nehmen wir an, eine Fläche sei von parallelen Lichtstrahlen beleuchtet, deren Intensität i constant, also unabhängig von der Länge der Lichtstrahlen ist, und bezeichnen wir mit L die Beleuchtung oder Lichtstärke eines Flächenelementes, mit λ den Winkel, welchen die Normale dieses Elementes mit den parallelen Lichtstrahlen bildet, so ist bekanntlich

$$L = i \cos \lambda.$$

Die Gesammtheit aller parallelen Lichtstrahlen, welche eine Fläche beleuchten, nennen wir ein Strahlenbündel; und als Richtung desselben nehmen wir die Gerade, welche den Lichtstrahlen parallel durch den Coordinatenanfang der beleuchteten Fläche geht.

Sind ν_x, ν_y, ν_z die Winkel, welche die Strahlenrichtung mit den rechtwinkeligen Coordinatenaxen der x, y, z bildet, sind analog

---

*) L. Burmester, Elemente einer Theorie der Isophoten. (Diss.) Gött. 1865.

σ_x, σ_y, σ_z die Winkel, welche die Normale eines Flächenelementes mit diesen Axen einschliesst, so ist nach einem Satze der analytischen Geometrie

$$\cos\lambda = \cos\nu_x \cos\sigma_x + \cos\nu_y \cos\sigma_y + \cos\nu_z \cos\sigma_z.$$

Ist die beleuchtete Fläche durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, dann haben wir

$$\cos\sigma_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Hiernach ist die Lichtstärke irgend eines Flächenelementes dieser Fläche durch die Gleichung

$$L = i \cdot \frac{\cos\nu_x \frac{\partial F}{\partial x} + \cos\nu_y \frac{\partial F}{\partial y} + \cos\nu_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

bestimmt. Diese Gleichung, welche eine Fläche repräsentirt, ist die Grundformel der Isophoten, die durch ein Bündel paralleler Lichtstrahlen erzeugt werden. Geben wir dem L successive verschiedene Werthe, welche die Grenzen $+i$ und $-i$ nicht überschreiten dürfen; dann sind die Durchschnitte der beiden Flächen

$$\left.\begin{array}{l} L = i \cdot \dfrac{\cos\nu_x \frac{\partial F}{\partial x} + \cos\nu_y \frac{\partial F}{\partial y} + \cos\nu_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \\ F(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$$

die Isophoten der letzteren Fläche. — Je nachdem wir aus diesen beiden Gleichungen x, y oder z eliminiren, erhalten wir die Gleichungen für die Projectionen der Isophoten in den Coordinateneben yz, xz oder xy. Da es für unseren Zweck nur erforderlich ist, die Lichtstärke relativ zu bestimmen, so nehmen wir die Intensität i des Strahlenbündels gleich der Einheit an; dann ist

$$L = \frac{\cos v_x \frac{\partial F}{\partial x} + \cos v_y \frac{\partial F}{\partial y} + \cos v_z \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Um nun ein vollständiges regelmässiges Isophotensystem einer Fläche zu erhalten, mittelst dessen die Auftragung der Farbentöne leicht ausgeführt werden kann, bestimmen wir eine beliebige, aber ausreichende Anzahl Isophoten, so dass der Lichtstärkenunterschied je zwei auf einander folgender Isophoten gleich ist.

Wir geben daher dem L der Reihe nach die Werthe

$$L = +1,\; +\frac{n-1}{n},\; +\frac{n-2}{n},\; \ldots +\frac{2}{n},\; +\frac{1}{n},\; 0,\; -\frac{1}{n},\; -\frac{2}{n} \ldots\ldots -\frac{n-1}{n},\; -1\;^{*)}.$$

Diese Werthenreihe, in welcher n eine ganze positive Zahl bezeichnet, liefert uns ein regelmässiges, aus $2n+1$ Isophoten bestehendes Isophotensystem.

Bezeichnen wir mit α und β beziehungsweise die Tangenten der Winkel, welche die Projection der Strahlenrichtung in der zx- und xy-Ebene mit der z-Axe bildet, ist ferner die Gleichung der beleuchteten Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben, so ergiebt sich aus der Gleichung II.

$$L = \frac{1 - \alpha \frac{\partial z}{\partial x} - \beta \frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad . \; . \; . \quad \text{III.}$$

Diese Gleichung, die nur noch die Coordinaten x, y in sich trägt, liefert uns die Projectionen der Isophoten in der xy-Ebene, d. h. im Grundriss. — Können wir die Projectionen der Isophoten im Grundriss ermitteln, und ist die beleuchtete Fläche construirbar, so können wir mittelst der darstellenden Geometrie die Isophotenprojectionen im Aufriss und Seitenriss stets construiren.

Die Gleichung III. können wir noch vereinfachen, wenn wir das Coordinatensystem um die z-Axe drehen, so dass die positive x-Axe mit der Grundrissprojection der positiven Strahlenrichtung zusammenfällt. Hierdurch wird die Allgemeinheit nicht beschränkt. Bezeichnen wir mit v den Winkel, welchen die positive Strahlenrichtung mit der positiven z-Axe bildet, so wird

---

*) In der Praxis genügt im Allgemeinen $n = 10$ für die Auftragung der Farbentöne.

$$\alpha = -\tan v$$
$$\beta = 0,$$

und folglich

$$L = \frac{\cos v + \sin v \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad \ldots \ldots \quad \text{IV.}$$

Von allen Isophoten des ganzen Systems zeichnen sich die, welche der Lichtstärke

$$L = 0, \quad \cos v, \quad \pm 1$$

entsprechen, besonders aus.

Für $L = 0$ erhalten wir aus IV.

$$1 + \tan v \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung giebt uns die Grundrissprojection der Isophoten, welche die Grenze zwischen Licht und Schatten bildet. Wir wollen sie deshalb mit dem Namen Grenzisophoten bezeichnen.

Setzen wir $L = \cos v$, so ergiebt sich aus der genannten Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 [1 - \tan^2 v] + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \tan v \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung liefert die Grundrissprojection der Isophote der Lichtstärke, welche auf der xy-Ebene auftritt.

Specielle Betrachtungen zeigen, dass wir im Allgemeinen nach der Gestalt dieser Isophote oft die Form des ganzen Isophotensystems beurtheilen können. — Wir wollen diese Isophote desswegen die Typusisophote nennen.

Die Lichtstärke $L = \pm 1$ kann nach der Gleichung IV. wie man leicht erkennt nur eintreten, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \tan v \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ist. — Die Isophote, welche durch diese Doppelgleichung bestimmt ist, wird im Allgemeinen durch einen oder mehrere isolirte Punkte repräsentirt, in denen die grösste positive oder negative Lichtstärke auftritt. — Wir wollen dieselbe daher mit dem Namen Maximalisophote bezeichnen.

Es wird für die Folge von Nutzen sein, wenn wir in die Gleichung IV. statt der rechtwinkeligen Coordinaten die sogenannten cylindrischen Coordinaten einführen, welche durch die Gleichungen

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

definirt sind. — Dann ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die Gleichung IV., so erhalten wir

$$L = \frac{\cos v + \sin v\left[\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right]}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right]^2}} \quad .\ .\ .\ .\ \text{V.}$$

Diese Gleichung liefert die Grundrissprojectionen der Isophoten einer Fläche, deren Gleichung in cylindrischen Coordinaten und in der Form

$$z = f(r, \theta)$$

gegeben ist.

Obgleich die Formel V. weniger einfach ist als die Formel IV., so wird sie uns doch in der Folge wichtige Vortheile bieten. Wir können der Formel V. noch eine andere Gestalt geben, wenn wir

$$\frac{\partial z}{\partial r} = p\cos\omega$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = p\sin\omega$$

setzen, worin

$$p^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\tan\omega = \frac{\frac{\partial z}{\partial \theta}}{r\frac{\partial z}{\partial r}} = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$$

ist. Wir erhalten dann

$$L = \frac{\cos v + \sin v \,.\, p \,.\, \cos(\theta + \omega)}{\sqrt{1 + p^2}} \quad .\ .\ .\ .\ .\ \text{VI.}$$

Geometrisch bedeutet p die Tangente des Winkels, welchen die Flächennormale des Punktes z, r, θ mit der z-Axe einschliesst, ω den Winkel, welchen der Radiusvector r mit der Normale der Durchschnittscurve

$$\left.\begin{array}{l} z = f(r, \theta) \\ z = const. \end{array}\right\}$$

bildet.

Die Isophoten der Rotationsflächen.

§ 2.

Die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, welche durch Umdrehung einer einfach- oder doppelt gekrümmten Curve um die z-Axe erzeugt werden, ist in cylindrischen Coordinaten

$$z = f(r).^{*)}$$

Betrachten wir z als Ordinate und r als willkürliche Abscisse, so giebt diese Gleichung die Meridiancurve der Rotationsflächen.

Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f'(r)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

Diese Werthe, in die Gleichung V. gesetzt, liefern

$$L = \frac{\cos v + \sin v \, . \, f'(r) \, . \cos \theta}{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der Isophoten**) der Rotationsflächen. Hierin ist r der Radiusvector, θ die Anomalie, welche von der positiven Strahlenrichtung aus gezählt wird. Die Gleichung 1) giebt für gleiche entgegengesetzte Werthe von θ gleiche Werthe für r, das ganze Isophotensystem wird daher durch die Strahlenrichtung symmetrisch getheilt.

Wenn wir die Gleichung 1) auf $\cos \theta$ reduciren, so wird

$$\cos \theta = \csc v \frac{\sqrt{1 + [f'(r)]^2}}{f'(r)} \, . \, L - \frac{\cot v}{f'(r)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Hieraus folgt der Satz:

Auf den Parallelkreisen der Rotationsflächen ist die Grösse $\cos \theta$ eine lineare Function der Lichtstärke L.

Bezeichnen wir mit τ den Winkel, welchen die Tangente der Meridiancurve ($z = f(r)$) mit der Axe der r bildet, so ist

$$f'(r) = \tan \tau,$$

und

$$\cos \theta = \csc v \, . \csc \tau \, . \, L - \cot v \, . \cot \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Betrachten wir die Grössen $\cos \theta$ und L als rechtwinkelige Coordinaten, so repräsentirt diese Gleichung eine Gerade, deren Abschnitte von den entsprechenden Axen durch die Grössen $- \cot v \, . \cot \tau$ und

---

*) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Gleichung auf z reducirt werden kann.

**) Wir wollen, wenn nichts besonders bemerkt wird, unter Isophoten der Kürze wegen die Projectionen derselben im Grundriss verstehen, ebenso unter Strahlenrichtung die Projection derselben im Grundriss.

$\cos\nu \cos\tau$ gegeben sind. Beide Abschnitte lassen sich leicht construiren. Wenn wir nun dem L die Lichtstärken der Werthenreihe Seite 231 geben, so erhalten wir entsprechende Werthe für $\cos\theta$, welche diejenigen Punkte auf einem beliebig angenommenen Parallelkreis vom Radius r bestimmen, in denen jene dem L beigelegte Lichtstärken auftreten. Bestimmen wir nach dieser Angabe auf mehreren beliebig, aber zweckmässig angenommenen Parallelkreisen die Lichtstärken der erwähnten Werthenreihe, dann liefern uns die so erhaltenen Punkte die Isophoten der Fläche.

Zu jedem Parallelkreis gehört ein bestimmter Werth von τ und daher entspricht jedem Parallelkreis eine Gerade, mit deren Hülfe wir die Orte gegebener Lichtintensitäten bestimmen können. Wir wollen diese Geraden, deren Lage durch die leicht zu construirenden Werthe $\cot\nu \cot\tau$ und $\cos\nu \cos\tau$ bestimmt ist, die Hülfsgeraden nennen.

Die Construction der Isophoten der Rotationsflächen ist hiernach auf das Problem des Tangentenziehens an die Meridiancurve ($z = f(r)$) zurückgeführt.

Obgleich die Hülfsgeraden durch die Werthe $-\cot\nu \cot\tau$ und $\cos\nu \cos\tau$, welche die Abschnitte auf den Axen des $\cos\theta$ und der L darstellen, gegeben sind, so wollen wir noch eine andere Methode angeben, die den Vortheil bietet, dass wir nicht mit Bestimmungswerthen, wie $\cot\nu \cot\tau$, zu thun haben, die sehr gross werden und die Darstellung auf der begrenzten Zeichnenfläche nicht gestatten. Zu diesem Zweck suchen wir die einhüllende Curve der Hülfsgeraden.

Wir setzen

$$\cos\theta = \eta, \quad L = \xi,$$

so ist nach Gleichung 3)

$$\eta = \csc\nu \csc\tau \,.\, \xi - \cot\nu \cot\tau.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach τ, dann erhalten wir

$$0 = -\csc\nu \,.\, \cos\tau \,.\, \xi + \cot\nu.$$

Durch Elimination der Grösse τ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen die Gleichung der einhüllenden Curve der Hülfsgeraden

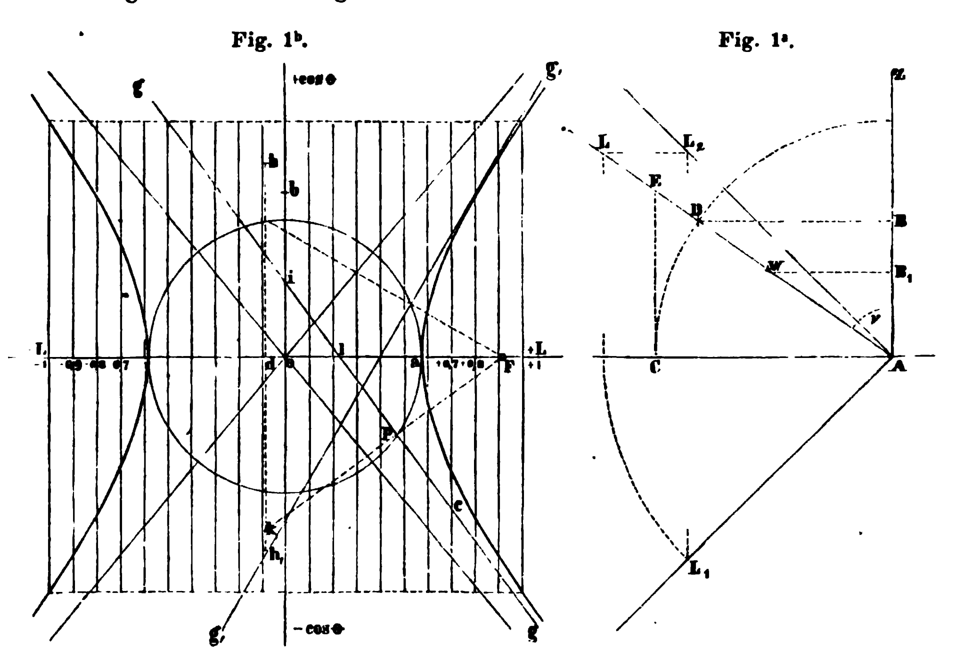
$$\frac{\xi^2}{\cos^2\nu} - \frac{\eta^2}{\cot^2\nu} = 1.$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel, deren halbe Hauptaxe $\cos\nu$ und deren halbe Nebenaxe $\cot\nu$ ist. Diese Hyperbel, an der die Hülfsgeraden Tangenten sind, wollen wir, da sie indirect ein Hülfsmittel bei der Bestimmung dieser Geraden ist, die Hülfshyperbel nennen.

Bekanntlich liegen die Fusspunkte der vom Brennpunkt auf die Hyperbeltangenten gefällten Senkrechten auf der Peripherie des Hauptkreises. Wir können hiernach die Hyperbeltangenten, d. h. die Hülfs-

geraden, leicht ziehen, ohne die Hyperbel selbst zu construiren; denn da die Richtungsconstante der Hülfsgeraden nach Gleichung 3) $csc\, \nu \,.\, csc\, \tau$ ist, so ist die Richtungsconstante der darauf vom Brennpunkte gefällten Senkrechten durch $sin\, \nu\;\; sin\, \tau$ gegeben.

Wenn wir die Construction der Isophoten der Rotationsflächen ausführen wollen, so haben wir zwei einfache Hülfsfiguren Fig. 1[a] und Fig. 1[b] nöthig, die für alle Rotationsflächen gelten, wenn die Strahlenrichtung unveränderlich genommen wird.



Es seien (Fig. 1[a]) $L_1 A$ und $L_2 A$ die Projectionen der Strahlenrichtung im Grundriss und im Aufriss, AD gleich der Einheit, und AZ senkrecht auf der Projectionsaxe AC; dann ist, wie man leicht aus der Figur ersieht,

$$\sphericalangle DAZ = \nu, \qquad BD = sin\, \nu$$
$$AB = cos\, \nu, \qquad CE = cot\, \nu.$$

In Fig. 1[b] seien oL und $\overline{o\, cos\, \theta}$ die Coordinatenaxen, auf welche die Constructionsgeraden bezogen sind. Die Strecken $\overline{o(+L)} = \overline{o(-L)} = 1$ sind in $n = 10$ gleiche Theile getheilt, und durch diese Theilpunkte, welche in unserem speciellen Falle den Lichtstärken: $+1$, $+0{,}9$ ... 0 ... $-0{,}9$, -1 entsprechen, sind Ordinaten gezogen. Auf den Axen sei $oa = AB = cos\, \nu$, $ob = CE = cot\, \nu$ gemacht; a und b sind dann die Endpunkte der Hyperbelaxen, und der mit oa beschriebene Kreis ist der Hauptkreis. Ferner sei $\overline{ab} - oF$, $Fd = 1$, so ist F der eine

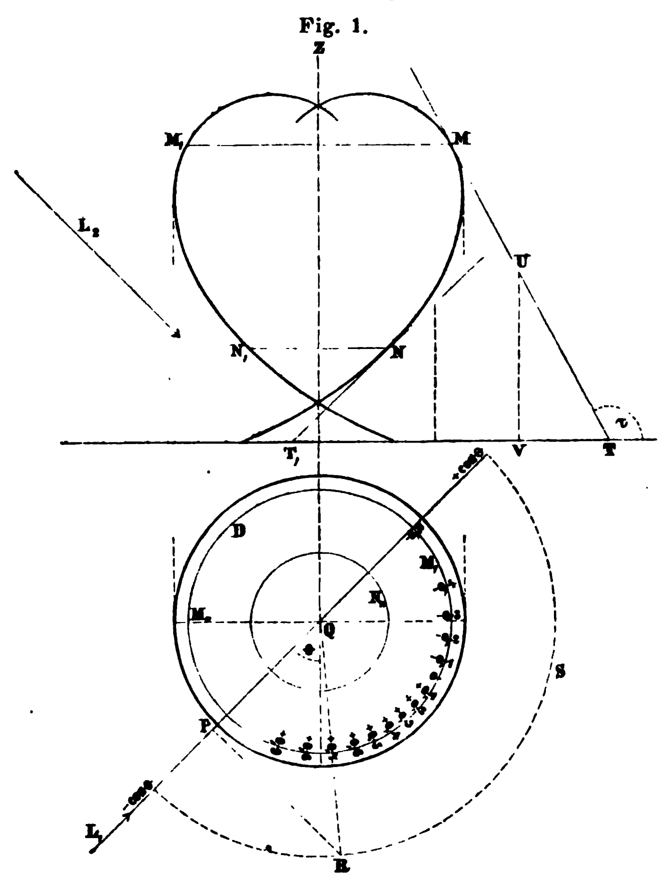
Brennpunkt der Hülfshyperbel und dh die Gerade, auf welche die Werthe $\sin \nu \sin \tau$ abgetragen werden. Hiermit ist Alles, was wir zur Construction der Isophoten der Rotationsflächen nöthig haben, vorbereitet.

Wenn wir die Strahlenrichtung so wählen, wie sie gewöhnlich bei technischen Zeichnungen angenommen wird, dann wird die Hülfsfigur 1^b, da L, $\cos \theta$ und $\sin \nu \,.\, \sin \tau$ nie grösser als 1 werden, nur die Grösse eines Quadrats haben, dessen Seite gleich 2 ist, und die Hülfsfigur 1^a einen noch kleineren Flächenraum einnehmen. Es werden daher alle Grössen, die wir zur Construction gebrauchen, nie die Grenzen der Zeichnenfläche überschreiten.

Nach dieser Vorbereitung sind die Isophoten der Rotationsflächen sehr leicht zu construiren. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen.

Es sei in Fig. 1 durch Grund- und Aufriss eine Rotationsfläche dargestellt, welche durch Umdrehung einer ebenen Curve MN erzeugt

Fig. 1.



wird. Diese Curve ist zugleich die Meridiancurve. Es sei TM eine Tangente im Punkte M an derselben, T' der Durchschnitt mit der Pro-

jectionsaxe und $TU = \sin v = BD$ (Fig. 1[a]); dann ist $UV = \sin v \sin \tau$. Diesen Werth tragen wir auf dh_1 (Fig. 1[b]) ab, so dass $dk_1 = UV = \sin v \sin \tau$ ist. Hierauf ziehen wir k_1F und durch den Schnittpunkt p mit dem Hauptkreis die Hülfsgerade GG senkrecht auf kF. Die Abschnitte, welche durch diese Gerade auf den Ordinaten $(-1, -0{,}9, -0{,}8, \ldots 0 \ldots +0{,}8, +0{,}9, +1)$ entstehen, geben uns die Werthe der $\cos \theta$. Wir beschreiben (Fig. 1) um Q einen Kreis S mit dem Radius 1; tragen auf die Projection L_1Q der Strahlenrichtung die Werthe der $\cos \theta$, welche wir aus der Fig. 1[b] entnehmen, ab. So erhalten wir die Winkel θ, die auf dem Parallelkreis $M_{,,}$ die Punkte bestimmen, in denen die angenommenen Lichtstärken auftreten. In der Fig. 1 ist $QP = +0{,}7\,\overline{c}$ (Fig. 1[b]), PR senkrecht auf L_1Q, dann giebt der Durchschnitt der Geraden QR mit dem Parallelkreis $M_{,,}$ den Punkt, in welchem auf diesem Kreis die Lichtstärke $+0{,}7$ auftritt. Ebenso findet man die Punkte für die anderen Lichtintensitäten. In gleicher Weise kann man die Orte der gegebenen Lichtstärken auf einem anderen Parallelkreis $N_{,,}$ finden. Diesem entspricht in Fig. 1[b] die Hülfsgerade $G_,G_,$. Wenn wir so auf mehreren Parallelkreisen diese Orte bestimmen, dann erhalten wir die Projectionen der Isophoten im Grundriss. Um die Projectionen im Aufriss zu erhalten, brauchen wir die gefundenen Punkte nur hinauf zu projiciren. Eine Controle für die richtige Lage der Hülfsgeraden liefern uns die Abschnitte derselben auf den Axen; denn es muss (Fig. 1[b]) $oi = \cot v \cot \tau$ und $ol = \cos v \cos \tau$ sein, und diese Werthe lassen sich auch leicht construiren.

Die Maximalisophote $(L = \pm 1)$ wird im Allgemeinen durch einen oder mehrere isolirte Punkte repräsentirt; diese kann unsere bisherige Constructionsweise nur dann liefern, wenn zufällig diese Punkte auf einigen von den beliebig angenommenen Parallelkreisen liegen. Wir müssen daher diese isolirten Punkte noch besonders zu bestimmen suchen. Aus der Gleichung 1) folgt für $L = \pm 1$

$$\cos \theta = 1, \quad \tan \tau = \tan v.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass die Projectionen dieser Punkte auf der Projection der Strahlenrichtung liegen, und aus der zweiten ergeben sich die Abstände dieser Punkte vom Pol. Um diese constructiv zu bestimmen, müssen wir an die Meridiancurve Tangenten ziehen, welche mit der Axe der r den Winkel v bilden. — Die Abstände der so erhaltenen Berührungspunkte von der Axe der z sind dann die Abstände der Grundrissprojectionen der isolirten Punkte von dem Pol.

In besonderen Fällen können wir die Hülfsgeraden noch auf einem anderen als auf dem oben angegebenen Wege bestimmen. Nehmen wir an, es sei die Grundrissprojection einer Isophote gegeben, deren Lichtstärke m ist; dann können wir umgekehrt durch die Punkte, wo diese Curve die beliebig zweckmässig angenommenen Parallelkreise schneidet,

die entsprechenden Werthe von $\cos\theta$ ermitteln. Diese Werthe tragen wir auf die den Theilpunkt m gebende Ordinate ab, und durch die erhaltenen Punkte legen wir Tangenten an die Hülfshyperbel*) (Fig. 1[b]), welche dann die Hülfsgeraden sind. Hierauf verfahren wir wieder wie oben gezeigt worden ist und bestimmen die übrigen Isophoten. Damit wir auf diese Weise unseren Zweck vollständig erreichen, wird erfordert, dass die Projection der gegebenen Isophote die Projection aller nöthigen Parallelkreise schneide. Ist dies nicht der Fall, so muss noch die Projection einer zweiten Isophote gegeben sein, die wenigstens durch diejenigen Kreise geht, welche von der erstgegebenen nicht getroffen werden. Zwei solche Isophoten, die diese Forderung in manchen Fällen erfüllen und sich oft durch die Eigenschaften ihrer Gleichungen direct construiren lassen, sind die Grenzisophote und Typusisophote. Aus der Gleichung 1) folgt für $L=0$ die Gleichung der Grenzisophote

$$1+\tan v \,.\, f'(r) \,.\, \cos\theta = 0 \,. \quad \ldots \quad 3)$$

und für $L=\cos v$ die Gleichung der Typusisophote

$$f'(r)\,[f'(r)\,(1-\tan^2 v \,.\, \cos^2\theta) - 2\tan v \cos\theta] = 0 \quad \ldots \quad 4)$$

Mit Hülfe dieser Isophoten kann man oft, selbst bei complicirten Flächen, die Construction des ganzen Isophotensystems in einfachster Weise ausführen.

Ist $z=f'(r)$ die Gleichung der Meridiancurve der durch irgend eine Curve erzeugten Rotationsfläche, so ist $z=f'(r-d)$ die Gleichung der Meridiancurve der Rotationsfläche, welche durch Umdrehung derselben Curve im Abstande d von der Axe erzeugt wird.

Die Gleichung der Isophoten dieser letzteren Fläche ist dann nach Gleichung 1)

$$L=\frac{\cos v+\sin v \,.\, f'(r-d) \,.\, \cos\theta}{\sqrt{1+[f'(r-d)]^2}} \quad \ldots \quad 5)$$

Denken wir uns diese Gleichung auf $r-d$ reducirt, so gilt der Satz:

> Bei den Grundrissprojectionen der Isophotensysteme zweier Rotationsflächen, die durch dieselbe Curve in ungleichen Abständen von der Drehungsaxe erzeugt worden sind, ist die Differenz der gleichgerichteten Leitstrahlen gleich der Differenz der beiden Abstände von der Drehungsaxe.

Haben wir nun die Grundrissprojectionen von dem Isophotensystem einer Rotationsfläche fertig vor uns, dann erhalten wir das System der

*) Dies kann leicht mit Hülfe des Hauptkreises und des Brennpunktes ausgeführt werden, ohne die Hülfshyperbel selbst zu construiren. In Fig. 1[b] ist diese Hyperbel nur der Vollständigkeit wegen construirt.

um d erweiterten oder verengerten Rotationsfläche, wenn wir sämmtliche Lichtstrahlen jenes fertigen Systems um d verlängern oder verkürzen.

In speciellen Fällen können wir die Isophoten der Rotationsflächen oft noch in einfacherer Weise construiren, als dies nach der allgemeinen Methode ausgeführt werden kann. Wir wollen dies an den Isophoten der Kugelfläche zeigen.

Die Gleichung der Kugelfläche in cylindrischen Coordinaten ist

$$z = \sqrt{\varrho^2 - r^2},$$

wenn ϱ den Radius der Kugel bezeichnet.

Es ist dann

$$f'(r) = -\frac{r}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}.$$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung 1), so wird

$$L = \frac{\cos v \,.\, \sqrt{\varrho^2 - r^2} - \sin v \,.\, r \,.\, \cos\theta}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Führen wir in diese Gleichung rechtwinkelige Coordinaten ein, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$r \cos\theta = x$$

und dann ergiebt sich

$$\frac{y^2}{\varrho^2\,[1 - L^2]} + \frac{(x + L\varrho \sin v)^2}{\varrho^2\,[1 - L^2]\cos^2 v} = 1.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass die Projectionen der Isophoten der Kugelfläche Ellipsen sind, deren Mittelpunkte auf der Projection der Strahlenrichtung liegen.

Hieraus lassen sich leicht einige Eigenschaften ableiten, die für die Construction dieser Ellipsen von besonderem Nutzen sind. Bezeichnen wir mit b die grosse Halbaxe dieser Ellipsen, mit e ihre Excentricität, und mit m den Abstand der Ellipsenmittelpunkte vom Coordinatenanfang, so ist

$$b = \varrho\sqrt{1 - L^2},$$
$$e = \varrho\sqrt{1 - L^2}\sin v,$$
$$m = L\varrho \sin v.$$

Hiernach ist

$$\frac{b^2}{\varrho^2} + \frac{m^2}{(\varrho \sin v)^2} = 1.$$

Die Endpunkte der grossen Axen der Ellipsen liegen auf einer Ellipse, deren Halbaxen ϱ und $\varrho \sin v$ sind.

Ferner ist

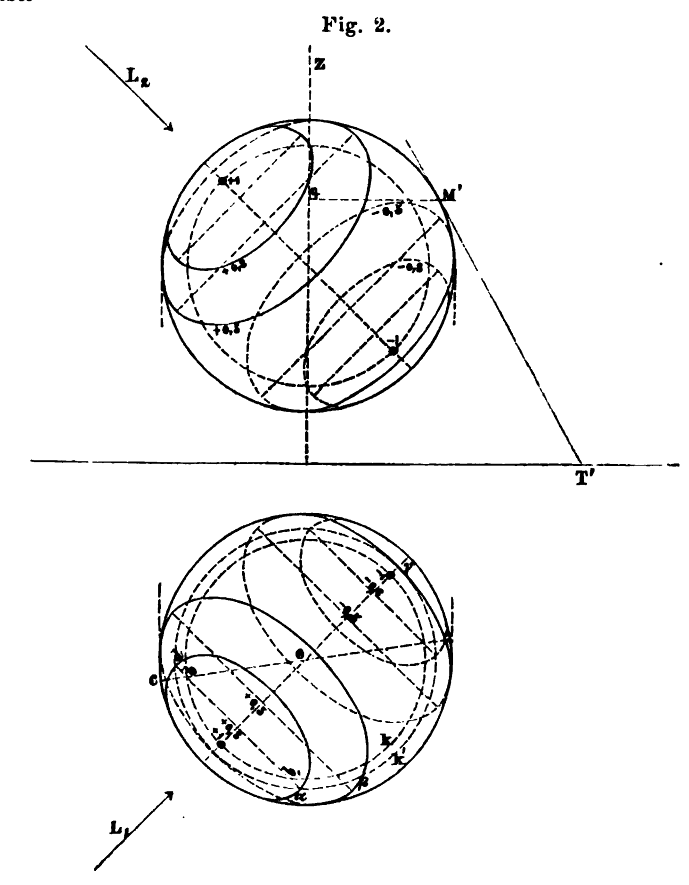
$$e^2 + m^2 = (\varrho \sin v)^2$$

Die Brennpunkte der Ellipsen liegen auf einen Kreise vom Radius $\varrho \sin v$.

Auf diese Eigenschaften gründet sich eine sehr einfache Construction der Isophoten der Kugelfläche.

Es sei Fig. 2 die Grundriss- und Aufrissprojection einer Kugelfläche vom Radius ϱ, welche von einem Strahlenbündel beleuchtet wird, dessen Richtung in Fig. 1ª gegeben ist, also mit der z-Axe den Winkel ν einschliesst.

Fig. 2.



Wir machen in Fig. 1ª $AW = \varrho$ und beschreiben mit WB_1 als Radius in Fig. 2 um o den Kreis K. Auf diesem Kreis liegen die Brennpunkte der Ellipsen. Die Punkte $+1$ und -1 sind die isolirten Punkte der Maximalisophote. Wir theilen jede der beiden gleichen Strecken $\overline{0, +1}$ und $\overline{0, -1}$ in $n = 10$ gleiche Theile. Die erhaltenen Theilpunkte sind die Mittelpunkte der elliptischen Isophoten, welche den Lichtstärken $+0{,}9$, $+0{,}8 \ldots . 0 \ldots -0{,}8$, $-0{,}9$ entsprechen. Wollen wir nun eine Isophote, z. B. die der Lichtstärke $+0{,}8$, construiren, so ziehen wir durch $+0{,}8$ eine Gerade auf oL senkrecht. Diese ist dann die Axe der Ellipse; wo sie den Kreis K schneidet, liegen auf ihr die Brennpunkte

b und b_1. Hierauf ziehen wir durch b den Radius oc und cd parallel der Axe oL_1, so ist d der eine Endpunkt der grossen Axe. Wir haben hiernach den Mittelpunkt, die Brennpunkte und die grosse Axe der Ellipse und somit Alles, was zur einfachsten Construction der Ellipse, resp. der Isophoten der Kugelfläche, nöthig ist.

Ganz so wie im Grundriss, können wir bei der Kugelfläche auch im Aufriss die Construction ausführen, wenn wir von dem Hinaufprojiciren keinen Gebrauch machen wollen. In der Fig. 2 sind die Projectionen der Isophoten der Lichtstärken +1, +0,8, +0,5 und −0,5, −0,8, −1, im Grundriss und Aufriss dargestellt.

Die Isophoten der Kugelfläche können auch als Fundament einer zweiten Isophotenconstruction der Rotationsflächen dienen.

Für die Kugel ist

$$f'(r) = \frac{-r_K}{\sqrt{\varrho^2 - r_K^2}},$$

wenn ϱ den Kugelradius, r_K den Radiusvector bezeichnet.

Diesen Werth in die Gleichung 2) gesetzt giebt

$$\cos\theta = -\frac{\varrho \csc\nu}{r_K} \cdot L + \frac{\cot\nu \,.\, \sqrt{\varrho^2 - r_K^2}}{r_K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Dies ist die Gleichung für die Isophoten der Kugelfläche.

Aus der Gleichung

$$f'(r) = \frac{-r_K}{\sqrt{\varrho^2 - r_K^2}}$$

folgt, wenn wir

$$f'(r) = \tan\tau$$

setzen,

$$r_K = \varrho \sin\tau.$$

Haben wir an die Meridiancurve einer Rotationsfläche Fig. 1 in M eine Tangente MT gezogen, welche mit der Axe des r den Winkel τ bildet, so erhalten wir aus 7) die Werthe der Winkel θ, welche auf den Parallelkreis MM_1 die Punkte gegebener Lichtstärken bestimmen.

Um die Werthe der θ zu erhalten, construiren wir den Werth $r_K = \varrho \sin\tau$. Es sei in Fig. 2 der Radius der dargestellten Kugel ϱ, $M'T'$ eine zu MT parallele Tangente; so ist, wenn wir $M'q$ parallel der Projectionsaxe ziehen,

$$M'q = r_K = \varrho \sin\tau.$$

Mit $M'q$ beschreiben wir um o im Grundriss den Kreis K'. Die Durchschnitte α, β.... dieses Kreises mit den Isophoten der Lichtstärken 0,8, 0,5.... verbinden wir mit dem Mittelpunkt o. Diese Verbindungslinien schliessen dann mit oL die Winkel θ ein, welche den genannten Lichtstärken entsprechen. Ziehen wir (Fig. 1) $\overline{Q0,8}$ parallel $\overline{o\alpha}$ (Fig. 2), so ist der Schnittpunkt 0,8 dieser Geraden mit dem Parallelkreis der Rotationsfläche der Ort der Lichtstärke 0,8. In gleicher

Weise kann man die Punkte der anderen gegebenen Lichtstärken bestimmen.

Diese zweite Construction, mit Benutzung der sogenannten Kugelskala, ist schon von einigen Autoren ausgeführt worden. Wir haben dieselbe nur der hier angegebenen leichten Ableitung wegen mit angeführt. Diese Construction wird ungenau, wenn der Radius des Parallelkreises (K' Fig. 2) sich dem Radius der Kugel nähert, und ohne Aufrissprojection ganz unbrauchbar, wenn er gleich demselben wird. In diesem Falle liefert aber die erste Construction mit Benutzung der Linienskala die schärfsten Schnitte; denn im Grenzfalle werden dort die Hülfsgeraden $g'g'$ Asymptoten der Hülfshyperbel. Ein anderer Vortheil besteht darin, dass wir bei der Linienskala durch gerade Linien unseren Zweck erreichen, während wir bei der Kugelskala viele Ellipsen gebrauchen.

Die Isophoten der Schraubenflächen.

§ 3.

Die Schnittcurve, welche eine durch die Drehungsaxe gelegte Ebene mit einer Schraubenfläche bildet, wollen wir, wie bei den Rotationsflächen, auch hier Meridiancurve nennen.

Ist nun

$$z = f(r)$$

die Gleichung dieser Meridiancurve, so ist die allgemeine Gleichung der Schraubenfläche, welche durch eine einfach- oder doppeltgekrümmte Curve erzeugt wird, deren Drehungsaxe in der z-Axe liegt, in cylindrischen Coordinaten

$$z = \gamma \,.\, \theta + f(r).$$

Die constante Grösse γ wollen wir den Hauptparameter der Schraubenflächen nennen. Für γ gleich Null gehen die Schraubenflächen in Rotationsflächen über.

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f'(r),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \gamma.$$

Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung VI., so wird zunächst

$$p = \sqrt{[f'(r)]^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}},$$

$$\tan \omega = \frac{\gamma}{r\, f'(r)}$$

und

$$L = \frac{\cos v + \sin v \cdot \sqrt{[f'(r)]^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}} \cdot \cos(\theta + \omega)}{\sqrt{1 + [f'(r)]^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}} \quad . \; . \quad 1)$$

Diese allgemeine Gleichung der Isophoten der Schraubenflächen hat ganz die Form der Gleichung 1) (§ 2). Die Construction der Isophoten der Schraubenflächen kann demnach ganz in derselben Weise wie bei den Rotationsflächen ausgeführt werden. Dieselbe Hülfsfigur (1^b) kann in unveränderter Gestalt auch bei den Schraubenflächen Anwendung finden; ebenso auch die Kugelskala (Fig. 2). Wir brauchen nur die Werthe $\sqrt{[f'(r)]^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}$ und $\frac{\gamma}{r f'(r)}$ zu construiren, was mit Leichtigkeit geschehen kann, wenn der Werth $f'(r)$ zu ermitteln ist. Die Construction der Isophoten der Schraubenflächen ist hiernach auf das Problem der Tangentenziehung an die Meridiancurve der Schraubenfläche zurückgeführt.

Eleganter gestaltet sich noch die Gleichung 1), wenn wir den Werth

$$\tan \omega = \frac{\gamma}{r f'(r)}$$

substituiren, dann ist

$$\sqrt{[f'(r)]^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}} = \frac{\gamma}{r \sin \omega},$$

folglich

$$L = \frac{\cos v + \sin v \cdot \frac{\gamma}{r \sin \omega} \cdot \cos(\theta + \omega)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{r \sin \omega}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Auch nach dieser Gleichung kann die Construction der Isophoten der Schraubenflächen mit Benutzung der Figur 1^b in derselben Weise, wie bei den Rotationsflächen ausgeführt werden. Wir haben statt $f'(r)$ hier $\frac{\gamma}{r \sin \omega}$ und statt $\cos \theta$ hier $\cos(\theta + \omega)$.

Geometrisch bedeutet ω den Winkel zwischen Radiusvector und Normale der Schnittcurve

$$\left.\begin{aligned} z &= \gamma\theta + f'(r) \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und $r \sin \omega$ den Abstand dieser Normale vom Pol.

Hiernach ist die Construction der Isophoten der Schraubenfläche auf das Problem des Tangentenziehens an die Schnittcurve zurückgeführt, welche die Grundriss-Ebene mit der Schraubenfläche bildet. Um die Construction der Isophoten der Schraubenflächen im Grundriss auszuführen, construirt man die Schnittcurve des Grundrisses — die überhaupt bei

einer Darstellung einer Schraubenfläche nicht fehlen darf — und beschreibt einen Kreis vom Radius r um den Pol. Im Punkte, wo dieser Kreis die Schnittcurve trifft, ziehen wir die Tangente resp. Normale derselben. Dann haben wir den Winkel ω. Diesen legen wir mit einem Schenkel an die Axe der Polarcoordinaten, so bildet der andere Schenkel den Anfang für die Zählung des Winkels θ. Um nun $\cos(\theta + \omega)$ zu bestimmen, verfahren wir ganz wie bei den Rotationsflächen, indem wir analog

$$\frac{\gamma}{r \sin \theta} = \tan \tau.$$

setzen.

Die Construction der Isophoten der Schraubenflächen unterscheidet sich von der Construction der Isophoten der Rotationsflächen nur dadurch, dass bei diesen der Winkel θ beständig von der Projection der Strahlenrichtung, bei jenen aber von einer mit r veränderlichen Anfangsrichtung ausgezählt wird, welche mit der Projection der Strahlenrichtung den durch r bestimmten Winkel ω einschliesst. Haben wir so auf beliebig vielen um den Pol concentrisch beschriebenen Kreisen die Punkte gegebener Lichtstärken bestimmt, so geben diese die Projectionen der Isophoten im Grundriss. Da diese concentrischen Kreise die Grundrissprojectionen von Schraubenlinien sind, welche auf der Schraubenfläche liegen, so erhalten wir durch Hinaufprojiciren die Projectionen der Isophoten im Aufriss.

Um das Isophotensystem der Schraubenfläche vollständig zu erhalten, müssen wir noch der isolirten Punkte der Maximalisophote gedenken, welche unsere Construction, wie schon bei den Rotationsflächen gesagt, nur zufällig liefern kann.

Es wird $L = \pm 1$, wenn in Gleichung 2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma}{r \sin \omega} &= \tan v \\ \cos(\theta + \omega) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{a)}$$

ist. Aus der ersten Gleichung folgt

$$r \sin \omega = \frac{\gamma}{\tan v}.$$

Um nun die Orte der Lichtstärke $L = \pm 1$ zu bestimmen, müssen wir hiernach die Normale der genannten Schnittcurve zu construiren suchen, deren Abstand vom Pol $\frac{\gamma}{\tan v}$ ist; dann ist ω bekannt und hierdurch sind es auch r, θ, die Coordinaten der isolirten Punkte. Die Bestimmung dieser Normale ist aber im Allgemeinen nicht leicht. Wir müssen daher diese Punkte theils durch Rechnung, theils durch Construction zu ermitteln suchen.

Aus den beiden Gleichungen a) folgt auch, wenn wir für $tan\,\omega$ den Werth $\frac{\gamma}{r\,f'(r)}$ setzen

$$\left.\begin{aligned} r\sin\theta &= -\frac{\gamma}{tan\,v} \\ \frac{\gamma^2}{r^2} + [f'(r)]^2 &= tan^2 v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad b)$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt der Satz:

Die isolirten Punkte der Maximalisophote liegen bei allen Schraubenflächen auf einer Geraden, welche im Abstande $-\frac{\gamma}{tan\,v}$ der Grundrissprojection der Strahlenrichtung parallel ist.

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich der Abstand dieser Punkte vom Coordinatenanfang, wenn wir dieselbe auf r reduciren.*)

Wir wollen hier beispielsweise einige specielle Fälle betrachten: 1) Die Isophoten der schiefen Schraubenfläche (Schraube mit scharfem Gewinde)

$$z = \gamma\theta + a r.$$

Diese Gleichung, in der a die Cotangente des Winkels bedeutet, welchen die erzeugende Gerade mit der Drehungsaxe einschliesst, geht in die Gleichung der geraden Schraubenfläche (Schraube mit flachem Gewinde) über, wenn $a = 0$ ist.

Es ist hier

$$f'(r) = a$$

$$tan\,\omega = \frac{\gamma}{r\,.\,a}.$$

Die Gleichung der Isophoten dieser Fläche ist dann nach Gleichung 1) d. §

$$L = \frac{\cos v + \sin v\sqrt{a^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}\cos(\theta+\omega)}{\sqrt{1 + a^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}} \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

Da nun die Werthe

$$\frac{\gamma}{r a} \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}$$

mit Leichtigkeit construirt werden können, so ist auch die Construction dieser Isophoten einfach.

Setzen wir in die Gleichung α) für ω seinen Werth, so wird

*) Giebt diese Gleichung, auf r reducirt, nur einen Werth für r, so besteht selbstverständlich die Maximalisophote nur aus einem isolirten Punkt.

$$L = \frac{\cos v + \sin v \left(a \cos\theta - \frac{\gamma}{r} \cdot \sin\theta\right)}{\sqrt{1 + a^2 + \frac{\gamma^2}{r^2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta)$$

Denken wir uns diese Gleichung auf $\frac{r}{\gamma}$ reducirt, so gilt der Satz:

Die Leitstrahlen der Grundrissprojectionen von den Isophoten der Schraubenfläche

$$z = \gamma\theta + av$$

sind dem Hauptparameter γ proportional.

Wenn wir also das Grundrissisophotensystem einer dieser Schraubenflächen vom Hauptparameter γ_0 fertig vor uns haben, so können wir das System einer anderen, deren Hauptparameter γ_1 ist, leicht mit Hülfe dieser Proportionalität construiren.

Für $L = o$ erhalten wir die Gleichung der Grenzisophote

$$r = \frac{\gamma \sin v \,.\, \sin\theta}{\cos v + a \sin v \,.\, \cos\theta}.$$

Die Grenzisophote geht hiernach stets durch den Pol und erstreckt sich in die Unendlichkeit, wenn $a \sin v > \cos v$ ist. Für den besonderen Fall $a \sin v = \cos v$ wird

$$r = \gamma \tan v \,.\, \tan \tfrac{1}{2}\theta.$$

Aus der zweiten der beiden Gleichungen b) folgt

$$r = \frac{\gamma}{\sqrt{\tan^2 v - a^2}},$$

wodurch auch die Maximalisophote mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen b) bestimmt ist.

Die Lichtintensität $L = \pm 1$ kann also nur auf dieser Schraubenfläche auftreten, wenn $\tan v \geq a$ ist.

2) Die Isophoten der logarithmischen Schraubenfläche

$$z = \gamma\theta + al(r).$$

Diese Gleichung, in welcher a eine Constante bedeutet, geht für $a = 0$ auch in die Gleichung der geraden Schraubenfläche über.

Es ist dann

$$f'(r) = \frac{a}{r},$$

$$\tan \omega_1 = \frac{\gamma}{a}.$$

Aus der Gleichung 1) d. § folgt hier die Gleichung der Isophoten dieser Fläche

$$L = \frac{\cos v + \sin v \,.\, \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{r} \cos(\theta + \omega_1)}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 + a^2}{r^2}}}.$$

Da der Winkel ω constant ist und die Werthe

$$\frac{\gamma}{a} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{r}$$

sehr leicht construirt werden können, so ist auch die Construction der Isophoten dieser Fläche einfach.

Aus der Gleichung dieser Isophoten folgt der Satz:

Die Grundrissprojectionen der Isophoten der logarithmischen Schraubenfläche

$$z = \gamma\theta + al(r)$$

und des Rotationslogarithmoids*)

$$z = \sqrt{\gamma^2 + a^2} \,.\, l(r)$$

sind congruent, und unter dem Winkel ω_1 gegen einander gedreht, wenn diese beiden Flächen von gleichgerichteten Strahlenbündeln beleuchtet werden.

Denken wir uns die Gleichung dieser Isophoten auf $\frac{r}{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}$ reducirt, so ergiebt sich der Satz:

Die Leitstrahlen der Grundrissprojectionen von den Isophoten der Schraubenflächen

$$z = \gamma\theta + al(r)$$

sind der Grösse $\sqrt{\gamma^2 + a^2}$ proportional.

Selbstverständlich gilt dies auch von der Rotationsfläche

$$z = \sqrt{\gamma^2 + a^2} \,.\, l(r).$$

Mit Hülfe dieser Proportionalität können wir sehr leicht die Isophotensysteme aller Flächen dieser Gattung construiren, wenn wir das Isophotensystem einer dieser Flächen fertig vor uns haben, und uns nur den Parameter γ veränderlich denken.

Die Gleichung der Grenzisophote dieser Flächen ist

$$r = \tan v \,.\, \sqrt{\gamma^2 + a^2} \,.\, \cos(\theta + \omega_1).$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der durch den Pol geht und dessen Durchmesser gleich $\tan v \sqrt{\gamma^2 + a^2}$ ist.

Die Gleichung der Typusisophote ist

$$\left. \begin{aligned} r = \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{2 \tan v \,.\, \cos(\theta + \omega_1)} - \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2} \,.\, \tan v}{2} \cdot \cos(\theta + \omega_1) \\ \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{r} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Die Curve der ersten Gleichung lässt sich leicht direct construiren. Sie geht, wenn $\tan v \geqq 1$, durch den Pol und erstreckt sich mit zwei sym-

*) Wir bezeichnen die Rotationsfläche, welche durch Umdrehung der logarithmischen Linie ($z = al(r) + b$) entsteht, mit dem Namen Rotationslogarithmoid.

metrischen Zweigen in den unendlich grossen Kreis, welchen die zweite Gleichung repräsentirt.

Für den besonderen Fall $tan\, v = 1$ wird

$$r = \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{2} \cdot \frac{sin^2(\theta + \omega_1)}{cos(\theta + \omega_1)}.$$

Dies ist die Cissoide des Diokles.

Aus der zweiten der beiden Gleichungen b) d. § ergiebt sich

$$r = \frac{\sqrt{\gamma^2 + a^2}}{tan\, v}.$$

Hierdurch ist die Maximalisophote mit Beachtung der ersten der Gleichungen b) bestimmt.

3) Die Isophoten der geraden Schraubenfläche

$$z = \gamma\theta.$$

Diese Fläche ist, wie schon gesagt, der specielle Fall $a = 0$ von der eben betrachteten Fläche. Es wird aber für die Folge von besonderem Nutzen sein, wenn wir auf die Isophoten dieser Schraubenfläche specieller eingehen. Je nachdem γ negativ oder positiv ist, erhalten wir die rechts- oder linksgängige Schraubenfläche. Wir wollen der Bestimmtheit wegen γ negativ nehmen. Dann ist die Gleichung der rechtsgängigen Schraubenfläche

$$z = -\gamma\theta.$$

In diesem Falle ist

$$\omega_1 = -90^0;$$

folglich die Gleichung der Isophoten dieser Fläche

$$L = \frac{cos\, v + sin\, v \cdot \frac{\gamma}{r} \cdot sin\, \theta}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{r^2}}}.$$

Diese Isophoten lassen sich wegen des einfachen Werthes $\frac{\gamma}{r}$ mit grösster Leichtigkeit nach der für Rotationsflächen angegebenen Methode construiren. Da die Lichtstrahlen r dem Parameter γ proportional sind, so kann man nach einem fertigen Isophotensystem einer dieser Schraubenfläche die Isophotensysteme aller Flächen dieser Gattung sehr leicht mit Benutzung dieser Proportionalität construiren.

Aus der Gleichung dieser Isophoten folgt, da

$$sin\, \theta = cos(90^0 - \theta)$$

ist, dass das ganze Isophotensystem im Grundriss von der durch den Pol gehenden auf der Projection der Strahlenrichtung senkrecht stehenden Geraden symmetrisch getheilt wird.

Die Gleichung der Grenzisophote ist

$$r = -\gamma \tan \nu \,.\, \sin \theta.$$

Die Grundrissprojection der Grenzisophote ist ein durch den Pol gehender Kreis, dessen Radius gleich $\gamma \tan \nu$ ist.

Die Gleichung der Typusisophote ist

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\gamma}{2 \tan \nu} \csc \theta - \frac{\gamma \tan \nu}{2} \sin \theta \\ \frac{\gamma}{r} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Diese Curve, welche aus zwei Theilen besteht, ist schon S. 247 besprochen. Die Maximalisophote wird durch einen isolirten Punkt repräsentirt, dessen Coordinaten

$$r = \frac{\gamma}{\tan \nu}$$
$$\theta = 90^0$$

sind.

Die Isophoten der Conoidflächen.

§ 4.

Die allgemeine Gleichung der Conoidflächen, welche durch eine Gerade erzeugt werden, die senkrecht an einer festen Geraden und zugleich an einer Curve hingleitet, ist in cylindrischen Coordinaten, wenn wir die feste Gerade zur z-Axe nehmen

$$z = f'(\theta).$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = f'(\theta)$$

und diese Werthe in die Gleichung V. gesetzt, wird

$$L = \frac{\cos \nu - \sin \nu \cdot \frac{f'(\theta)}{r} \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 + \left[\frac{f'(\theta)}{r}\right]^2}}$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der Isophoten der Conoidflächen. Denken wir uns diese Gleichung auf $\frac{f'(\theta)}{r}$ reducirt, so ergiebt sich der Satz:

> Die Leitstrahlen der Grundrissprojectionen von den Isophoten der Conoidflächen sind der Grösse $f'(\theta)$ proportional.

Wir können daher nach dem fertigen Isophotensystem der einfachsten Conoidfläche, der geraden Schraubenfläche, die Construction der Isophoten aller construirbaren Conoidflächen ausführen, wenn der Werth $f'(\theta)$ ermittelt werden kann.

Setzen wir

$$r = -\frac{f'(\theta)}{\gamma} \cdot \varrho_L,$$

so ist

$$L = \frac{\cos v + \sin v \cdot \frac{\gamma}{\varrho_L} \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varrho_L}\right)^2}}.$$

Dies ist die Gleichung des Isophotensystems der geraden Schraubenfläche oder des um 90^0 gedrehten Isophotensystems des Rotationslogarithmoids. Um nun die Isophoten der Conoidflächen zu construiren, ziehen wir im Grundriss des Isophotensystems der geraden Schraubenfläche einen Leitstrahl unter einem Winkel θ durch alle Isophoten. Die Durchschnittspunkte geben uns die Werthe der ϱ_L, welche den Lichtstärken der durchschnittenen Isophoten entsprechen; dann ist

$$r = -\frac{f'(\theta)}{\gamma} \varrho_L,$$

und somit haben wir auf diesem Leitstrahl die Punkte jener Lichtstärken auf der Conoidfläche bestimmt. Wiederholen wir dieses auf mehreren Leitstrahlen, so erhalten wir alle Punkte, welche verbunden das Isophotensystem der Conoidflächen liefern.

Da für den Leitstrahl des hellsten Punktes der geraden Schraubenfläche $\theta = 90^0$ ist, so liegen auch die Punkte der Maximalisophote aller Conoidflächen auf einer senkrecht zur Grundrissprojection der Strahlenrichtung durch den Pol gehenden Geraden.

Denken wir uns den Durchschnitt der Conoidfläche $z = f(\theta)$ mit der Fläche des Kreiscylinders, dessen Radius 1 ist und dessen Axe in der z-Axe liegt, von dem Cylinder abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet, so ist $z = f(\theta)$ die Gleichung dieses Schnittes in rechtwinkeligen Coordinaten.

Kleinere Mittheilungen.

X. Bemerkungen über einige bestimmte Integrale. Setzt man zur Abkürzung:

$$1)\qquad p=\int_0^\infty \frac{\cos(z^2u^2)}{1+u^2}\,\partial u,\qquad q=\int_0^\infty \frac{\sin(z^2u^2)}{1+u^2}\,\partial u,$$

so findet man leicht:

$$-\frac{1}{2z}\frac{\partial p}{\partial z}+q=\int_0^\infty \sin(z^2u^2)\,\partial u,\qquad \frac{1}{2z}\frac{\partial q}{\partial z}+p=\int_0^\infty \cos(z^2u^2)\,\partial u,$$

oder:

$$2)\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2zq,\qquad \frac{\partial q}{\partial z}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}-2pz.$$

Multiplicirt man die zweite der vorstehenden Gleichungen mit $i=\sqrt{-1}$, addirt das Product zur ersten, so folgt:

$$\frac{\partial(p+qi)}{\partial z}=-(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,2iz\,(p+qi).$$

Die vorstehende Gleichung mit $e^{z^2 i}$ multiplicirt, giebt:

$$\frac{\partial(p+qi)\,e^{z^2 i}}{\partial z}=-(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{z^2 i}.$$

Da nun nach 1) $(p)_{z=0}=\frac{\pi}{2}$, $(q)_{z=0}=0$, so folgt durch Integration nach z:

$$p+qi=\frac{\pi}{2}e^{-z^2 i}-(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z e^{-(z^2-u^2)i}\,\partial u.$$

Aus dieser Gleichung leitet man unmittelbar die beiden folgenden ab:

$$3)\qquad \begin{aligned} p&=\frac{\pi}{2}\cos(z^2)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z \sin(z^2-u^2)\,\partial u-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z \cos(z^2-u^2)\,\partial u,\\ q&=-\frac{\pi}{2}\sin(z^2)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z \sin(z^2-u^2)\,\partial u+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z \cos(z^2-u^2)\,\partial u. \end{aligned}$$

Setzt man in den Integralen rechts zu statt u, so folgt:

$$2(p-q)=\pi\left\{\cos(z^2)+\sin(z^2)\right\}-2z\sqrt{2\pi}\int_0^1\cos z^2(1-u^2)\,\partial u,$$

und hieraus:

$$4)\quad 2\int_0^z(p-q)\,\partial u=\pi\int_0^z\cos(u^2)\,\partial u+\pi\int_0^z\sin(u^2)\,\partial u-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{\sin z^2(1-u^2)}{1-u^2}\,\partial u.$$

Die Gleichungen 2) respective $2p$, $2q$ multiplicirt und addirt geben:

$$2\left(p\frac{\partial p}{\partial z}+q\frac{\partial q}{\partial z}\right)=\frac{\partial(p^2+q^2)}{\partial z}=-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(p-q).$$

Diese Gleichung nach z integrirt giebt:

$$p^2+q^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^z(p-q)\,\partial u.$$

Setzt man links für p und q ihre Werthe aus 3) und für das Integral rechts den in 4) aufgestellten Ausdruck, so erhält man nach einigen sehr einfachen Reductionen:

$$\left\{\int_0^z\cos(z^2-u^2)\,\partial u\right\}^2+\left\{\int_0^z\sin(z^2-u^2)\,\partial u\right\}^2=\int_0^1\frac{\sin z^2(1-u^2)}{1-u^2}\,\partial u,$$

oder auch $\sqrt{z}$ statt z gesetzt:

$$\left\{\int_0^1\cos z(1-u^2)\,\partial u\right\}^2+\left\{\int_0^1\sin z(1-u^2)\,\partial u\right\}^2+\int_0^1\frac{\sin z(1-u^2)}{z(1-u^2)}\,\partial u.$$

Durch Entwicklung der Integrale folgt für $2z=x$:

$$\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{1.3.5\ldots(4n-3)}\right\}^2+\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{1.3.5\ldots(4n-1)}\right\}^2$$
$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,\frac{x^{2n-2}}{1.3.5\ldots(4n-3)}.$$

Die durch p und q bezeichneten Integrale stehen mit den beiden Integralen:

$$\int_0^\infty\cos(u^2)\,e^{-2zu}\,\partial u,\quad\int_0^\infty\sin(u^2)\,e^{-2zu}\,\partial u$$

in nahem Zusammenhang, was sich leicht direct auf folgende Art darthun lässt. Setzt man in den beiden Integralen:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\infty}^\infty\cos(w^2)\,\partial w,\quad\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\infty}^\infty\sin(w^2)\,\partial w$$

$w=u+v$, so folgt:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^2 + v^2 + 2uv)\,\partial v = 2\int_0^{\infty} \cos(u^2 + v^2)\cos 2uv\,\partial v,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(u^2 + v^2 + 2uv)\,\partial v = 2\int_0^{\infty} \sin(u^2 + v^2)\cos 2uv\,\partial v,$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicire man mit $\cos(u^2)$, die zweite mit $\sin(u^2)$ und bilde die Summe der Producte; ferner multiplicire man die erste Gleichung mit $\sin(u^2)$, die zweite mit $\cos(u^2)$ und bilde die Differenz der Producte, hierdurch ergeben sich die Gleichungen:

$$\{\cos(u^2) + \sin(u^2)\}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\infty} \cos(v^2)\cos 2uv\,\partial v,$$

$$\{\cos(u^2) - \sin(u^2)\}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\infty} \sin(v^2)\cos 2uv\,\partial v.$$

Diese Gleichungen geben:

$$2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos(v^2)\cos 2uv\, e^{-2zu}\,\partial u\,\partial v = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) + \sin(u^2)\}\, e^{-2zu}\,\partial u,$$

$$2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \sin(v^2)\cos 2uv\, e^{-2zu}\,\partial u\,\partial v = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) - \sin(u^2)\}\, e^{-2zu}\,\partial u.$$

Integrirt man in den Doppelintegralen links zuerst nach u, so folgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{z\cos(v^2)}{z^2 + v^2}\,\partial v = \int_0^{\infty} \frac{\cos(z^2 v^2)}{1 + v^2}\,\partial v = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) + \sin(u^2)\}\, e^{-2zu}\,\partial u,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z\sin(v^2)}{z^2 + v^2}\,\partial v = \int_0^{\infty} \frac{\sin(z^2 v^2)}{1 + v^2}\,\partial v = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) - \sin(u^2)\}\, e^{-2zu}\,\partial u.$$

Setzt man hierin bz statt z, so ergeben sich die Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{b\cos(u^2)}{b^2 + \left(\frac{u}{z}\right)^2}\,\partial u = z\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) + \sin(u^2)\}\, e^{-2bzu}\,\partial u, \\[2ex] \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{b\sin(u^2)}{b^2 + \left(\frac{u}{z}\right)^2}\,\partial u = z\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\{\cos(u^2) - \sin(u^2)\}\, e^{-2bzu}\,\partial u. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich andere ableiten, in welchen $\cos(u^2)$ und $\sin(u^2)$ unter dem Integralzeichen mit ähnlichen Functionen von u multiplicirt erscheinen.

Nimmt man in den Gleichungen 5) $b = \frac{2n-1}{2}\pi$, multiplicirt mit $(-1)^{n-1}$, legt n alle ganzzahligen Werthe von 1 bis ∞ bei, so giebt die Summation der Integrale, mit Rücksicht auf:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} \frac{\frac{2n-1}{2}\pi}{\left(\frac{u}{z}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2} = \frac{1}{e^{\frac{u}{z}} + e^{-\frac{u}{z}}},$$

die beiden Relationen:

$$\text{(6}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(u^2)}{e^{\frac{u}{z}} + e^{-\frac{u}{z}}}\,\partial u = z\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{\cos(u^2) + \sin(u^2)}{e^{u\pi z} + e^{-u\pi z}}\,\partial u, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(u^2)}{e^{\frac{u}{z}} + e^{-\frac{u}{z}}}\,\partial u = z\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{\cos(u^2) - \sin(u^2)}{e^{u\pi z} + e^{-u\pi z}}\,\partial u. \end{cases}$$

Für $z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ geben die vorstehenden Gleichungen:

$$(\sqrt{2} - 1)\int_0^\infty \frac{\cos(u^2)}{e^{u\sqrt{\pi}} + e^{-u\sqrt{\pi}}}\,\partial u = \int_0^\infty \frac{\sin(u^2)}{e^{u\sqrt{\pi}} + e^{-u\sqrt{\pi}}}\,\partial u.$$

Setzt man:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(u^2)}{e^{zu} + e^{-zu}}\,\partial u = \varphi(z)\,.\int_0^\infty \frac{\sin(u^2)}{e^{zu} + e^{-zu}}\,\partial u,$$

so geben die Gleichungen 6) durch Division die Functionalgleichung:

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\varphi(\pi z) + 1}{\varphi(\pi z) - 1}.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Gleichungen 6) sich auch direct herleiten lassen, wenn man die bekannte Gleichung:

$$\frac{1}{e^{\frac{u}{z}} + e^{-\frac{u}{z}}} = \int_0^\infty \frac{\cos\frac{uv}{z}}{e^{\frac{1}{2}\pi v} + e^{-\frac{1}{2}\pi v}}\,\partial v = 2z\int_0^\infty \frac{\cos 2uv}{e^{\pi v z} + e^{-\pi v z}}\,\partial v$$

mit $\cos(u^2)\,\partial u$, $\sin(u^2)\,\partial u$ multiplicirt und nach u zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt.

Göttingen. Dr. Enneper.

XI. Ableitung der Partialbruch- und Produkt-Entwickelungen für die trigonometrischen Funktionen. Von Prof. Dr. Schröter zu Breslau.

Die Partialbruch-Entwickelungen der trigonometrischen Funktionen *cotg x* und *cosec x* werden gewöhnlich aus den Produktentwickelungen und diese aus dem allgemeinen Multiplikationstheorem der Trigonometrie, d. h. aus dem algebraischen Ausdruck von $\sin nx$ durch $\sin x$ hergeleitet; dabei bedarf man des Fundamentalsatzes der Algebra, der eigentlich mit der Trigonometrie weiter nichts zu thun hat, nämlich des Nachweises, dass jede rationale ganze Funktion sich in lineäre Faktoren zerlegen lasse u. s. w. Dieser beträchtliche Apparat von Formeln und Hülfsbetrachtungen kann ersetzt werden durch die einzige trigonometrische Formel für die Verdoppelung des Winkels, aus welcher, wie es scheint, in der elementarsten Weise, sowohl die Entwickelungen der trigonometrischen Funktionen in Partialbrüche, als auch in Faktorenfolgen hervorgehen; ein schliesslicher Uebergang zur Grenze ist natürlich hier wie dort unentbehrlich, aber bei beiden Arten der Herleitung durch ganz dieselben Betrachtungen ausführbar. Da sich der angedeutete elementarere Weg für Zwecke des Unterrichts besonders empfiehlt, so sei es gestattet, ihn hier mitzutheilen.

Wir gehen von der bekannten trigonometrischen Formel aus:

$$\text{(I.)} \qquad ctg\, x = \frac{1}{2}\left\{ctg\,\frac{x}{2} + ctg\,\frac{x+\pi}{2}\right\}$$

und zerlegen jede der beiden ctg auf der rechten Seite mit Hülfe derselben Funktionalgleichung (I.) in die Summe zweier neuen, also:

$$ctg\, x = \frac{1}{4}\left\{ctg\,\frac{x}{4} + ctg\,\frac{x+\pi}{4} + ctg\,\frac{x+2\pi}{4} + ctg\,\frac{x+3\pi}{4}\right\}.$$

Wegen der Eigenschaft der Periodicität:

$$ctg\,(x-\pi) = ctg\, x$$

lässt sich die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$ctg\, x = \frac{1}{4}\left[ctg\,\frac{x}{4} + \left\{\begin{matrix} ctg\,\frac{x+\pi}{4} \\ ctg\,\frac{x-\pi}{4} \end{matrix}\right\} + ctg\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Die in gleicher Weise weiter ausgeführte Zerlegung jedes ctg in die Summe zweier neuen giebt:

$$ctg\, x = \frac{1}{8}\left[ctg\frac{x}{8} + \left\{\begin{array}{l} ctg\,\frac{x+\pi}{8} + ctg\,\frac{x+2\pi}{8} + ctg\,\frac{x+3\pi}{8} \\ + ctg\,\frac{x-\pi}{8} + ctg\,\frac{x-2\pi}{8} + ctg\,\frac{x-3\pi}{8} \end{array}\right\} + ctg\left(\frac{x}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Setzt man dieselbe Operation n Mal fort, so ergiebt sich, wie leicht zu übersehen ist, die allgemeine Formel:

$$\text{(II.)}\; ctg\, x = \frac{1}{2^n}\left[ctg\frac{x}{2^n} + \sum_{1}^{2^{n-1}-1}{}_h \left\{ctg\frac{x+h\pi}{2^n} + ctg\frac{x-h\pi}{2^n}\right\} + ctg\left(\frac{x}{2^n}+\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

aus welcher, wenn wir n bis in's Unendliche wachsen lassen, die Partialbruch-Entwickelung für $ctg\, x$ hervorgeht. Das letzte Glied der auf der rechten Seite von (II.) stehenden Reihe nähert sich nämlich für $n = \infty$ dem Grenzwerthe 0 und dasselbe gilt auch für die letzten Glieder in den beiden Summen

$$\frac{1}{2^n}\sum_{1}^{2^{n-1}-1}{}_h\, ctg\left(\frac{x \pm h\pi}{2^n}\right)$$

während mit wachsendem n zugleich die Anzahl der Glieder dieser Reihen fort und fort wächst; für jeden endlichen Zahlenwerth k wird aber

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n}\, ctg\left(\frac{x \pm k\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{x \pm k\pi}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n}\, ctg\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{x}\,.$$

Denken wir uns nun eine vorerst endliche Zahl k so gross, dass $2k > x$ ist, dann dürfen wir schreiben:

$$ctg\, x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{k}{}_h\left(\frac{1}{x+h\pi} + \frac{1}{x-h\pi}\right) + R_k$$

wo

$$R_k = \lim_{n=\infty} \sum_{k+1}^{2^{n-1}-1}{}_h\, \frac{1}{2^n}\left\{ctg\left(\frac{x+h\pi}{2^n}\right) + ctg\left(\frac{x-h\pi}{2^n}\right)\right\}$$

bedeutet und es bleibt zu untersuchen, was aus R_k wird, wenn mit n auch k in's Unendliche wächst, so aber, dass k nur bis $2^{n-1}-1$ geht, d. h. $\frac{k}{2^{n-1}-1}$ immer noch unter 1 liegt.

Das allgemeine Glied der Summe für R_k lässt sich mit Hülfe der trigonometrischen Formel:

$$ctg\,(a+b) + ctg\,(a-b) = \frac{\sin 2a}{\sin^2 a - \sin^2 b}$$

so umformen:

$$\frac{2x\left(\frac{2^{n-1}}{x}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{x^2\left(\frac{2^n}{x}\sin\frac{x}{2^n}\right)^2 - h^2\pi^2\left(\frac{2^n}{h\pi}\cdot\sin\frac{h\pi}{2^n}\right)^2}$$

und hiernach wird:

$$-R_k = 2x\lim_{n=\infty}\sum_{k+1}^{2^{n-1}-1}{}_h \frac{1}{h^2\pi^2\left(\frac{2^n}{h\pi}\sin\frac{h\pi}{2^n}\right)^2 - x^2}$$

Hier hat der Faktor $\frac{2^n}{h\pi}\cdot\sin\left(\frac{h\pi}{2^n}\right)$ einen Werth, der zwischen 1 und $\frac{2}{\pi}$ liegt, da h nur Werthe bis $2^{n-1}-1$ annehmen kann; ist daher k so gross gewählt, dass $2k > x$, so werden alle Glieder der Summe

$$\sum_{k+1}^{2^{n-1}-1}{}_h \frac{1}{h^2\pi^2\left(\frac{2^n}{h\pi}\cdot\sin\frac{h\pi}{2^n}\right)^2 - x^2}$$

positiv sein und unter den entsprechenden Gliedern der Reihe

$$\sum_{k+1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4h^2 - x^2}$$

liegen; von dieser ist aber das Anfangsglied das grösste und die Anzahl $= 2^{n-1}-1-k$, folglich liegt der Werth dieser Summe unter

$$\frac{2^{n-1}-1-k}{4k^2-x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2^{n-1}-1}\left\{\frac{1-\frac{k}{2^{n-1}-1}}{4\left(\frac{k}{2^{n-1}-1}\right)^2 - \left(\frac{x}{2^{n-1}-1}\right)^2}\right\}.$$

Lassen wir nun n und k gleichzeitig bis in's Unendliche wachsen, so aber, dass $\frac{k}{2^{n-1}-1}$ unter 1 liegt, dann wird der in Parenthese stehende Faktor des letzten Ausdrucks endlich bleiben und der andere Faktor $\frac{1}{2^{n-1}-1}$ bis zur 0 abnehmen; der Werth von R_k wird also auch mit wachsendem k sich der Null nähern und wir erhalten die Entwickelung:

$$ctg\, x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty}{}^{h} \left(\frac{1}{x + h\pi} + \frac{1}{x - h\pi} \right) \text{ oder}$$

(III.) $$ctg\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} \frac{1}{h\pi + x}.$$

Aus dieser folgt nun vermittelst der bekannten trigonometrischen Formel:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left\{ ctg \frac{x}{2} - ctg \frac{x + \pi}{2} \right\}$$

die Entwickelung für

(IV.) $$cosec\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{h\pi + x}$$

und endlich die Partialbruchentwickelungen für

(V.) $$tg\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(h + \frac{1}{2})\pi - x}$$

(VI.) $$sec\, x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{(h + \frac{1}{2})\pi + x}.$$

Um zu den Produkt-Entwickelungen für die trigonometrischen Funktionen zu gelangen, kann man sich in ähnlicher Weise der bekannten Formel:

(VII.) $$\sin x = 2 \,.\, \sin \frac{x}{2} \,.\, \sin \frac{x + \pi}{2}$$

bedienen, indem man jeden der beiden Faktoren auf der rechten Seite dieser Gleichung vermittelst derselben Relation in zwei neue Faktoren auflöst und so beliebig weit fortfährt; um indessen den unbequemen Faktor 2, welcher sich dabei wiederholt, zu eliminiren, fassen wir lieber den Quotienten zweier *sin* Funktionen auf:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x + \pi}{2}}{\sin \frac{y + \pi}{2}}$$

und setzen diese Gleichung in der angegebenen Weise fort; dann ist leicht zu übersehen, dass wir folgende allgemeine Formel erhalten:

(VIII.) $$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{y}{2^n}} \cdot \prod_{1}^{2^{n-1}-1}{}^{h} \left\{ \frac{\sin \frac{x + h\pi}{2^n} \cdot \sin \frac{x - h\pi}{2^n}}{\sin \frac{y + h\pi}{2^n} \cdot \sin \frac{y - h\pi}{2^n}} \right\} \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{2^n} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{y}{2^n} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

wo das Produktzeichen Π die bekannte Bedeutung hat.

Aus dieser Formel folgt, wenn wir n bis in's Unendliche wachsen lassen, die Produkt-Entwickelung für $\frac{\sin x}{\sin y}$; der letzte Faktor nähert sich nämlich für $n=\infty$ dem Grenzwerthe 1 und dasselbe gilt für die letzten Faktoren, welche unter dem Produktzeichen stehen, während mit wachsendem n zugleich die Anzahl der Faktoren dieses Produktes fort und fort wächst; der erste Faktor hat aber zum Grenzwerthe

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{y}{2^n}} = \frac{x}{y}$$

und für jeden endlichen Zahlenwerth k wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin\left(\frac{x+k\pi}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{y+k\pi}{2^n}\right)} = \frac{x+k\pi}{y+k\pi}.$$

Nehmen wir daher vorerst eine endliche gehörig gross gewählte Zahl k, so zerfällt das obige Produkt in (VIII.) in zwei Theile, die wir so schreiben können:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{x}{y} \prod_1^k {}^{h} \left\{\frac{x+h\pi}{y+h\pi} \cdot \frac{x-h\pi}{y-h\pi}\right\} \cdot P_k$$

wo

$$P_k = \lim_{n=\infty} \prod_{k+1}^{2^{n-1}-1} {}^{h} \left\{\frac{\sin \frac{x+h\pi}{2^n} \cdot \sin \frac{x-h\pi}{2^n}}{\sin \frac{y+h\pi}{2^n} \cdot \sin \frac{y-h\pi}{2^n}}\right\}$$

bedeutet, und es bleibt zu untersuchen, was aus P_k wird, wenn mit n auch k bis in's Unendliche wächst, so jedoch, dass k immer unter $2^{n-1}-1$ bleibt, also $\frac{2^{n-1}-1}{k}$ ein ächter Bruch ist.

Das allgemeine Glied des Produktes P_k lässt folgende Umformung zu:

$$\frac{1 - \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2^n}}{\sin^2 \frac{h\pi}{2^n}}}{1 - \dfrac{\sin^2 \frac{y}{2^n}}{\sin^2 \frac{h\pi}{2^n}}}$$

und dieselbe Betrachtungsweise, welche Schlömilch (Handbuch der algebraischen Analysis, 1862, Seite 196 ff.) über die einzelnen im Zähler

und Nenner auftretenden Produkte angestellt hat und welche hier zu wiederholen unnöthig erscheint, führt für ein gehörig gewähltes k zu dem Werthe von

$$P_k = \frac{1 - \frac{\mu x^2}{4k}}{1 - \frac{\nu y^2}{4k}}$$

wo μ und ν nicht näher bestimmte positive ächte Brüche bezeichnen; gehen wir nun zur Grenze über, indem wir auch k bis in's Unendliche wachsen lassen, so nähert sich P_k dem Grenzwerth 1 und wir erhalten die Produkt-Entwickelung für:

$$\text{(IX.)} \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{x}{y} \prod_1^\infty {}^h \frac{x + h\pi}{y + h\pi} \cdot \frac{x - h\pi}{y - h\pi}$$

woraus denn für $y = 0$ folgt:

$$\text{(X.)} \qquad \sin x = x \cdot \prod_1^\infty {}^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2\pi^2}\right)$$

und wenn wir in IX. $y = 0$ und statt x setzen $x + \frac{\pi}{2}$:

$$\cos x = \prod_1^\infty {}^h \left(1 - \frac{4x^2}{(2h-1)^2\pi^2}\right).$$

XII. Zwei Sätze aus der Theorie der binären quadratischen Formen.

In seiner Inauguraldissertation „*de aequationibus secundi gradus indeterminatis*" leitet Göpel aus der Kettenbruch-Entwickelung der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen interessante Sätze über gewisse Darstellungen der Form $x^2 - Dy^2$ ab, wenn D eine Primzahl von den Formen $8n + 3$, $8n + 7$ oder das Doppelte einer solchen ist.

Jacobi theilt den Inhalt dieser Arbeit im 35. Bande des Crelle'schen Journals in einer Notiz über Göpel mit, auf welche ich hier verweisen muss, da das obengenannte Schriftchen schwerlich im Buchhandel aufgefunden werden dürfte.

Es soll hier gezeigt werden, wie sich diese Sätze einfach und ohne Hülfe der Kettenbrüche nachweisen lassen und dabei gewisse Beschränkungen verlieren, welche ihnen bei jener Methode anhaften. Wir beweisen zu dem Ende die folgenden Sätze I. u. II., in denen, wie sich jeder überzeugen kann, die entsprechenden Sätze Göpels enthalten sind.

I. Ist $D = p$ oder $D = 2p$ und p eine Primzahl $8n + 3$ und bezeichnet man mit φ, ψ eine von denjenigen Darstellungen der Zahl D in der Form $D = \varphi^2 + 2\psi^2$, in welchen $\psi \equiv 1$ *mod.* 4 wenn $D = p$, und $\psi \equiv 1$ oder $\equiv 3$ *mod.* 8 wenn $D = 2p$, so ist die Form: $(-2\psi, \varphi, \psi)$ äquivalent der Form $(1, 0, -D)$.

Beweis. Wir stützen uns auf einen Satz des Legendre, welcher unter anderm in seiner „*Théorie des nombres, tome I* §. VII" gefunden werden kann, nach welchem die Zahl -2 stets darstellbar ist in der Form: (1) $-2 = s^2 - Dt^2$, wenn D die in unserem Theorem verlangten Bedeutungen hat.

Die Form (Dt, s, t), welche aus jenen Zahlen s, t gewonnen wird, hat nach (1) den Determinanten -2 und ist daher, nach einem bekannten Satze der Theorie der quadratischen Formen, der Form $(1,0,-2)$ äquivalent.

Ist also $\begin{vmatrix} \alpha, \gamma \\ \beta, \delta \end{vmatrix}$ eine Substitution, durch welche letztere Form in die erste übergeht, so hat man:

$$Dt = \alpha^2 + 2\beta^2, \quad s = \alpha\gamma + 2\beta\delta, \quad t = \gamma^2 + 2\delta^2. \qquad (2)$$

Wir behaupten nun, dass die Substitution $\begin{vmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{vmatrix}$, welche aus jener durch Vertauschung der Stellen von β und γ entsteht, die Form $(1,0,-D)$ in eine von den beiden Formen: $(-2\psi, \varphi, \psi)$, $(-2\psi, -\varphi, \psi)$ überführt.

Denn bezeichnet man die transformirte Form mit (a, b, c) so ist:

$$a = \alpha^2 - D\gamma^2, \quad b = \alpha\beta - D\gamma\delta, \quad c = \beta^2 - D\delta^2 \qquad (3)$$

und man findet, wegen (2), dass:

$$a = -2c; \qquad (4)$$

im Falle $D = p$ ist b ungerade, c ungerade und:

$$c = \beta^2 - D\delta^2 \equiv \beta^2 + \delta^2 \equiv 1 \; mod. \; 4$$

im Falle $D = 2p$ ist b gerade, c ungerade und:

$$c \equiv \beta^2 + 2\delta^2 \equiv 1 \text{ oder } \equiv 3 \; mod. \; 8.$$

Da nun $D = b^2 - ac$, so folgt aus (4):

$$D = b^2 + 2c^2.$$

Hieraus sieht man, dass b, c eine von den im Theoreme gemeinten Darstellungen φ, ψ ist, und dass, da ausser der Darstellung φ, ψ nur noch die Darstellung $-\varphi, \psi$ existirt: $b = \pm \varphi$, $c = \psi$.

Es ist also die Form $(1, 0, -D)$ stets einer von den Formen:

$$(-2\psi, \varphi, \psi), \quad (-2\psi, -\varphi, \psi) \text{ äquivalent,}$$

woraus, wegen der Aequivalenz beider, die Richtigkeit des Satzes folgt.

II. Ist $D = p$ oder $= 2p$ und p eine Primzahl $8n + 7$, und bezeichnet man mit φ, ψ irgend eine von den unendlich vielen Darstellungen der Zahl D in der Form:

$D = \varphi^2 - 2\psi^2$, in welchen: $\psi \equiv 1 \; mod. \; 4$ wenn $D = p$, $\psi \equiv 1$ oder $\equiv 3 \; mod. \; 8$ wenn $D = 2p$, so ist die Form $(2\psi, \varphi, \psi)$ stets äquivalent der Form $(1, 0, -D)$.

Beweis. Hier ist nach derselben Quelle, welche wir im Beweise von I. angeführt, die Zahl $+2$ stets darstellbar in der Form:

$$+2 = s^2 - Dt^2.$$

Die Form (Dt, s, t) hat den Determinanten 2 und ist, der Theorie der quadratischen Formen gemäss, äquivalent der Form $(1, 0, -2)$.

Bezeichnen wir nun eine Substitution, durch welche letztere Form in erstere übergeht, mit $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$, so findet man, ähnlich wie in dem Beweise von I., dass die Form $(1,0,-D)$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ in eine Form (a, b, c) übergeht, in welcher: $a = 2c$, und wo ausserdem c den Congruenzbedingungen von ψ genügt.

Da nun: $D = bb - 2cc$, so folgt hieraus zunächst, dass es eine Darstellung $b = \varphi_0$, $c = \psi_0$ der Zahl D in der Form: $D = \varphi\varphi - 2\psi\psi$ giebt, so dass die Formen $(1, 0, -D)$ und $(2\psi_0, \varphi_0, \psi_0)$ äquivalent sind.

Die übrigen Darstellungen φ, ψ gehen aber, wie man aus der Theorie der quadratischen Formen des Determinanten 2 sieht, aus einer $\varphi_0\ \psi_0$ vermittelst der Formeln: $\varphi = \pm \varphi_0 u + 2v\psi_0$, $\psi = \psi_0 u \pm \varphi_0 v$ (1) hervor, in welchen u, v eine Lösung der Gleichung:

$$u^2 - 2v^2 = 1$$

bedeutet, bei welcher u positiv ist.

Die Zahlen u, v sind ihrerseits in den Formen enthalten:

$$u = \omega^2 + 2\eta^2, \qquad v = 2\omega\eta,$$

wo unter ω, η eine Lösung einer der beiden Gleichungen:

$$\omega^2 - 2\eta^2 = 1, \qquad \omega^2 - 2\eta^2 = -1$$

zu denken ist.

Man überzeugt sich nun leicht, dass die Form $(1, 0, -D)$ durch die Substitution $\begin{vmatrix} \pm\alpha\omega + 2\beta\eta, & \pm\alpha\eta + \beta\omega \\ \pm\gamma\omega + 2\delta\eta, & \pm\gamma\eta + \delta\omega \end{vmatrix}$ in $(2\psi, \varphi, \psi)$ übergeht, wenn das Zeichen $\pm$ in derselben mit dem Zeichen $\pm$ in den Formeln (1) übereinstimmend genommen wird.

Berlin, im April 1868. GEORG CANTOR.

XIII. Ueber die Bedingungen, dass vier Punkte auf einem Kreise und fünf Punkte auf einer Kugelfläche liegen. Liegen die vier Punkte (a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkte (x, y), so finden die Gleichungen statt:

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r^2, \quad (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r^2, \quad (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = r^2,$$

oder:

$$a_0^2 + b_0^2 - 2a_0 x - 2b_0 y + x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$a_3^2 + b_3^2 - 2a_3 x - 2b_3 y + x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Durch Elimination von $-2x$, $-2y$, $x^2+y^2-r^2$ zwischen den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$1)\quad \begin{vmatrix} a_0^2+b_0^2, & a_0, & b_0, & 1 \\ a_1^2+b_1^2, & a_1, & b_1, & 1 \\ a_2^2+b_2^2, & a_2, & b_2, & 1 \\ a_3^2+b_3^2, & a_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vertauscht man in der Determinante die erste mit der vierten Verticalreihe, multiplicirt die zweite und dritte Verticalreihe mit -2, so ist auch:

$$2)\quad \begin{vmatrix} 1, & -2a_0, & -2b_0, & a_0^2+b_0^2 \\ 1, & -2a_1, & -2b_1, & a_1^2+b_1^2 \\ 1, & -2a_2, & -2b_2, & a_2^2+b_2^2 \\ 1, & -2a_3, & -2b_3, & a_3^2+b_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man: $(a_r-a_s)^2+(b_r-b_s)^2 = p^2_{r,s} = p^2_{s,r}$, so ergiebt das Produkt der Gleichungen 1) und 2):

$$3)\quad \begin{vmatrix} 0, & p_{0,1}^2, & p_{0,2}^2, & p_{0,3}^2 \\ p_{0,1}^2, & 0, & p_{1,2}^2, & p_{1,3}^2 \\ p_{0,2}^2, & p_{1,2}^2, & 0, & p_{2,3}^2 \\ p_{0,3}^2, & p_{1,3}^2, & p_{2,3}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante entwickelt giebt:

$$(p_{0,1}\,p_{2,3})^4+(p_{0,2}\,p_{1,3})^4+(p_{0,3}\,p_{1,2})^4-2(p_{0,1}\,p_{2,3})^2\,(p_{0,3}\,p_{1,2})^2$$
$$-2(p_{0,1}\,p_{2,3})^2\,(p_{0,2}\,p_{1,3})^2-2(p_{0,3}\,p_{1,2})^2\,(p_{0,2}\,p_{1,3})^2=0,$$

oder:

$$(p_{0,1}\,p_{2,3}+p_{0,2}\,p_{1,3}+p_{0,3}\,p_{1,2})\,(-p_{0,1}\,p_{2,3}+p_{0,2}\,p_{1,3}+p_{0,3}\,p_{1,2})\times$$
$$(p_{0,1}\,p_{2,3}-p_{0,2}\,p_{1,3}+p_{0,3}\,p_{1,2})\,(p_{0,1}\,p_{2,3}+p_{0,2}\,p_{1,3}-p_{0,3}\,p_{1,2})=0.$$

Diese Gleichung enthält ein bekanntes geometrisches Resultat, da $p_{r,s}$ die Länge der Verbindungslinie der Punkte (a_r, b_r) und (a_s, b_s) ist.

Sollen die fünf Punkte $(a_0, b_0, c_0) \ldots\ldots (a_4, b_4, c_4)$ auf einer Kugelfläche liegen, setzt man: $(a_r-a_s)^2+(b_r-b_s)^2+(c_r-c_s)^2=p^2_{r,s}$, so erhält man auf ganz analoge Weise wie vorhin:

$$4)\quad \begin{vmatrix} 0, & p_{0,1}^2, & p_{0,2}^2, & p_{0,3}^2, & p_{0,4}^2 \\ p_{0,1}^2, & 0, & p_{1,2}^2, & p_{1,3}^2, & p_{1,4}^2 \\ p_{0,2}^2, & p_{1,2}^2, & 0, & p_{2,3}^2, & p_{2,4}^2 \\ p_{0,3}^2, & p_{1,3}^2, & p_{2,3}^2, & 0, & p_{3,4}^2 \\ p_{0,4}^2, & p_{1,4}^2, & p_{2,4}^2, & p_{3,4}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung dieser Determinante führt zu keinem einfachen Resultate. Man bemerkt leicht, dass die Gleichungen 1) und 2) Folge der Gleichung 3) sind, so dass also die Gleichungen 3) und 4) für die angenommenen Werthe von $p_{r,s}$ eine einfache geometrische Deutung zulassen. Das angewandte Verfahren lässt sich ohne Schwierigkeit auf ein entsprechendes System von $n+1$ Gleichungen mit n Unbekannten ausdehnen.

Göttingen. Dr. Enneper.

XIV. Ueber eine gewisse Classe von Curven dritten Grades. 1. Es seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks, l, m, n drei durch dieselben gehende, sich in einem Punkte schneidende gerade Linien; ferner seien L, M, N diejenigen geraden Linien, welche mit den Linien l, m, n die Winkel des Dreiecks harmonisch theilen. Alsdann gehen die sechs Linien L, M, N, l, m, n viermal zu je dreien durch einen Punkt.

Diejenigen Curven dritten Grades nun, welche durch die vier so erhaltenen Punkte P, P_1, P_2, P_3, und durch die Eckpunkte des Dreiecks gehen, besitzen eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften, so dass eine nähere Betrachtung derselben nicht ganz ohne Interesse sein dürfte.

Bei der Betrachtung der Curven wählen wir die drei Punkte A, B, C zu Fundamentalpunkten eines Systems von Dreiliniencoordinaten, und setzen voraus, dass die Coordinaten der vier Punkte P durch die Gleichungen

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = -\frac{\gamma}{c}$$

$$\frac{\alpha}{a} = -\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

$$-\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

gegeben seien. Alsdann ergiebt eine leichte Rechnung als die allgemeinste Gleichung einer Curve dritten Grades, welche durch die Fundamentalpunkte und durch die vier Punkte P geht:

$$1)\quad A\alpha\,(c^2\beta^2 - b^2\gamma^2) + B\beta\,(a^2\gamma^2 - c^2\alpha^2) + C\gamma\,(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0.$$

Die Gleichungen der drei Tangenten, welche an diese Curve in den drei Fundamentalpunkten gelegt werden können, sind sodann:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{B\beta}{b^2} = \dfrac{C\gamma}{c^2} \\[2mm] \dfrac{C\gamma}{c^2} = \dfrac{A\alpha}{a^2} \\[2mm] \dfrac{A\alpha}{a^2} = \dfrac{B\beta}{b^2} \end{cases}$$

Diese drei Tangenten gehen durch einen und denselben Punkt, dessen Coordinaten durch die Gleichung

$$3)\quad \frac{A\alpha}{a^2} = \frac{B\beta}{b^2} = \frac{C\gamma}{c^2}$$

gegeben werden, und der ausserdem ein Punkt der Curve ist, weil durch Erfüllung der Bedingungen in 3) auch der Gleichung 1) genügt wird.

Ferner ergeben sich als Gleichungen der Tangenten, welche man in den vier Punkten P an die Curve legen kann:

$$4)\quad \begin{cases} \alpha(Cb-Bc)+\beta(Ac-Ca)+\gamma(Ba-Ab)=0 \\ \alpha(Cb+Bc)-\beta(Ac+Ca)+\gamma(Ba-Ab)=0 \\ -\alpha(Cb+Bc)+\beta(Ac-Ca)+\gamma(Ba+Ab)=0 \\ \alpha(Cb-Bc)+\beta(Ac+Ca)-\gamma(Ba+Ab)=0. \end{cases}$$

Auch diese vier Tangenten gehen durch einen und denselben Punkt, welcher überdiess in der Curve liegt, und dessen Coordinaten bestimmt werden durch:

$$5)\quad \frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C}\,.$$

Die in diesem Punkte an die Curve gelegte Tangente hat die Gleichung:

$$6)\quad A\alpha(C^2b^2-B^2c^2)+B\beta(A^2c^2-C^2a^2)+C\gamma(B^2a^2-A^2b^2)=0.$$

Dieser Gleichung wird aber durch die Coordinaten des Punktes 3) Genüge geleistet. Daher schneiden sich im Punkte 3) die Tangenten, welche an die Curve in den drei Fundamentalpunkten und im Punkte 5) gelegt worden sind; im Punkte 5) dagegen treffen sich die vier in den Punkten P an die Curve gelegten Tangenten.

Die drei Seiten des Fundamentaldreiecks treffen die Curve ausser in den Ecken A, B, C noch in drei Punkten D, E, F. Die Coordinaten derselben werden bestimmt durch je zwei der folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \alpha=0,\ \dfrac{\beta}{B}=\dfrac{\gamma}{C}\,. \\ \beta=0,\ \dfrac{\gamma}{C}=\dfrac{\alpha}{A} \\ \gamma=0,\ \dfrac{\alpha}{A}=\dfrac{\beta}{B}\,. \end{cases}$$

Die Vergleichung von 7) mit 5) zeigt, dass der Punkt, in welchem eine Seite des Fundamentaldreieckes der Curve fernerhin begegnet, in gerader Linie liegt mit dem gegenüberliegenden Scheitel und dem Punkt 5).

Die Tangenten, die man in den drei eben erwähnten Punkten an die Curve legen kann, haben die Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} A\alpha\,(B^2c^2-C^2b^2)+a^2BC\,(B\gamma-C\beta)=0. \\ B\beta\,(C^2a^2-A^2c^2)+b^2CA\,(C\alpha-A\gamma)=0 \\ C\gamma\,(A^2b^2-B^2a^2)+c^2AB\,(A\beta-B\alpha)=0. \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung ergiebt, dass auch diese Tangenten sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten durch die Gleichung bestimmt werden:

$$9)\ \frac{A\alpha}{a^2[A^2(B^2c^2+C^2b^2)-B^2C^2a^2]}=\frac{B\beta}{b^2[B^2(C^2a^2+A^2c^2)-C^2A^2b^2]}$$
$$=\frac{C\gamma}{c^2[C^2(A^2b^2+B^2a^2)-A^2B^2c^2]}.$$

Auch dieser Punkt liegt in der Curve und durch ihn geht zugleich die im Punkte 3) an die Curve gelegte Tangente, deren allgemeine Gleichung ist:

$$10)\ A^3b^2c^2(C^2-B^2)\alpha+B^3c^2a^2(A^2-C^2)\beta+C^3a^2b^2(B^2-A^2)\gamma=0,$$

denn diese Gleichung wird zur Identität, sobald man setzt:

$$A\alpha=ka^2\,[A^2(B^2c^2+C^2b^2)-B^2C^2a^2]\ \text{u. s. w.}$$

Auch die vier Kegelschnitte, welche man durch die Fundamentalpunkte so legen kann, dass sie die Curve in einem der Punkte P berühren, schneiden sich in einem Punkte und zwar im Punkte 3); dagegen geht der Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht und die Curve im Punkte 3) berührt, durch den Punkt 5).

Ebenso treffen sich drei Kegelschnitte, welche durch die Fundamentalpunkte gehen und die Curve in einem derselben osculiren, in einem Punkt, dessen Coordinaten der Gleichung genügen:

$$11)\ \frac{\alpha}{A}[A^2(B^2c^2+C^2b^2)-B^2C^2a^2]=\frac{\beta}{B}[B^2(C^2a^2+A^2c^2)-C^2A^2b^2]$$
$$=\frac{\gamma}{C}[C^2(A^2b^2+B^2a^2)-A^2B^2c^2].$$

Durch eben denselben Punkt geht auch der Kegelschnitt, welcher durch die drei Fundamentalpunkte geht und die Curve im Punkte 5) tangirt.

2. Eine der wichtigsten Eigenschaften der betrachteten Curven ist die, dass ihre Gleichung nicht nur auf eine Weise auf die Form 1) gebracht werden kann. Bezieht man nämlich die Gleichung auf ein Fundamentaldreieck, dessen Ecken in D, E, F liegen, d. i. in den Punkten, wo die Seiten des früheren Fundamentaldreiecks der Curve nochmals begegnen, so bleibt die Form der Gleichung ganz dieselbe, wie vorher, nur die Coefficienten ändern sich. Die früheren Punkte P werden hier ersetzt durch die Punkte A, B, C und durch den Punkt 5), denn die einfachste Betrachtung ergiebt, dass die sechs Linien, welche diese vier Punkte unter einander verbinden, zu je zweien durch die Punkte D, E, F gehen und dass die zwei durch eine und dieselbe Ecke gehenden Linien den zugehörigen Winkel des Dreiecks D, E, F harmonisch theilen. Bei dieser Transformation geht der frühere Punkt 3) über in den Punkt 9), der Punkt 5) dagegen in den Punkt 3).

Diese Transformation kann aber beliebig oft wiederholt werden,

indem man z. B. die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks D, E, F der Curve fernerhin begegnen, als Eckpunkte eines neuen Fundamentaldreiecks wählet. Es folgt somit, dass, sobald die Gleichung einer Curve dritten Grades einmal auf die Form 1) gebracht werden kann, diess auf unzählig viele Weisen geschehen kann.

3. Von den hier betrachteten Curven sind als specielle Fälle diejenigen Curven dritten Grades zu bemerken, welche durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks und durch die Mittelpunkte der vier die Seiten dieses Dreiecks berührenden Kreise gehen. Die Gleichungen dieser Curven sind einfacher:

$$A\alpha(\beta^2-\gamma^2)+B\beta(\gamma^2-\alpha^2)+C\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0.$$

Wenn in der Gleichung 1) einer der Coefficienten A, B oder C verschwindet, so berührt die Curve zwei Seiten des Fundamentaldreiecks. Ist z. B. $C=0$, so berührt die Curve die Seite AC im Punkte A und BC im Punkte B.

Wenn dagegen der Quotient aus zwei der Coefficienten A, B, C in 1) gleich ist dem positiven oder negativen Quotienten der entsprechenden Coefficienten a, b, c, wenn also z. B.

$$\frac{A}{B}=\pm\frac{a}{b},$$

so zerfällt die Curve in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt. Die gerade Linie ist dabei einer der beiden durch den Punkt C gehenden, oben erwähnten harmonischen Strahlen.

Unter dieser Voraussetzung ergeben sich aus den oben aufgestellten Sätzen sehr leicht als specielle Fälle die folgenden:

Es seien A und B zwei Punkte eines Kegelschnittes, C ein beliebiger ausserhalb desselben gelegner Punkt. Die Verbindungslinie des Punktes C mit dem Punkte, in welchem die Polare von C die Sehne AB schneidet, begegne dem Kegelschnitt in P und P_1. Alsdann schneiden sich in einer Linie, welcher der vierte harmonische Strahl zu AC, PC und BC ist:

1) die in A und B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten;

2) die Tangenten des Kegelschnittes in P und P_1;

3) die Tangenten in den Punkten, in welchen die Seiten AC und BC vom Kegelschnitt nochmals getroffen werden;

4) die Kegelschnitte, welche durch die drei Punkte A, B, C gehen und den gegebenen Kegelschnitt in einem der Punkte P oder P_1 berühren;

5) die Kegelschnitte, welche durch A, B und C gehen und den gegebenen Kegelschnitt in einem der Punkte A oder B osculiren.

Reichenbach i/V. F. E. Eckardt.

IX.

Die projectivischen Eigenschaften der gewöhnlichen und ausgezeichneten Elemente ebener Curven.

Von

PAUL SCHOLZ

aus Krotoschin in Posen.

Erster Abschnitt.

Gerade Punktreihen und ebene Strahlbüschel in perspectivischer Lage.

§. 1. Voraussetzungen.

1 *a*) Die Begriffe Punkt, gerade Linie, Ebene nehmen wir als durch die Anschauung bekannt an; insbesondere setzen wir voraus, dass wir uns jede Gerade als Träger einer stetigen Punktreihe und als Axe eines Ebenenbüschels, jeden Punkt als Mittelpunkt eines ebenen Strahlbüschels und jede Ebene als Träger unendlich vieler Punktreihen und ebener Strahlbüschel vorstellen können, dass diese Gebilde (Punktreihe, ebener Strahlbüschel, Ebenenbüschel) derart eine stetige, in sich zurückkehrende, d. i. sich schliessende*) Aufeinanderfolge ihrer Elemente (Punkt, Gerade, Ebene) darstellen, dass jedes Element nur an zwei Nachbarelemente grenzt, so dass, wenn wir eines derselben als das vorhergehende bezeichnen, nur eines das folgende sein kann, und nur zwei Möglichkeiten gegeben sind, um von jedem Element zum darauf folgenden fortschreitend die ganze Aufeinanderfolge derselben zu durchlaufen; jede dieser Möglichkeiten stellt einen Bewegungssinn dar.

b) Ein diese Gebilde (Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel) in einem bestimmten Bewegungssinne continuirlich durchlaufendes Element derselben (resp. Punkt, Strahl, Ebene) gelangt daher nicht eher wieder in die Anfangslage, von welcher es ausging, bis es die Lage aller anderen Elemente seines Gebildes eingenommen; wir sagen dann: das Element hat das Gebilde einmal durchlaufen, einen Umlauf gemacht.

---

*) v. Staudt, Geometrie der Lage No. 55, 61.

2. Es gehört zur Natur dieser Grundgebilde, dass sie jedes durch zwei seiner Elemente der Lage nach eindeutig bestimmt sind, so dass zwei Gebilde derselben Art, welche zwei Elemente gemeinschaftlich haben, mit allen ihren Elementen in einanderfallen und zwei verschiedene Gebilde derselben Art höchstens ein Element gemeinschaftlich haben können, und dass

eine Punktreihe, von welcher zwei Punkte in einer gewissen Ebene liegen, mit allen ihren Punkten in dieselbe falle,

ein ebener Strahlbüschel, von welchem zwei Strahlen in einer gegebenen Ebene liegen, ganz mit allen seinen Strahlen in derselben liege, und

eine Punktreihe, welche in zwei verschiedenen Ebenen eines Ebenenbüschels enthalten ist, in allen Ebenen desselben liegt, also mit seiner Axe zusammenfällt.

3. Durch Einführung der Bezeichnungen „unendlich entfernter Punkt", „unendlich entfernte Gerade", „unendlich entfernte Ebene" sind wir in den Stand gesetzt, den Satz auszusprechen:

a) dass zwei von einander verschiedene Punktreihen derselben Ebene stets einen Punkt, zwei Strahlbüschel derselben Ebene stets einen Strahl, zwei Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem Punkte schneiden, stets eine Ebene gemeinschaftlich haben;

b) dass jede endliche Gerade einen und nur einen unendlich entfernten Punkt, jede endliche Ebene eine und nur eine unendlich entfernte Gerade enthält und alle unendlich entfernten Punkte und Geraden in einer Ebene, der unendlich entfernten Ebene liegen.

4. Die in diesem Paragraphen angeführten Sätze bilden wesentlich die Grundlage jeder geometrischen Untersuchung, in etwas anderer Ausdrucksweise auch der elementaren und analytischen Methoden und sind von den namhaftesten Mathematikern entweder als aus der Anschauung geschöpfte und nicht zu widerlegende Grundsätze erklärt, oder stillschweigend durch Anwendung anerkannt, oder in ihrem Zusammenhange veranschaulicht worden*). Wir führen sie nur deshalb an, weil wir lediglich durch Anwendung dieser wenigen Fundamentalsätze die Resultate zu erschliessen gedenken, welche den Gegenstand dieser Abhandlung bis No. 43 incl. bilden; in No. 44 entnehmen wir der Anschauung eine neue Voraussetzung, mit welcher im Verein sie die Grundlage auch für die folgenden Untersuchungen sind. Denn wiewohl wir unsere Untersuchung so zu führen gedenken, dass die abzuleitenden Sätze sich rein aus der Anschauung ergeben, so wollen wir doch jedesmal zeigen, dass dieselben eine noth-

---

*) Vergl. Steiner, Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten No. 1. 2. v. Staudt, Geometrie der Lage §§ 1 bis 3, 5 und 6. Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte §§. 1 bis 4. Reye, Geometrie der Lage, Vortrag 1 u. 2 u. A.

wendige Folge der in diesem Paragraphen angegebenen und, wie sich aus den Citaten ergiebt, allgemein anerkannten Voraussetzungen sind und damit zugleich die Bedingungen und Grenzen der Giltigkeit der gefundenen Sätze bestimmen*).

§. 2. Beziehung der Grundgebilde auf einander. Gebilde mit unendlich entferntem Träger.

5*a*) Den Sätzen in No. 2 und 3 zufolge kann jede Punktreihe einer Ebene auch als der Inbegriff aller Strahlbüschel dieser Ebene aufgefasst werden, welche einen und denselben Strahl, nämlich den Träger der Punktreihe, gemeinschaftlich haben; jeder ebene Strahlbüschel kann als der Inbegriff aller Punktreihen dieser Ebene aufgefasst werden, welche einen und denselben Punkt, nämlich den Mittelpunkt des Strahlbüschels, gemeinschaftlich haben, und jeder Ebenenbüschel als der Inbegriff aller Strahlbüschel im Raume, welche einen Strahl, die Axe des Ebenenbüschels, gemeinschaftlich haben.

b) Liegt ein Punkt 𝔞 in einer Geraden *a*, und diese Gerade *a* in einer Ebene 𝔄, so sagen wir: der Punkt 𝔞 liege perspectivisch mit der Geraden *a* und mit der Ebene 𝔄, die Gerade *a* liege perspectivisch mit dem Punkt 𝔞 und mit der Ebene 𝔄, die Ebene 𝔄 liege perspectivisch mit dem Punkt 𝔞 und mit der Geraden *a*.

6*a*) Aus No. 3 und 5 folgt: In je zwei Gebilden (Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel) verschiedener Art, deren Träger nicht perspectivisch mit einander liegen, liegt jedes Element des einen Gebildes perspectivisch mit je einem Element des anderen Gebildes, welches sein entsprechendes heisse; je zwei auf einanderfolgende Elemente des einen Gebildes können nur zwei auf einanderfolgenden Elementen im anderen Gebilde entsprechen. Die drei Grundgebilde sind also in Bezug auf ihre in No. 1 bezeichneten Elemente von gleicher Mächtigkeit, sie enthalten jedes gleich viel Elemente.

b) Wenn daher ein Element des einen Gebildes nach einander in einem und demselben Bewegungssinne die Lage aller anderen Elemente seines Gebildes einnimmt, so muss das in dem anderen Gebilde ihm entsprechende Element ebenfalls die Lage aller anderen Elemente seines Gebildes einnehmen und zwar in einem von dem Bewegungssinn des ersten abhängigen Bewegungssinne, so dass, wenn das eine den entgegengesetzten Bewegungssinn einschlägt, auch das andere den seinigen ändern muss. Dem einen

*) Dies möge zugleich als Rechtfertigung dafür dienen, dass in der Folge auch einige Sätze angeführt und bewiesen werden, welche schon von v. Staudt in seiner Geometrie der Lage und den Beiträgen zu derselben angegeben, zumal Verfasser, treu die von dem grossen Meister Steiner aufgestellte Regel befolgend, erst nachdem der Inhalt dieses Aufsatzes durch eigene Untersuchung gefunden und in seinen wesentlichen Theilen festgestellt war, sich das v. Staudt'sche Buch zu verschaffen suchte.

Bewegungssinn in irgend einem der Grundgebilde entspricht demnach in allen auf die in a) angegebene Weise perspectivisch auf dasselbe bezogenen Grundgebilden ein bestimmter Bewegungssinn, dem anderen der entgegengesetzte*).

c) Aus den Sätzen des §. 1 folgt hiernach ferner: Die sämmtlichen Strahlen eines ebenen Strahlbüschels müssen die Ebene desselben vollständig in allen ihren Punkten bedecken, so aber, dass jeder vom Mittelpunkt des Büschels verschiedene Punkt derselben stets nur durch einen einzigen Strahl und von diesem mit einem einzigen Punkte bedeckt wird; die sämmtlichen Ebenen eines Ebenenbüschels müssen den Raum vollständig in allen seinen Punkten erfüllen, so dass durch jeden seiner von der Axe des Büschels verschiedenen Punkt nur eine Ebene desselben geht.

7 a) Dass die in No. 1 ausgesprochenen Voraussetzungen auch für die Punktreihe, deren Träger die unendlich entfernte Gerade g_∞ einer Ebene ist, und für ebene Strahlbüschel, deren Mittelpunkt ein unendlich entfernter Punkt ist, gelten müssen, wenn sie für endliche Punktreihen und Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt gelten, lässt sich mit Hilfe der Grundsätze in No. 2 und 3 wie folgt beweisen:

Irgend eine endliche Gerade a kann von allen mit ihr in einer und derselben Ebene liegenden Geraden, von denen sie nicht in endlichen Punkten geschnitten wird, nur in dem einen unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{a}^\infty$ geschnitten werden, den sie nach No. 3b enthält; und alle diese Geraden bilden einen ebenen Strahlbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkt (No. 5), welchem auch a angehört. Ist b irgend eine andere endliche Gerade derselben Ebene, welche a in einem endlichen Punkte schneidet, so geht nach No. 2 und 3a durch jeden Punkt von b eine und nur eine Gerade, welche zugleich mit a den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{a}^\infty$ gemeinschaftlich hat, also ein und nur ein Strahl des Büschels $\mathfrak{a}^\infty$; wegen No. 3a giebt es aber keinen Strahl des Büschels $\mathfrak{a}^\infty$, welcher nicht einen Punkt mit b gemeinschaftlich hätte; andererseits können nach No. 2 zwei von einander verschiedene Strahlen eines ebenen Strahlbüschels $\mathfrak{s}$ mit endlichem Mittelpunkt nie denselben unendlich entfernten Punkt enthalten, und nach No. 3b giebt es keine Gerade derselben Ebene, deren unendlich entfernter Punkt, also überhaupt keinen unendlich entfernten Punkt in dieser Ebene, welcher nicht mit $\mathfrak{s}$ einen Strahl des Büschels bestimmen müsste.

b1. Die Strahlen eines ebenen Strahlbüschels mit unendlich entferntem Mittelpunkt (eines Parallelstrahlbüschels)**) folgen daher ebenso stetig auf einander, wie die Punkte einer endlichen Punktreihe und sind ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit als diese.

---

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, No. 47. Schroeter, Theorie der Kegelschnitte §. 4.

**) v. Staudt, Geometrie der Lage, No. 41.

2. Die Punkte einer unendlich entfernten Geraden, das sind die sämmtlichen unendlich entfernten Punkte einer Ebene, folgen eben so stetig auf einander, als die Strahlen eines Strahlbüschels mit endlichem Mittelpunkt und sind ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit als diese*).

3. Die Elemente eines ebenen Parallelstrahlbüschels wie die der unendlich entfernten Geraden einer Ebene bilden daher eine stetige, sich schliessende Aufeinanderfolge von der in No. 1 angegebenen Beschaffenheit, wie die Grundgebilde mit endlichen Trägern**).

c) Der Bewegungssinn eines die unendlich entfernte Punktreihe g_∞ durchlaufenden Punktes wird daher in der Hinsicht, ob er an irgend einer Stelle geändert wird oder nicht, da diese Gerade sich der Anschauung entzieht, nach dem Drehsinn des mit ihm perspectivischen Strahles eines Strahlbüschels mit endlichem Mittelpunkt, und der Bewegungssinn eines einen Parallelstrahlbüschel durchlaufenden Strahles nach dem Richtungssinn des mit ihm perspectivischen Punktes einer endlichen Punktreihe beurtheilt. Vgl. No. 4*ad*'. Die auf den Voraussetzungen des §. 1 beruhenden Folgerungen gelten daher für die unendlich entfernte Punktreihe und für Strahlbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkt in ganz gleicher Weise, wie für Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt und endliche Punktreihen.

d) Ebenso lässt sich zeigen, dass die Voraussetzungen in No 1 auch für jeden in der unendlich entfernten Ebene liegenden Strahlbüschel und für jeden Ebenenbüschel, dessen Axe eine unendlich entfernte Gerade ist, gelten, wenn sie für die entsprechenden Gebilde mit endlichen Trägern gelten; doch bedürfen wir für unsern Zweck dessen nicht, da wir uns in dieser Abhandlung überhaupt auf Gebilde beschränken, welche mit allen ihren Elementen in einer endlichen Ebene liegen, und nur da darüber hinausgehen, wo es uns darauf ankommt, zu zeigen, wie leicht diese Entwickelungen auch auf räumliche Gebilde zu übertragen sind, dass ihr Charakter also ein durchaus allgemeiner ist.

§. 8. Strecke. Winkel. Intervall.

8*a*) Die ganze Aufeinanderfolge der Punkte einer Geraden wird wegen No. 1 durch irgend zwei ihrer Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{a}^\tau$ in zwei Gruppen getheilt. Den Inbegriff aller der Elemente der Geraden, deren Lage ein in einem und demselben Bewegungssinne von $\mathfrak{a}^\lambda$ (oder von $\mathfrak{a}^\tau$) aus auf der Geraden

*) Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte 1867. S. 80.

**) v. Staudt, Geometrie der Lage, §. 5, insbesondere No. 56. Reye, Geometrie der Lage, Vortrag 2.

sich stetig bewegender Punkt einnimmt, bis er nach $\mathfrak{a}^\tau$ ($\mathfrak{a}^\lambda$) gelangt, also die sämmtlichen Punkte einer der beiden Gruppen in ihrer Aufeinanderfolge und Lage nennen wir eine durch $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{a}^\tau$ begrenzte Strecke $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)}$; jede ist die Ergänzungsstrecke der anderen*). Die Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{a}^\tau$ nennen wir die Grenzpunkte derselben.

*b*1. Durch Angabe irgend eines dritten von den Grenzpunkten verschiedenen Punktes $\mathfrak{a}^\nu$ lassen sich die beiden Strecken unterscheiden und damit die beiden Bewegungssinne, in welchen von einem der beiden Grenzpunkte ausgehend die Punkte der beiden Strecken auf einander folgen. Wir bezeichnen durch $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\nu}$ diejenige der durch $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{a}^\tau$ begrenzten Strecken der Geraden a, welche den Punkt $\mathfrak{a}^\nu$ nicht enthält, mit $\mathfrak{a}^{(\lambda\nu\tau)}$ diejenige, welche ihn enthält.

2. Sind beide, wie diese Bezeichnung angiebt, von demselben Anfangspunkt aus beschrieben zu denken, so folgen die Punkte der beiden Strecken nach No. 1 in entgegengesetztem Bewegungs- oder Richtungssinne auf einander, so dass durch die Aufeinanderfolge der Punkte $\mathfrak{a}^\lambda\, \mathfrak{a}^\tau\, \mathfrak{a}^\nu$ oder kürzer der Indices $\lambda\,\tau\,\nu$ der eine, durch die Aufeinanderfolge der Punkte $\mathfrak{a}^{\lambda\nu\tau}$ oder $\lambda\nu\tau$ der andere der beiden möglichen Bewegungssinne auf der Geraden a fixirt ist. So werden durch $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\nu}$ und $\mathfrak{a}^{(\tau\lambda)\nu}$ die Punkte derselben Strecke, aber in entgegengesetzter Aufeinanderfolge, durch $\mathfrak{a}^{(\tau\nu\lambda)}$ und $\mathfrak{a}^{(\lambda\nu\tau)}$ die Punkte der anderen Strecke in entgegengesetzter Aufeinanderfolge, durch $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\nu}$ und $\mathfrak{a}^{(\tau\nu\lambda)}$ die Punkte beider Strecken in der durch denselben Bewegungssinn bestimmten Aufeinanderfolge bezeichnet.

Demnach ist $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\infty}$ die endliche der beiden Strecken $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)}$, $\mathfrak{a}^{(\lambda\infty\tau)}$ diejenige, welche den unendlich entfernten Punkt enthält.

Auch durch die Bezeichnung $\mathfrak{a}^{(\lambda|\tau)}$ und $\mathfrak{a}^{(\lambda-\tau)}$ werden wir öfters die beiden Strecken unterscheiden. Vergl. No. 15.

*c*1. Ist einer der beiden Grenzpunkte auf einer endlichen Geraden a, etwa $\mathfrak{a}^\tau$ identisch mit dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{a}^\infty$, so nennen wir die beiden Strecken die Halbstrahlen der Geraden a in Bezug auf den Punkt $\mathfrak{a}^\lambda$, die wir entweder durch einen dritten Punkt oder durch die Bezeichnung $\mathfrak{a}^{(\lambda|\infty)}$ $\mathfrak{a}^{(\lambda-\infty)}$ unterscheiden.

2. Bewegt sich ein Punkt $\mathfrak{a}^\xi$ auf einem der Halbstrahlen von a in Bezug auf $\mathfrak{a}^\lambda$ in dem Bewegungssinne $\mathfrak{a}^{\lambda\xi\infty}$, so sagen wir: er entfernt sich von dem Punkt $\mathfrak{a}^\lambda$; bewegt er sich in dem Sinne $\mathfrak{a}^{\infty\xi\lambda} = \mathfrak{a}^{\xi\lambda\infty}$, so sagen wir: er nähert sich dem Punkt $\mathfrak{a}^\lambda$.

9*a*) Ebenso werden die sämmtlichen Strahlen s eines ebenen Strahlbüchels $\mathfrak{s}$ durch zwei derselben s_λ, s_τ, die wir die Grenzstrahlen nennen,

*) v. Staudt, Geometrie der Lage, No. 61. Reye, Geometrie der Lage 1866. S. 9.

in zwei Gruppen getheilt; die sämmtlichen Strahlen jeder der beiden Gruppen in ihrer Lage und Aufeinanderfolge von dem einen der beiden Grenzstrahlen aus nennen wir einen durch s_λ und s_τ begrenzten Winkel, nach v. Staudt's Bezeichnung einen vollkommenen Winkel $s_{(\lambda\tau)}$; ist $s_{(\lambda|\tau)}$ der eine derselben, so ist $s_{(\lambda-\tau)}$ der andere, sein Ergänzungswinkel. Ist s_ν ein dritter Strahl des Büschels, so ist $s_{(\lambda\tau)\nu}$ der eine der beiden Winkel $s_{(\lambda\tau)}$, derjenige, welcher den Strahl s_ν nicht enthält, $s_{(\lambda\nu\tau)}$ der andere, welcher den Strahl s_ν enthält.

b) Auch hier wird der Bewegungs- oder Drehsinn eines einen Winkel von einem seiner Grenzstrahlen aus beschreibenden Strahles und damit die Aufeinanderfolge der Strahlen des Winkels von einem seiner Grenzstrahlen aus durch die Reihenfolge, in welcher drei Strahlen desselben oder ihre Indices darin auftreten, fixirt, so dass z. B. die beiden durch s_λ und s_τ begrenzten Winkel, in demselben Drehsinn beschrieben, durch $s_{(\lambda\tau)\nu}$ und $s_{(\tau\nu\lambda)}$ bezeichnet werden.

c 1. Ist $\mathfrak{S}$ der Mittelpunkt des Strahlbüschels ein unendlich entfernter Punkt, so ist auch die unendlich entfernte Gerade g_∞ ein Strahl des Büschels, also wenn s_λ und s_τ endliche Strahlen desselben, $s_{(\lambda\tau)\infty}$ derjenige Winkel (Parallelstreifen), welcher die Gerade g_∞ nicht enthält, und $s_{(\lambda\infty\tau)}$ derjenige, welcher sie enthält.

2. Ist aber $\mathfrak{S}$ ein unendlich entfernter Punkt, s_λ ein endlicher Strahl des Büschels $\mathfrak{S}$, aber $s_\tau = g_\infty$, so nennen wir die entstehenden Winkel die beiden Halbebenen in Bezug auf die Gerade s_λ, welche wieder durch Angabe eines dritten Strahles s_ν oder eines endlichen Punktes $\mathfrak{a}^\nu$ unterschieden werden, so dass $s_{(\lambda\infty)\nu}$ die eine ist, welche den Strahl s_ν oder den Punkt $\mathfrak{a}^\nu$ nicht enthält, und $s_{(\lambda\nu\infty)} = s_{(\infty\nu\lambda)}$ die andere, welche s_ν oder $\mathfrak{a}^\nu$ enthält.

d) Der Inbegriff aller derjenigen Halbstrahlen der einen Winkel $s_{(\lambda\nu\tau)}$ bildenden Strahlen, welche von demselben Halbstrahl eines den Winkel von einem seiner Grenzstrahlen aus in einem und demselben Bewegungssinne einmal durchlaufenden Strahles gedeckt werden, heisst nach v. Staudt ein einfacher Winkel; der Inbegriff der übrigen Strahlen bildet den Scheitelwinkel. Von jedem Strahl eines vollkommenen Winkels liegt daher ein Halbstrahl in dem einen, der andere in dem anderen der einfachen Winkel, aus denen er besteht. Unter dem Ausdruck „Winkel" ohne das Attribut „einfach" verstehen wir immer einen vollkommenen Winkel, und zwar einen, der nur einen Theil der Strahlen des Büschels enthält.

e) Analoges wie für den Strahlbüschel lässt sich auch für den Ebenenbüschel festsetzen. Vergl. No. 7*d*.

10. Unserer Definition gemäss (No. 9*a*) liegt jeder von den Grenzstrahlen verschiedene Strahl eines Strahlbüschels, da er nach No. 5 schon

den Mittelpunkt mit den Grenzstrahlen gemeinschaftlich hat, zufolge No. 2 dieselben aber nicht noch einmal schneiden kann, in einem von denselben begrenzten Winkel ganz mit allen seinen Punkten, wenn wir wissen, dass einer seiner vom Mittelpunkt verschiedenen Punkte in diesem Winkel liegt, d. i. in dem von seinen Grenzstrahlen begrenzten und den Strahlen des Winkels bedeckten Gebiet der Ebene sich befindet.

a) Die Strahlen eines Winkels müssen daher das durch die Grenzstrahlen von der Ebene ausgeschnittene Gebiet, in welchem einer derselben liegt, ganz mit allen Punkten erfüllen und bedecken, so dass jeder Punkt desselben stets von einem und nur einem einzigen Strahl dieses Winkels und von diesem nur mit einem einzigen Punkte bedeckt wird, von dem Ergänzungswinkel aber nicht ein einziger Strahl oder Punkt eines solchen in ihm liegt.

b) Insbesondere liegt jeder Strahl eines Strahlbüschels mit unendlich entferntem Mittelpunkt ganz in einem von zwei anderen Strahlen seines Büschels gebildeten Parallelstreifen also wenn einer der beiden Grenzstrahlen die unendlich entfernte Gerade ist, ganz in einer der beiden Halbebenen in Bezug auf den anderen Grenzstrahl.

c) Ebenso muss ein Halbstrahl eines Büschels in einem von zwei anderen Halbstrahlen desselben Büschels begrenzten einfachen Winkel, in welchem einer seiner vom Mittelpunkt verschiedenen Punkte sich befindet, ganz mit allen seinen Punkten liegen.

d) Zufolge No. 2, 3 und 10 können wir den Satz aussprechen: Jede Ebene wird durch je zwei in ihr gelegener Geraden in zwei Winkel getheilt, welche dem Strahlbüschel angehören, dessen Mittelpunkt der den beiden Geraden gemeinschaftliche Punkt ist.

11 *a*) Wie bisher wollen wir auch im Folgenden irgend einen Strahl eines Strahlbüschels $\mathfrak{s}^\varrho$ durch das Zeichen s^ϱ_η, irgend einen Punkt einer geraden Punktreihe a_λ durch das Zeichen $\mathfrak{a}^\xi_\lambda$ markiren. Jeden Strahl eines Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$, also auch den das Büschel durchlaufenden Strahl wollen wir mit s^ϱ, jeden Punkt einer Punktreihe a_λ, also auch den dieselbe durchlaufenden Punkt wollen wir mit $\mathfrak{a}_\lambda$ bezeichnen. Wir werden ferner den Schnittpunkt einer Geraden a mit einem Strahl s^ϱ_η durch $\mathfrak{a}^\varrho_\eta$, den einer Geraden a_λ mit einer Geraden s_τ durch $\mathfrak{a}^\tau_\lambda$ oder $\mathfrak{s}^\lambda_\tau$ bezeichnen, die Gerade, welche die beiden Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}^\xi_\lambda$ enthält und durch dieselben bestimmt ist, mit s^ξ_λ, die Gerade, welche mit den beiden Punkten $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\tau$ perspectivisch liegt, mit a^λ_τ oder s^τ_λ.

b) Wenn wir von dem durch die Elemente λ und τ begrenzten und das Element ν enthaltenden, durch das Symbol $(\lambda\nu\tau)$ bezeichneten Intervall

eines der Grundgebilde sprechen, so verstehen wir darunter sowohl die durch die Punkte $\mathfrak{a}^{\lambda}$ und $\mathfrak{a}^{\tau}$ begrenzte, den Punkt $\mathfrak{a}^{\nu}$ enthaltende Strecke $\mathfrak{a}^{(\lambda\nu\tau)}$ einer Geraden a, als auch den durch die Strahlen s_{λ} und s_{τ} begrenzten, den Strahl s_{ν} enthaltenden Winkel $s_{(\lambda\nu\tau)}$ eines Strahlbüschels $\mathfrak{s}$, sowie den durch die Ebenen $\mathfrak{S}^{\lambda}$ und $\mathfrak{S}^{\tau}$ begrenzten, die Ebene $\mathfrak{S}^{\nu}$ enthaltenden Flächenwinkel $\mathfrak{S}^{(\lambda\nu\tau)}$ eines Ebenenbüschels s.

12 *a*) Wir können so den allgemeinen Satz aussprechen:

1. Die ganze Aufeinanderfolge der Elemente eines der bezeichneten Grundgebilde wird durch irgend zwei derselben λ, τ in zwei Gruppen getheilt; den Inbegriff aller der Elemente des Gebildes, deren Lage ein in einem und demselben Bewegungssinne von $\lambda(\tau)$ aus stetig das Gebilde durchlaufendes Element einnimmt, bis es nach $\tau(\lambda)$ gelangt, also die sämmtlichen Elemente einer der beiden erwähnten Gruppen nennen wir ein Intervall $(\lambda\tau)$ $[(\tau\lambda)]$.

2. Von demselben Grenzelement aus kann von einem laufenden Element in demselben Bewegungssinne (No. 1) immer nur dasselbe Intervall und im entgegengesetzten Bewegungssinne immer nur das Ergänzungsintervall beschrieben werden.

Hieraus und aus No. 1 folgt ferner:

3. Die beiden durch irgend zwei Elemente eines der Grundgebilde begrenzten Intervalle ergänzen sich zu dem ganzen Gebilde und schliessen einander aus, so dass kein Element des einen Intervalles zugleich dem anderen angehören kann.

b) Je ein Element des einen und ein Element des anderen der durch zwei beliebige von einander verschiedene Elemente λ und τ in einem der Grundgebilde bestimmten Intervalle sind einerseits durch das eine, folglich andererseits durch das andere Grenzelement getrennt; wir nennen so gelegene Elemente ein Elementenpaar (Punkten-, Strahlen-, Ebenenpaar) der ersten Art in Bezug auf die Grenzelemente λ und τ.

c) Je zwei Elemente eines und desselben Intervalles sind einerseits durch keines, folglich andererseits durch beide Grenzelemente getrennt; wir nennen so gelegene Elemente ein Elementenpaar (Punkten-, Strahlen-, Ebenenpaar) der zweiten Art in Bezug auf die Grenzelemente λ und τ.

d) 1. Fallen das eine Element eines Elementenpaares in einem der Grundgebilde mit einem der beiden Grenzelemente zusammen, oder
2. fallen beide mit beiden Grenzelementen oder in einem derselben zusammen, oder
3. wird eines der Elemente des Elementenpaares unbestimmt oder
4. wird eines der Grenzelemente unbestimmt,

so können wir ein solches Elementenpaar sowohl denen der ersten Art, wie denen der zweiten Art zuzählen, ausschliesslich aber weder den einen, noch den andern; ein solches Elementenpaar nennen wir ein Elementenpaar (Punkten-, Strahlen-, Ebenen-Paar) der dritten Art in zug auf die Grenzelemente λ und τ.

13 *a*) Hiernach bilden zwei unendlich nahe oder zusammenfallende, von den Grenzelementen verschiedene Elemente stets ein Elementenpaar der zweiten Art.

b) Sind die Grenzelemente zwei unendlich nahe oder zusammenfallende Elemente, so bilden je zwei von ihnen verschiedene Elemente ein Elementenpaar der zweiten Art.

c) *n* in einem und demselben oder ein- oder mehrmal veränderten Bewegungssinne stetig auf einanderfolgende Elemente eines der Grundgebilde, deren keines mit einem der Grenzelemente zusammenfällt, müssen zufolge No. 1 und 12*a*[1] sämmtlich in demselben Intervall liegen.

d) Bilden zwei Elemente α, $\varkappa$ eines der Grundgebilde in Bezug auf zwei andere Elemente λ, τ desselben als Grenzelemente ein Elementenpaar der ersten, zweiten oder dritten Art, so bilden die Elemente λ, τ in Bezug auf die Elemente α, $\varkappa$ als Grenzelemente ebenfalls resp. ein Elementenpaar der ersten, zweiten oder dritten Art.

§. 4. Bewegungssinn. Folgerungen.

14 *a*) Ein Bewegungssinn in einem der Grundgebilde ist eindeutig bestimmt

1. durch Angabe der Aufeinanderfolge irgend zweier benachbarter Elemente (No. 1);
2. durch Angabe eines Intervalles und desjenigen Grenzelementes, von welchem ausgehend ein Element dasselbe durchlaufen soll (No. 12*a*);
3. durch Angabe der Reihenfolge, in welcher beliebige drei Elemente des Gebildes auf einander folgen sollen (No. 12*a**).

b) Es wird derselbe Bewegungssinn bestimmt, wenn statt eines der drei Elemente irgend ein anderes mit ihm in demselben der von den beiden anderen Elementen bestimmten Intervalle befindliches Element gesetzt wird (No. 12*a*[2], 14*a*[2]).

c) Verändern daher die drei Elemente ihre Lage, so dass jedes stets in demselben der von den beiden anderen bestimmten Intervalle bleibt, so bezeichnen sie in jeder Lage denselben Bewegungssinn; fallen zwei derselben zusammen, so wird die Be-

---

*) Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte, 1867, §. 4. — v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, No. 47.

stimmung des Bewegungssinnes illusorisch; so oft ein Element eines der beiden anderen überschreitet, also in das andere der von denselben bestimmten Intervalle übergeht, bezeichnet dieselbe Aufeinanderfolge den dem früheren entgegengesetzten Bewegungssinn.

15. Ein in einem der Grundgebilde von der Lage λ aus in demselben Sinne Σ sich bewegendes Element desselben muss von den durch λ und ein beliebiges anderes Element τ begrenzten Intervallen zunächst das eine, durch den Bewegungssinn und den Anfangspunkt bestimmte durchlaufen, und kann nicht eher in das andere Intervall gelangen, bis es alle Elemente des ersten einmal gedeckt hat (No. 1, $12a^3$).

a) Durch jede Lage ξ des das Gebilde in einem und demselben Sinne Σ stetig durchlaufenden Elementes und ein beliebig gewähltes Element τ wird das Gebilde in zwei Intervalle getheilt, von denen das eine das im Sinne Σ folgende und daher nach No. 1, 12*a*, 15 alle die Elemente enthält, deren Lage das laufende Element einnehmen muss, bis es nach τ gelangt, während das andere das im Sinne Σ vorhergehende und alle die Elemente enthält, deren Lage das laufende Element nicht einzunehmen braucht und nicht einnehmen kann, bis es im Sinne Σ das erste Mal nach τ gelangt ist; das erstere bezeichnen wir mit $(\xi \mid \tau)$, das zweite mit $(\xi - \tau)$*).

b) Demnach bezeichnen wir mit Rücksicht auf No. 1, wenn λ das Anfangselement, mit $(\xi - \lambda)$ dasjenige Intervall, welches das laufende Element von der Lage λ aus bereits beschrieben, und mit $(\xi \mid \lambda)$ dasjenige, welches das laufende Element zu beschreiben hat, bis es wieder nach λ gelangt.

c) Dasjenige der beiden durch zwei Elemente λ, τ begrenzten Intervalle, welches das in einem gegebenen Sinne Σ auf das gewählte Anfangselement λ folgende, also auch das in demselben Sinne Σ dem Endelement τ vorhergehende Element enthält, ist demzufolge mit $(\lambda \mid \tau) = (\tau - \lambda)$ zu bezeichnen, das andere der Intervalle $(\lambda\tau)$ aber, welches das in dem Sinne Σ dem Element λ vorhergehende, also das im Sinne Σ auf das Anfangselement τ folgende Element enthält, mit $(\tau \mid \lambda) = (\lambda - \tau)$.

d) Während das laufende Element das Intervall $(\lambda \mid \tau)$ von der Anfangslage λ an stetig beschreibt, theilt es in jeder seiner Lagen dasselbe in zwei Theile $(\lambda\xi)\tau$ und $\lambda(\xi\tau)$, welche wir demgemäss resp. mit $(\xi - \lambda)$ und $(\xi \mid \tau)$ zu bezeichnen haben; der letztere Theil $(\xi \mid \tau)$ und das ganze Intervall $(\tau \mid \lambda) = (\lambda - \tau)$ bilden das Intervall $(\xi \mid \lambda)$ und gehören demselben mit allen ihren Elementen an; der erstere Theil $(\xi - \lambda)$ und das Intervall $(\lambda - \tau)$ bilden das Intervall $(\xi - \tau)$. Beschreibt das laufende Element, nachdem

---

*) Lesen können wir diese Symbole resp: ξ plus τ und ξ minus τ. Der verticale Strich ($\mid$) ist der Einfachheit wegen statt des gewöhnlichen Pluszeichens gesetzt worden.

es in die Lage τ gelangt, in gleichem Bewegungssinn das Intervall $(\tau\mid\lambda)$, so theilt es in jeder seiner Lagen dieses in zwei Theile $(\xi-\tau)=(\xi\mid\lambda)$; der erstere Theil $(\xi-\tau)$ und das ganze Intervall $(\lambda\mid\tau)=(\tau-\lambda)$ bilden mit allen ihren Elementen das Intervall $(\xi-\lambda)$, der letztere Theil $(\xi\mid\lambda)$ und das Intervall $(\lambda\mid\tau)$ bilden das Intervall $(\xi\mid\tau)$.

Während daher das laufende Element das Intervall $(\lambda\mid\tau)$ beschreibt, ist λ ein Element des Intervalles $(\xi-\tau)$; während es das Intervall $(\tau\mid\lambda)$ $=(\lambda-\tau)$ beschreibt, gehört λ dem Intervall $(\xi\mid\tau)$ an.

e) Sind demnach ξ, η zwei beliebige Lagen des laufenden Elementes, so ist stets eines der Intervalle $(\xi-\tau)$, $(\eta-\tau)$ ein Theil des anderen und eines der Intervalle $(\xi\mid\tau)$, $(\eta\mid\tau)$ ein Theil des anderen; aber die Intervalle $(\xi\mid\tau)$ und $(\eta-\tau)$, $(\xi-\tau)$ und $(\eta\mid\tau)$ haben das eine Paar kein einziges Element gemeinschaftlich, das andere nur das Intervall $(\xi\eta)\tau$.

Elemente des Intervalles $(\xi\tau\eta)$ können daher nur zwei Intervallen gemeinschaftlich sein, welche in ihrem Zeichen entweder beide den verticalen oder beide den horizontalen Strich enthalten, Elemente des Intervalles $(\xi\eta)\tau$ nur zwei Intervallen, von denen das eine den verticalen, das andere den horizontalen Strich in seinem Zeichen enthält.

f) Ferner folgt aus 15*d*: Ist ν ein Element des Intervalles $(\lambda\mid\tau)$, so ist, während das laufende Element ξ das Intervall $(\lambda\nu)\tau$ beschreibt, allen Intervallen $(\xi-\tau)$ der Theil $(\tau\lambda)\nu$, allen Intervallen $(\xi\mid\tau)$ der Theil $\lambda(\nu\tau)$ gemeinschaftlich; während ξ das Intervall $\lambda(\nu\tau)$ beschreibt, ist allen Intervallen $(\xi-\tau)$ der Theil $(\tau\lambda\nu)$ und während ξ das Intervall $\nu(\tau\lambda)$ beschreibt, ist allen Intervallen $(\xi\mid\tau)$ der Theil $(\lambda\nu\tau)$ gemeinschaftlich.

16. Aus No. 1 und 12*a* geht hervor:

a) Hat ein Element eines der Grundgebilde in demselben in einem gegebenen Bewegungssinne $\lambda\nu\tau$ ein Intervall $(\lambda\nu\tau)$ von der Lage λ an durchlaufen und bewegt es sich in demselben Sinne weiter, so beschreibt es das zweite der durch λ und τ begrenzten Intervalle $(\tau\lambda)\nu$; ändert es aber in der Lage τ den Bewegungssinn, so muss es in das erste Intervall zurückkehren.

b) Sind demnach drei aufeinanderfolgende von einander verschiedene Lagen α, β, γ eines in einem der Grundgebilde sich bewegenden Elementes so beschaffen, dass, wenn ψ irgend eines der übrigen von α, β, γ verschiedenen Elemente ist, α und γ nicht in demselben der durch ψ und β begrenzten Intervalle sich befinden, also γ nicht in $(\psi\alpha\beta)$ liegt, so folgen die drei Lagen $\alpha\beta\gamma$ in demselben Bewegungssinne auf einander, und wir nennen β ein gewöhnliches Element; befinden sich aber γ mit α in demselben Intervall, so dass $(\psi\alpha\beta)=(\psi\gamma\beta)$, so hat das sich bewegende Element in der Lage β seinen Bewegungssinn geändert, in den entgegengesetzten verwandelt; wir nennen dann β ein Rückkehrelement. Hierbei ist nicht ausgeschlossen, dass in dem Elemente β mehrere in der Bewegung des laufenden Elementes aufeinanderfolgende Lagen zusammenfallen (vereinigt sind), γ ist dann die erste von β verschiedene Lage desselben.

c) Aendert das laufende Element, nachdem es ein Intervall $(\psi|\beta)$ beschrieben, in der Lage β den Bewegungssinn und beschreibt es in dem entgegengesetzten Sinne das Intervall $(\beta-\varphi)=(\varphi|\beta)$, so ist daher entweder $(\beta-\varphi)$ ein Theil von $(\psi|\beta)$, oder $(\psi|\beta)$ ein Theil von $(\beta-\varphi)$; in dem beiden Intervallen gemeinschaftlichen Theile ist jedes Element doppelt zu zählen als dem einen und dem anderen Intervall angehörig; die Stetigkeit erfordert auch von dem Grenzelement, dem Rückkehrelement β, anzunehmen, dass in ihm zwei, nämlich zwei aufeinanderfolgende Lagen des laufenden Elementes vereinigt sind.

17. Bewegen sich daher zwei Elemente ξ, ϱ eines Grundgebildes in demselben, resp. von den Lagen λ und τ aus in demselben Bewegungssinne, so beschreibt das eine Element zunächst das eine, das andere Element zunächst das andere der durch λ und τ begrenzten Intervalle und umgekehrt; bewegen sie sich aber in entgegengesetztem Bewegungssinn, so beschreiben beide dasselbe Intervall und umgekehrt. Im ersten Falle ist es nicht nothwendig, dass die beiden Elemente sich begegnen, im zweiten begegnen sie sich immer.

a) Ist die Bewegung der beiden Elemente ξ, ϱ nun eine solche, dass, während das eine, ξ, von λ aus das Intervall $(\lambda|\tau)$, das andere, ϱ, von τ aus das Intervall $(\tau|\lambda)=(\lambda-\tau)$ durchläuft, so dass nie beide in demselben Intervall sich befinden und sie gleichzeitig ξ in τ, ϱ in λ anlangen, so theilen je zwei gleichzeitige Lagen von ξ und ϱ das ganze Gebilde in zwei Intervalle, welche nach No. 15*a* mit $(\xi|\varrho)=(\varrho-\xi)$ und $(\varrho|\xi)=(\xi-\varrho)$ zu bezeichnen sind, und deren jedes nach No. 12*b* und 13*d* stets eines der Elemente λ, τ enthält; und zwar enthält, so lange ξ in dem Intervall $(\lambda|\tau)$, also ϱ in dem Intervall $(\tau|\lambda)$ sich befinden, das Intervall $(\xi|\varrho)=(\varrho-\xi)$ stets das Element τ, das Intervall $(\varrho|\xi)=(\xi-\varrho)$ stets das Element λ, so dass $(\xi|\tau)$ stets ein Theil von $(\xi|\varrho)$ und $(\xi-\lambda)$ stets ein Theil von $(\xi-\varrho)$, $(\varrho|\lambda)$ stets ein Theil von $(\varrho|\xi)=(\xi-\varrho)$ und $(\varrho-\tau)$ stets ein Theil von $(\varrho-\xi)$ $=(\xi|\varrho)$ ist. Ist dann ν irgend ein Element des Intervalles $(\lambda|\tau)$, und ist, wenn ξ nach ν, ϱ nach v gelangt, welches ein Element des Intervalles $(\lambda-\tau)$ ist, so folgt aus No. 15*f*:

Während ξ das Intervall $(\lambda|\nu)=(\lambda\nu)\tau$ beschreibt, sind allen Intervallen $(\xi|\varrho)$ die sämmtlichen Elemente des Intervalles $(\nu|\tau)=\lambda(\nu\tau)$ gemeinschaftlich und nur diese, allen Intervallen $(\varrho|\xi)=(\xi-\varrho)$ die sämmtlichen Elemente des Intervalles $(v|\lambda)$ $=\tau(v\lambda)=(\lambda-v)$ und nur diese; während ξ den Theil $(\nu|\tau)=\lambda(\nu\tau)$ durchläuft, ist allen Intervallen $(\xi-\varrho)$ der Theil $(\nu-\lambda)=(\lambda|\nu)$ $=(\lambda\nu)\tau$ gemeinschaftlich und sonst kein Element, allen Intervallen $(\varrho-\xi)=(\xi|\varrho)$ der Theil $(v-\tau)=(\tau|v)=(\tau v)\lambda$.

b) Durchläuft ein Element eines der Grundgebilde dasselbe zweimal hintereinander in demselben Bewegungssinne von der Lage λ an, so bilden

alle diese Lagen, wenn wir die des ersten und zweiten Umlaufes unterscheiden, ein Gebilde, von welchem der Satz in No. 1 ebenfalls gelten muss mit seinen sämmtlichen Folgerungen. Wir denken uns die Lagen des zweiten Umlaufes auf denen des ersten liegend, dann haben wir, wenn das laufende Element einen Umlauf vollendet, nach No. 15*a* den zweiten Umlauf mit $(\lambda|\lambda)$, den ersten mit $(\lambda - \lambda)$ zu bezeichnen. Lassen wir nun zwei aufeinanderliegende Elemente $\xi\xi$ gleichzeitig sich in diesem Gebilde von einer bestimmten Lage $\lambda\lambda$ an in bestimmtem Bewegungssinne bewegen, so genügen dieselben den Bedingungen für die Bewegung der Elemente ξ und ϱ in No. 17*a*; wenn das eine derselben einen Umlauf gemacht, hat auch das andere einen vollendet; bei jeder Lage von $\xi\xi$ enthält jedes der beiden Intervalle $(\xi|\xi)$, $(\xi - \xi)$ die sämmtlichen Elemente des einfachen Gebildes einmal.

§. 5. Perspectivische Intervalle.

18. Lediglich als Folgerung aus den Voraussetzungen und Sätzen in No. 1, 6, 7, 8, 9, 10, 15 ergiebt sich:

Ist a eine beliebige Punktreihe in der Ebene eines beliebigen ebenen Strahlbüschels $\mathfrak{s}^\varrho$, welche nicht mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch liegt, so entspricht jedem Punkt $\mathfrak{a}^\xi$ derselben ein und nur ein Strahl s^ϱ_ξ des Büschels und umgekehrt. Wählen wir zwei beliebige Punkte von a $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{a}^\tau$ zu Grenzpunkten und die mit diesen perspectivisch liegenden Strahlen s^ϱ_λ, s^ϱ_τ zu Grenzstrahlen des Büschels, so entsprechen allen Punkten der einen Strecke $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\nu}$ nur Strahlen, und zwar die sämmtlichen Strahlen des einen Winkels $s^\varrho_{(\lambda\tau)\nu}$ und umgekehrt, allen Punkten der anderen Strecke $\mathfrak{a}^{(\tau\nu\lambda)}$ nur Strahlen, und zwar die sämmtlichen des anderen Winkels $s^\varrho_{(\tau\nu\lambda)}$ und umgekehrt. Dies gilt ganz allgemein (No. 3), mag a eine endliche oder die unendlich entfernte Gerade, mag $\mathfrak{s}^\varrho$ ein endlicher oder unendlich entfernter Punkt sein, bei ganz beliebiger Wahl der Grenzelemente.

a) Die einem Punktenpaar erster, zweiter, dritter Art entsprechenden Strahlen bilden daher stets ein Strahlenpaar resp. erster, zweiter oder dritter Art, und die einem Strahlenpaar erster, zweiter, dritter Art entsprechenden Punkte bilden stets ein Punktepaar resp. erster, zweiter, dritter Art; vorausgesetzt ist dabei, dass die Grenzelemente der Punktreihe und des Strahlbüschels perspectivisch liegen.

b) Die eine der durch $\mathfrak{a}^{\lambda}$ und $\mathfrak{a}^{\tau}$ begrenzten Strecken $\mathfrak{a}^{(\lambda\tau)\nu}$ liegt nach No. 10 ganz mit allen ihren Punkten in dem von den Strahlen des einen der von s_{λ}^{ϱ} und s_{τ}^{ϱ} begrenzten Winkels $s_{(\lambda\tau\nu}^{\varrho}$, des entsprechenden Winkels, bedeckten Gebiet der Ebene, die andere Strecke $\mathfrak{a}^{(\tau\nu\lambda)}$ ganz mit allen ihren Punkten in dem Gebiet des anderen, des ihr entsprechenden Winkels $s_{(\tau\nu\lambda)}$.

c) Nach No. 6 und 15*a* entspricht der Strecke $\mathfrak{a}^{(\xi|\tau)}$ $\left(\mathfrak{a}^{(\lambda|\tau)}\right)$ der Winkel $s_{(\xi|\tau)}^{\varrho}$ $\left(s_{(\lambda|\tau)}^{\varrho}\right)$ und umgekehrt; demnach liegt die Strecke $\mathfrak{a}^{(\xi|\tau)}$ $\left(\mathfrak{a}^{(\lambda|\tau)}\right)$ ganz in dem Winkel $s_{(\xi|\tau)}^{\varrho}$ $\left(s_{(\lambda|\tau)}^{\varrho}\right)$; die Strecke $\mathfrak{a}^{(\xi-\tau)}$ $\left(\mathfrak{a}^{(\lambda-\tau)}\right)$ liegt ganz mit allen ihren Punkten in dem ihr entsprechenden Winkel $s_{(\xi-\tau)}^{\varrho}$ $\left(s_{(\lambda-\tau)}^{\varrho}\right)$. U e b e r h a u p t l i e g t e i n e S t r e c k e g a n z m i t a l l e n i h r e n P u n k t e n i n d e m j e n i g e n v o n z w e i m i t i h r e n G r e n z p u n k t e n p e r s p e c t i v i s c h l i e g e n d e n, s o n s t b e l i e b i g e n S t r a h l e n e i n e r E b e n e g e b i l d e t e n W i n k e l, i n w e l c h e m e i n e r i h r e r P u n k t e s i c h b e f i n d e t (No. 3*b*, 10.)

d) Die mit den Punkten einer Strecke, die nur einen Theil der Geraden *a* bildet, perspectivischen Strahlen eines Büschels, dessen Mittelpunkt nicht in der Geraden *a* liegt, bilden daher einen Winkel, der stets nur einen Theil des Büschels ausmacht und umgekehrt (No. 3).

e) Zwei Punkte der unendlich entfernten Geraden bilden daher in Bezug auf zwei beliebige Grenzpunkte derselben ein Punktepaar erster, zweiter oder dritter Art, wenn in irgend einem Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt die mit diesen beiden Punkten perspectivischen Strahlen in Bezug auf die mit den Grenzpunkten perspectivischen Strahlen ein Strahlenpaar resp. erster, zweiter oder dritter Art bilden; in allen übrigen Strahlbüscheln mit endlichem Mittelpunkt bilden dann die entsprechenden Strahlen ebenfalls ein Strahlenpaar resp. erster, zweiter oder dritter Art. (Vergl. die Anmerk. zu No. 19.)

So beurtheilen wir das Verhalten der sich der Anschauung entziehenden unendlich fernen Elemente aus dem Verhalten der mit ihnen perspectivischen endlichen Elemente.

19. Daraus geht hervor: Beziehen wir irgend eine Punktreihe a_1 perspectivisch auf einen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^1$, dessen Mittelpunkt mit keinem der Punkte von a_1 identisch ist, den Strahlbüschel $\mathfrak{s}^1$ ferner perspectivisch auf eine Punktreihe a_2, deren Träger nicht den Punkt $\mathfrak{s}^1$ enthält, diese Punktreihe wieder auf einen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^2$, dessen Mittelpunkt nicht mit einem ihrer Punkte zusammenfällt u. s. f., und sind in jedem der Gebilde a_1, $\mathfrak{s}^1$, a_2, $\mathfrak{s}^2$, ... zwei Elemente zu Grenzelementen so gewählt, dass sie mit den Grenzelementen des jedesmal in der Reihe vorhergehenden, also auch des folgenden Gebildes perspectivisch sind, so entsprechen jedem Elementen-

paar erster, zweiter oder dritter Art des einen Gebildes in jedem der anderen Gebilde Elementenpaare resp. der ersten, zweiten oder dritten Art in Bezug auf die erwählten Grenzelemente, so dass allen Elementen desselben Intervalles eines Gebildes in jedem der anderen Gebilde nur Elemente desselben Intervalles und zwar die sämmtlichen entsprechen, welches wir das dem ersteren entsprechende Intervall nennen*). Dem einen Bewegungssinn in einem dieser Gebilde entspricht in jedem der anderen Gebilde ein ganz bestimmter, von diesem abhängiger Bewegungssinn. Vergl. No. 6*b*, 12*a*. Die Träger dieser Gebilde brauchen nicht sämmtlich in derselben Ebene zu liegen; nothwendige und hinreichende Bedingung ist nur, dass jede Punktreihe in der Ebene der beiden mit ihr perspectivischen Strahlbüschel, nämlich des in der Reihenfolge vorhergehenden und des folgenden, liegt, also nach No. 2 mit der Schnittlinie der beiden Ebenen zusammenfällt und keinen der Mittelpunkte dieser beiden Büschel enthält.

20. Ist aber a eine Gerade in der Ebene eines ebenen Strahlbüschels $\mathfrak{s}^\varrho$, welche mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch liegt, so ist a ein Strahl des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\varrho = \mathfrak{a}^\varrho$ ein Punkt der Punktreihe a; die allen übrigen Strahlen des Büschels auf der Geraden a entsprechenden Punkte fallen zusammen (No. 2) in den Punkt $\mathfrak{a}^\varrho$ und die allen übrigen Punkten der Geraden a im Büschel entsprechenden Strahlen fallen zusammen in den Strahl a, so dass dem Punkt $\mathfrak{a}^\varrho$ von a alle Strahlen des Büschels ausser a, dem Strahl a des Büschels aber alle Punkte von a ausser $\mathfrak{a}^\varrho$ entsprechen **).

a) Wählen wir nun

zwei beliebige von $\mathfrak{a}^\varrho$ verschiedene Punkte von a $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{a}^\tau$ zu Grenzpunkten und die mit diesen

zwei beliebige von a verschiedene Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ s^ϱ_λ und s^ϱ_τ zu Grenzstrahlen und die mit diesen

*) Dass das Gesagte in der That auch für eine unendlich entfernte Punktreihe g_∞ und mit ihr perspectivische Strahlbüschel gilt, erhellt auch aus Folgendem: Je zwei solcher Strahlbüschel, deren Mittelpunkte ausserhalb g_∞ liegen, also endliche Punkte sind (No. 3*b*), müssen entweder in derselben Ebene, welche auch die unendlich entfernte Gerade g_∞ enthält, oder in zwei verschiedenen Ebenen liegen, die sich in dieser unendlich entfernten Geraden g_∞ schneiden. In jedem Falle lässt sich von irgend einem Punkte von g_∞ in der Ebene eines jeden dieser Strahlbüschel eine Gerade ziehen, welche mit keinem der Büschelstrahlen zusammenfällt; diese beiden Geraden liegen in einer Ebene, werden jede von einem der beiden Strahlbüschel in projectivischen Punktreihen geschnitten, welche perspectivisch liegen, da in dem unendlich entfernten Punkt zwei entsprechende zusammenfallen, so dass für die projectivische Beziehung der beiden gegebenen Strahlbüschel die unendlich entfernte Gerade ersetzt werden kann durch zwei endliche Punktreihen, welche mit einem Strahlbüschel perspectivisch liegen, dessen Mittelpunkt ein endlicher Punkt ist.

**) Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte. 1867. §. 19a.

perspectivischen Strahlen zu Grenzstrahlen des Büschels, so fallen letztere zusammen in den Strahl a; je zwei von a verschiedene Strahlen bilden daher ein Strahlenpaar der zweiten Art und die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden a bilden ein Punktepaar der zweiten Art; die einem Punktepaar erster, zweiter oder dritter Art, von welchen wenigstens einer nicht mit $\mathfrak{a}^\varrho$ identisch ist, entsprechenden Strahlen bilden ein Strahlenpaar dritter Art.

b) Fällt aber $\mathfrak{s}^\varrho$ mit einem der Grenzpunkte auf a, etwa mit $\mathfrak{a}^\tau$ zusammen, so ist a der eine Grenzstrahl des Büschels, welcher dem Punkt $\mathfrak{a}^\lambda$ entspricht, der andere Grenzstrahl, welcher dem $\mathfrak{a}^\tau$ entsprechen sollte, aber wird unbestimmt, so dass sich Strahlenpaare erster und zweiter Art nicht unterscheiden lassen; demnach entspricht jedem Punktepaar der Geraden a ein Strahlenpaar dritter Art des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ und jedem Strahlenpaar des Büschels ein Punktepaar dritter Art auf der Geraden a.

perspectivischen Punkte zu Grenzpunkten von a, so fallen letztere zusammen in den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$; je zwei von $\mathfrak{a}^\varrho$ verschiedene Punkte von a bilden daher ein Punktepaar der zweiten Art und die ihnen entsprechenden Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Strahlenpaar der zweiten Art, die einem Strahlenpaar erster, zweiter oder dritter Art, von welchen wenigstens der eine von a verschieden ist, entprechenden Punkte bilden ein Punktepaar dritter Art.

Fällt aber a mit einem der Grenzstrahlen von $\mathfrak{s}^\varrho$, etwa mit s^ϱ_τ zusammen, so ist $\mathfrak{a}^\varrho$ der eine Grenzpunkt auf a, welcher dem Strahl s^ϱ_λ entspricht, der andere Grenzpunkt, welcher dem s^ϱ_τ entsprechen sollte, aber wird unbestimmt, so dass sich Punktepaare erster und zweiter Art nicht unterscheiden lassen; demnach entspricht jedem Strahlenpaar des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho = \mathfrak{a}^\varrho$ ein Punktenpaar dritter Art auf a und jedem Punktepaar auf a ein Strahlenpaar dritter Art im Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$.

Ob $\mathfrak{s}^\varrho$ ein endlicher oder unendlich entfernter Punkt, a eine endliche oder die unendlich entfernte Gerade ist, ist hierfür gleichgiltig (No. 2, 3, 7, 8 *a*).

§. 6. Grenzgerade.

A. Ein Strahlbüschel und eine Punktreihe. Streckenbüschel.

21. *a*) 1. Bezeichnen wir die Gerade s^ϱ_λ in No. 18 als Strahl des Büschels $\mathfrak{a}^\lambda$ gemäss No. 11*a* mit a^λ_ϱ und die Gerade a mit a^λ_ψ, so wird s^ϱ in jeder seiner Lagen durch die mit diesen Geraden perspectivischen Punkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$ in zwei Strecken getheilt, von denen zufolge No. 18*b* die eine $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ die sämmtlichen Punkte enthält, welche mit den Strahlen des einen

der durch a_ϱ^λ und a_ψ^λ begrenzten Winkel, $a_{(\varrho\chi\psi)}^\lambda$, perspectivisch liegen, und nur diese, während die andere Strecke $\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$ die sämmtlichen Punkte enthält, welche mit den Strahlen des andern Winkels $a_{\chi(\psi\varrho)}^\lambda$ perspectivisch liegen, und nur diese; a_χ^λ ist aber ein ganz beliebiger von a_ϱ^λ und a_ψ^λ verschiedener Strahl des Büsches $\mathfrak{a}^\lambda$.

2. Zufolge No. 10 giebt es keinen Punkt in dem Winkel $a_{(\varrho\chi\psi)}^\lambda$, welcher nicht auf einem ganz mit allen seinen Elementen in denselben fallenden Strahl des Büschels $\mathfrak{a}^\lambda$ läge und zugleich nach No. 2, 3*a*, 6*c* einem Strahl des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ angehörte, und zwar derjenigen Strecke desselben, welche nach No. 18*c* ganz mit allen ihren Punkten in diesem Winkel liegt, den mit a_χ^λ gemeinschaftlichen Punkt enthält und daher mit $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ zu bezeichnen ist.

b) Ist g_δ irgend eine andere Gerade derselben Ebene, welche weder mit $\mathfrak{a}^\lambda$ noch mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch liegt und nach No. 3 mit a_ϱ^λ, a_χ^λ, a_ψ^λ resp. die Punkte $\mathfrak{g}_\delta^\varrho = \mathfrak{a}_\varrho^\delta$, $\mathfrak{g}_\delta^\chi = \mathfrak{a}_\chi^\delta$, $\mathfrak{g}_\delta^\psi = \mathfrak{a}_\psi^\delta$ gemeinschaftlich hat, von denen nach No. 2 keine zwei zusammenfallen, so liegt jeder Punkt der Strecke $\mathfrak{g}_\delta^{(\varrho\chi\psi)}$ sowohl mit einem Strahl des Winkels $a_{(\varrho\chi\psi)}^\lambda$, als mit einem Strahl des Winkels $s_{(\varrho\chi\psi)\delta}^\varrho$ perspectivisch, wo $s_{\varrho\delta}^\varrho = s_\lambda^\varrho = a_\varrho^\lambda$, $s_{\chi\delta}^\varrho$, $s_{\psi\delta}^\varrho$ die resp. mit den Punkten $\mathfrak{g}_\delta^\varrho$, $\mathfrak{g}_\delta^\chi$, $\mathfrak{g}_\delta^\psi$ perspectivischen Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ sind; und jeder Punkt der Strecke $g_\delta^{\chi(\psi\varrho)}$ liegt sowohl mit einem Strahl des Winkels $a_{\chi(\psi\varrho)}^\lambda$, als mit einem Strahl des Winkels $s_{\chi(\psi\varrho)\delta}^\varrho$ perspectivisch. Auf jedem Strahl s^ϱ des Winkels $s_{(\varrho\chi\psi)\delta}^\varrho$ enthält daher die Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ den mit g_δ perspectivischen Punkt $\mathfrak{s}^\delta$ und sonst auf keinem andern Strahl; auf jedem Strahl des Winkels $s_{\chi(\psi\varrho)\delta}^\varrho$ enthält die Strecke $\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$ den mit g_δ perspectivischen Punkt $\mathfrak{s}^\delta$, nie die Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$.

c) Lassen wir daher einen Strahl s^ϱ von der Lage $s_\lambda^\varrho = a_\varrho^\lambda$ aus den Strahlbüschel $\mathfrak{s}^\varrho$ in demselben Sinne continuirlich durchlaufen, so muss die eine der beiden durch $\mathfrak{s}^\varrho$ und den mit a_ψ^λ perspectivischen Punkt $\mathfrak{s}^\psi$ begrenzten Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$

stetig den Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}$ beschreiben, bis s^{ϱ} einen Umlauf vollendet und wieder nach s^{ϱ}_{λ} gelangt (No. 1), in allen ihren Lagen während desselben und in allen ihren Punkten in diesem Winkel liegen, und es kann keinen Punkt in diesem Winkel geben, welcher von dem Strahl s^{ϱ} während eines Umlaufes mehr als einmal oder keinmal (No. 6c) getroffen würde, und keinen, welcher nicht in der mit ihm perspectivischen Lage von s^{ϱ} der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ angehörte; die andere Strecke $\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$ aber muss in derselben Weise den andern Winkel $a^{\lambda}_{\chi(\psi\varrho)}$ beschreiben.

22. $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und jeder Punkt von a^{λ}_{ψ} gehören, ihrer Natur als Grenzpunkte gemäss, beiden Strecken des perspectivischen Strahles an, jeder von diesen verschiedene Punkt aber nur einer Strecke. Jede Gerade der Ebene wird daher in dem mit a^{λ}_{ψ} gemeinschaftlichen Punkt und, wenn sie den Punkt $\mathfrak{s}^{\varrho}$ enthält, auch in diesem gleichzeitig von beiden Strecken des Strahles s^{ϱ} getroffen, in jedem der übrigen Punkte aber nur von einer. Wir bezeichnen die eine der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$, welche im Drehsinne Δ von s^{ϱ} den Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}$ beschreibt, mit $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}$, die andere mit $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}$ und in der Anfangslage $s^{\varrho}_{\lambda}=a^{\lambda}_{\varrho}$ beim Anfange der Bewegung resp. mit $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}_{\lambda}$, $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}_{\lambda}$.

Während s^{ϱ} im Sinne Δ einen Umlauf macht, werden von derselben Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}=\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}=\mathfrak{s}^{\chi(\varrho\psi)}\right)$ getroffen:

a) jede von a^{λ}_{ϱ} und a^{λ}_{ψ} verschiedene Gerade des Winkels $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}\left(a^{\lambda}_{\chi(\psi\varrho)}\right)$ in allen Punkten, $\mathfrak{a}^{\lambda}$ ausgenommen;

b) jede beliebige Gerade der Ebene g_{δ}, welche weder mit $\mathfrak{a}^{\lambda}$ noch mit $\mathfrak{s}^{\varrho}$ perspectivisch liegt, in allen Punkten der Strecke $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\psi)}_{\delta}\left(\mathfrak{g}^{\chi(\psi\varrho)}_{\delta}\right)$, welche von den Grenzpunkten $\mathfrak{g}^{\varrho}_{\delta}$ und $\mathfrak{g}^{\psi}_{\delta}$ verschieden sind, und in dem Punkte $\mathfrak{g}^{\varrho}_{\delta}$, wenn dieser der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}_{\lambda}\left(\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}_{\lambda}\right)$ von s^{ϱ} in der Anfangslage $a^{\lambda}_{\varrho}=s^{\varrho}_{\lambda}$ angehört;

c) jede Gerade der Ebene, welche mit $\mathfrak{s}^{\varrho}$ perspectivisch, also ein Strahl s^{ϱ}_{ξ} des Büschels ist, in allen Punkten der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}_{\xi}\left(\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}_{\xi}\right)$ ausser den Grenzpunkten $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und $\mathfrak{s}^{\psi}_{\xi}$, aber in der einzigen Lage (No. 2) des

laufenden Strahles s^{ϱ}, in welcher er mit s^{ϱ}_{ξ} zusammenfällt; in allen anderen Lagen desselben wird s^{ϱ}_{ξ} sowohl von der einen wie von der anderen Strecke im Punkt $\mathfrak{s}^{\varrho}$ getroffen (No. 20).

23. Da, wenn a^{λ}_{ϱ} von a^{λ}_{ψ} verschieden, jede der beiden Strecken $\mathfrak{g}^{(\varrho\psi)}_{\delta}$ (No. 21*b*) nur ein Theil der Geraden g_{δ}, also auch jeder der beiden Winkel $s^{\varrho}_{(\varrho\psi)\delta}$ (No. 18) nur einen Theil des Büschels $\mathfrak{s}^{\varrho}$ ausmachen kann, aber jeder der Punkte von g_{δ} während eines Umlaufes des Strahles s^{ϱ} einmal mit ihm perspectivisch liegt (No. 3, 6, 21*c*), so muss diejenige der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ von s^{ϱ}, welche in der Anfangslage s^{ϱ}_{λ} am Anfange der Bewegung den mit g_{δ} gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{a}^{\delta}_{\varrho} = \mathfrak{g}^{\varrho}_{\delta}$ nicht enthält, denselben nach Beendigung des ersten Umlaufes von s^{ϱ} enthalten, und diejenige Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$, welche den Punkt $\mathfrak{a}^{\delta}_{\varrho}$ in der Anfangslage am Anfange der Bewegung enthält, kann denselben nicht nach Beendigung des ersten Umlaufes enthalten.

a) Jede der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ bildet demgemäss, wenn s^{ϱ} den Büschel $\mathfrak{s}^{\varrho}$ einmal durchlaufen, in der Anfangslage s^{ϱ}_{λ} die Ergänzung zu derjenigen Strecke, welche sie am Anfange der Bewegung bedeckte, und muss beim zweiten Umlaufe von s^{ϱ} in demselben Drehsinne Δ den entgegengesetzten des beim ersten Umlaufe beschriebenen Winkels beschreiben, so dass sie nach Beendigung des zweiten Umlaufes dieselbe Lage hat und dieselben Punkte enthält, als beim Anfange der Bewegung.

b) Die sämmtlichen Lagen einer der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ während zweier aufeinanderfolgender Umläufe von s^{ϱ} in demselben Drehsinne sind daher ein Gebilde, welches wir ein Streckenbüschel nennen wollen, von welchem die Voraussetzungen in No. 1 und die daraus hervorgehenden Folgerungen in ihrer ganzen Ausdehnung gelten, und welches die ganze Ebene des Büschels so erfüllt, dass jeder von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ verschiedene Punkt derselben, welcher nicht der Grenzgeraden a^{λ}_{ψ} angehört, mit einer solchen Strecke in einer und nur einer ihrer Lagen perspectivisch liegt; mit $\mathfrak{s}^{\varrho}$ aber liegt die laufende Strecke in allen ihren Lagen und mit jedem Punkt von a^{λ}_{ψ} in zwei durch einen ganzen Umlauf von s^{ϱ} getrennten Lagen perspectivisch.

c) Jeder der beiden Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\psi)}$ erscheint hiernach als eines der Intervalle, in welche das Streckenbüschel $\mathfrak{s}^{\varrho}\ (a^{\lambda}_{\psi})$, sowie jedes andere $\mathfrak{s}^{\varphi}\ (a^{\lambda}_{\psi})$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{s}^{\varphi}$ irgend einer der Punkte von s^{ϱ}_{λ} ist und welches auf dieselbe Grenzgerade a^{λ}_{ψ} bezogen wird, zerfällt durch die beiden von den Punkten $\mathfrak{a}^{\lambda}=\mathfrak{s}^{\psi}_{\lambda}$ und $\mathfrak{s}^{\varrho}$ (resp. $\mathfrak{s}^{\varphi}$) begrenzten Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}_{\lambda}\left(\mathfrak{s}^{(\varphi\psi)}_{\lambda}\right)$.

d) Aus No. $12a^{2}$ und 16 geht ferner hervor: Dieselbe der durch $\mathfrak{a}^{\lambda}$ und $\mathfrak{s}^{\varrho}$ auf s^{ϱ}_{λ} bestimmten Strecken, welche, während s^{ϱ} sich im Sinne Δ von s^{ϱ}_{λ} an bewegt, den Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}$ beschreibt, beschreibt, wenn s^{ϱ} sich im entgegengesetzten Sinne bewegt, den Ergänzungswinkel $a^{\lambda}_{(\varrho\psi)\chi}$; und derselbe der Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\psi)}$, welcher von der einen der in der Anfangslage durch $\mathfrak{a}^{\lambda}$ und $\mathfrak{s}^{\varrho}$ bestimmten Strecken beschrieben wird, während s^{ϱ} sich im Sinne Δ bewegt, wird, wenn s^{ϱ} sich im entgegengesetzten Sinne bewegt, von der anderen dieser Strecken beschrieben.

24. Während s^{ϱ} im Sinne Δ von s^{ϱ}_{λ} aus den Büschel $\mathfrak{s}^{\varrho}$ beschreibt, durchläuft der auf einer Geraden g_{δ}, welche weder mit $\mathfrak{a}^{\lambda}$ noch mit $\mathfrak{s}^{\varrho}$ perspectivisch liegt, entsprechende Punkt gemäss No. 21, 22 zuerst die in dem Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}$ befindliche Strecke $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\psi)}_{\delta}$, wenn g_{δ} die Gerade s^{ϱ}_{λ} in irgend einem Punkt der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\,|\,\psi)}_{\lambda}$ schneidet, und er durchläuft zuerst die in dem Winkel $a^{\lambda}_{(\varrho\psi)\chi}$ befindliche Strecke $\mathfrak{g}^{(\varrho\psi)\chi}_{\delta}$, wenn g_{δ} die Gerade s^{ϱ}_{λ} in irgend einem Punkt der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}_{\lambda}$ schneidet.

Daher bewegt sich, während s^{ϱ} im Sinne Δ den Büschel $\mathfrak{s}^{\varrho}$ beschreibt, der entsprechende Punkt auf allen Geraden g der Ebene, welche mit s^{ϱ}_{λ} einen Punkt der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\,|\,\psi)}_{\lambda}$ gemeinschaftlich haben, im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\chi\psi}$, auf allen Geraden g der Ebene, welche mit s^{ϱ}_{λ} einen Punkt der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}_{\lambda}$ gemeinschaftlich haben, im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\psi\chi}$, welchem im Büschel $\mathfrak{a}^{\lambda}$ nach No. 1 der dem Sinne $a^{\lambda}_{\varrho\chi\psi}$ entgegengesetzte $a^{\lambda}_{\varrho\psi\chi}$ entspricht.

Beschreibt aber s^ϱ den Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ in dem dem Sinne Δ entgegengesetzten Sinne $\overline{\Delta}$, so bewegt sich zufolge No. 6 der entsprechende Punkt auf allen Geraden der ersteren Art im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\psi\chi}$, auf allen Geraden der letzteren Art im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\chi\psi}$.

25. Die ausnahmlose Allgemeinheit der Voraussetzungen des §. 1 und der darauf sich gründenden Folgerungen und Definitionen gestattet uns, unsere Untersuchungen ihrem Wesen nach ganz allgemein bei ganz beliebiger Lage der in Betracht kommenden Gebilde und bei ganz beliebiger Wahl der in denselben hervorzuhebenden Elemente anzuwenden. Besonderheiten in der Lage der Gebilde und der Wahl gewisser Elemente derselben werden nur gewisse Modificationen des Resultates veranlassen, welche aber ebenfalls in der allgemeinen Untersuchung als Specialitäten enthalten sein müssen.

a) Jegliche zwei Elemente eines stetigen geschlossenen Gebildes von der in No. 1 angegebenen Beschaffenheit theilen dasselbe in zwei Intervalle; auch von zwei aufeinanderfolgenden oder zusammenfallenden Elementen können wir dies sagen, nur findet dann der besondere Fall statt, dass das eine Intervall gleich Null, das andere gleich dem ganzen Gebilde wird. Ist $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punkt von a^λ_ψ, so wird die eine der Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ in jeder Lage von s^ϱ, welche verschieden von a^λ_ψ ist, gleich Null, die andere gleich dem ganzen Strahl; in der einzigen mit a^λ_ψ zusammenfallenden Lage aber wird die Begrenzung der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ unbestimmt.

b) Daher folgern wir, damit dieser specielle Fall den allgemeinen Gesetzen dieses Paragraphen sich unterordne: Während s^ϱ von dem beliebigen Anfangsstrahl s^ϱ_λ an den einen der Winkel $a^\lambda_{(\varrho\psi)}$ beschreibt, wird die eine der Strecken, während s^ϱ den anderen der Winkel $a^\lambda_{(\varrho\psi)}$ beschreibt, die andere der Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ gleich Null, und die Lage a^λ_ψ von s^ϱ bildet den Uebergang.

Also auch: Während s^ϱ von dem beliebigen Strahl s^ϱ_λ an den einen Winkel $a^\lambda_{(\varrho\psi)}$ beschreibt, wird die eine der Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ gleich dem ganzen Strahl, während s^ϱ den anderen Winkel $a^\lambda_{(\varrho\psi)}$ beschreibt, die andere. Durch die Anschauung kann man sich davon überzeugen, wenn man sich zunächst die Grenzgerade a^λ_ψ nicht mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch denkt und nach und nach um den Schnittpunkt mit irgend einem Strahl s^ϱ_ξ des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ sich drehen lässt, bis sie mit s^ϱ_ξ zusammenfällt, was nothwendig einmal stattfinden muss nach No. 2.

c) Dem Satz in No. 24 würde dann der schon aus No. 1 und 6 folgende entsprechen, dass auf allen Geraden der Ebene, welche nicht mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch liegen, der entsprechende Punkt sich entweder im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\chi\psi}$ bewegen muss, wenn s^ϱ den Sinn $s^\varrho_{\lambda\chi\psi} = a^\lambda_{\varrho\chi\psi}$ hat, oder im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\psi\chi}$ wenn s^ϱ den Sinn $s^\varrho_{\lambda\psi\chi} = a^\lambda_{\varrho\psi\chi}$ hat. In Bezug auf die mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivischen Geraden ist No. 20 und 22*c* zu vergleichen.

d) Lassen wir den Anfangsstrahl der Bewegung von s^ϱ s^ϱ_λ mit a^λ_ψ zusammenfallen, so können wir den No. 21*b* und 22*b* entsprechenden Satz folgendermassen aussprechen: **Alle nicht mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivischen Geraden der Ebene werden in allen ihren Punkten von s^ϱ mit derselben Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ getroffen.**

Wir heben nur diese Einzelheiten hervor; die den übrigen Sätzen dieses Paragraphen für den Fall, dass $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punkt der Grenzgeraden a^λ_ψ ist, entsprechenden Sätze ergeben sich hiernach von selbst.

B. Ein Strahlbüschel und zwei Punktreihen.

26. Nehmen wir nun zunächst wieder den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ ausserhalb der Grenzgeraden a^λ_ψ an, und sind g_δ und g_ξ irgend zwei Gerade derselben Ebene, welche mit $a^\lambda_\varrho = s^\varrho_\lambda$ je einen Punkt resp. $\mathfrak{a}^\delta_\varrho = \mathfrak{g}^\varrho_\delta$ und $\mathfrak{a}^\xi_\varrho = \mathfrak{g}^\varrho_\xi$ derselben Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}_\lambda$ gemeinschaftlich haben, so muss nach No. 21*b* und 24 von den beiden resp. mit den Strecken $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\psi)}_\delta$ und $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\psi)}_\xi$ perspectivischen Winkeln $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\delta}$ und $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\xi}$ des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ der eine ein Theil des andern sein. Die Indices δ und ξ mögen so gewählt sein, dass der Winkel $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\delta}$ ein Theil von $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\xi}$ ist, so ist der dem Punkt $\mathfrak{g}^\psi_\delta$ auf g_ξ entsprechende Punkt ein Punkt der Strecke $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\psi)}_\xi$ und der dem Punkt $\mathfrak{g}^\psi_\xi$ entsprechende Punkt von g_δ ein Punkt der Strecke $\mathfrak{g}^{(\varrho\psi)\chi}_\delta$. Den Winkeln $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\delta}$ und $s^\varrho_{(\varrho\chi\psi)\xi}$ entsprechen demnach auf a^λ_ψ resp. die Strecken $\mathfrak{a}^{(\lambda\delta)\xi}_\psi$ und $\mathfrak{a}^{(\lambda\delta\xi)}_\psi$, so dass sie resp. mit $s^\varrho_{\psi(\lambda\delta)\xi}$ und $s^\varrho_{\psi(\lambda\delta\xi)}$ bezeichnet werden können und ferner $s^\varrho_{\chi(\psi\varrho)\delta} = s^\varrho_{\psi(\delta\xi\lambda)}$ und $s^\varrho_{\chi(\psi\varrho)\xi} = s^\varrho_{\psi\delta(\xi\lambda)}$ ist. Darnach ist der mit der Strecke $\mathfrak{a}^{\lambda(\delta\xi)}_\psi$ perspectivische Winkel $s^\varrho_{\psi\lambda(\delta\xi)}$ den

Winkeln $s^{\varrho}_{(\varrho\chi\psi)\xi}$ und $s^{\varrho}_{\chi(\psi\varrho)\delta}$ gemeinschaftlich und in jedem seiner von den Grenzstrahlen $s^{\varrho}_{\psi\delta}$ und $s^{\varrho}_{\psi\xi}$ verschiedenen Strahlen liegen die mit g_{δ} und g_{ξ} perspectivischen Punkt $\mathfrak{s}^{\delta}$ und $\mathfrak{s}^{\xi}$ je einer auf einer der Strecken $\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$, $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$, und bilden also ein Punktepaar der ersten Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und $\mathfrak{s}^{\psi}$ (No. 12*b*).

Auf jedem Strahl des Winkels $s^{\varrho}_{\psi(\xi\lambda\delta)}$ aber liegen die beiden Punkte $\mathfrak{s}^{\delta}$ und $\mathfrak{s}^{\xi}$ in einer der beiden Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$, bilden also ein Punktepaar zweiter Art in Bezug auf $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und $\mathfrak{s}^{\psi}$; und zwar liegen beide $\mathfrak{s}^{\delta}$ und $\mathfrak{s}^{\xi}$ in der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)} = \mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ auf jedem Strahl des Winkels $s^{\varrho}_{\psi(\lambda\delta)\xi}$, in jedem Strahl des Winkels $s^{\varrho}_{\psi\,\delta(\xi\lambda)}$ aber auf der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)} = \mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$, welche, wenn s^{ϱ} den ersten Umlauf beendet, auf dem Strahl $s^{\varrho}_{\lambda} = a^{\lambda}_{\varrho}$ mit $\mathfrak{s}^{(\varrho|\psi)}_{\lambda}$ zusammenfällt (No. 23*a*).

a) Haben die Geraden g_{δ} und g_{ξ} mit $a^{\lambda}_{\varrho} = s^{\varrho}_{\lambda}$ je einen Punkt der Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho-\psi)}_{\lambda}$ gemeinschaftlich, so gilt mit Vertauschung der Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\chi\psi)}$ und $\mathfrak{s}^{\chi(\psi\varrho)}$ dasselbe. Das Resultat ist unabhängig von dem Drehsinne Δ von s^{ϱ}. Derjenige Strahl des Büschels $\mathfrak{s}^{\varrho}$, welcher mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{g}^{\xi}_{\delta}$ der Geraden g_{δ} und g_{ξ} perspectivisch liegt, muss (No. 13*a*) ein Strahl des Winkels $s^{\varrho}_{\psi(\xi\lambda\delta)}$ sein, und zwar ein Strahl des Theiles $s^{\varrho}_{\psi(\xi\lambda)\delta}$ oder des Theiles $s^{\varrho}_{\psi\,\xi(\lambda\delta)}$, je nachdem der Punkt $\mathfrak{g}^{\xi}_{\delta}$ in dem Winkel $a^{\lambda}_{\chi(\psi\varrho)}$ oder $a^{\lambda}_{(\varrho\chi\psi)}$ liegt.

b. Der Anfangsstrahl s^{ϱ}_{λ} ist beliebig gewählt; nehmen wir statt dessen irgend einen anderen Strahl desselben Winkels $s^{\varrho}_{\psi(\delta\xi)}$, so wird das Resultat, wie aus demselben von selbst hervorgeht, nicht geändert. Es lässt sich jedoch auch schon erkennen, wie der Satz lauten muss, wenn statt s^{ϱ}_{λ} ein Strahl s^{ϱ}_{τ} des anderen Winkels $s^{\varrho}_{\psi(\delta\xi)}$ gewählt wird, oder was dasselbe ist, wenn g_{δ} und g_{ξ} den Anfangsstrahl die eine in einem Punkt der einen, die andere in einem Punkt der anderen Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ schneiden; es lässt sich aber auch durch eine ähnliche Betrachtung ableiten.

Wir können demnach folgenden von der Wahl des Anfangsstrahles ganz unabhängigen Satz aussprechen, wobei wir den Schnittpunkt der Geraden g_{δ} und g_{ξ} kürzer mit $\mathfrak{g}^{o}$, den mit demselben perspectivischen Strahl

des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ mit s^ϱ_o und den mit diesem perspectivischen Punkt der Geraden $\mathfrak{a}^\lambda_\psi$ mit $\mathfrak{a}^o_\psi$ bezeichnen, also: Zwei beliebige Gerade g_δ und g_ξ derselben Ebene, welche nicht Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ sind, schneiden die Grenzgerade in zwei Punkten $\mathfrak{g}^\psi_\delta = \mathfrak{a}^\delta_\psi$ und $\mathfrak{g}^\psi_\xi = \mathfrak{a}^\xi_\psi$, welche diese in zwei Strecken theilen. Auf allen Strahlen s^ϱ, welche mit den Punkten der Strecke $\mathfrak{a}^{(\delta o \xi)}_\psi$ perspectivisch sind, das ist auf allen Strahlen des Winkels $s^\varrho_\psi{}_{(\delta o \xi)}$, in dessen Gebiet der Punkt $\mathfrak{g}^o$ sich befindet, bilden die mit g_δ und g_ξ gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{s}^\delta$ und $\mathfrak{s}^\xi$ ein Punktepaar der zweiten Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$; auf allen Strahlen des anderen Winkels $s^\varrho_\psi{}_{o(\xi\delta)}$ bilden sie ein Punktepaar der ersten Art, und auf den mit $\mathfrak{a}^\delta_\psi$ und $\mathfrak{a}^\xi_\psi$ perspectivischen Strahlen $s^\varrho_\psi{}_\delta$ und $s^\varrho_\psi{}_\xi$, den Grenzstrahlen, ein Punktepaar der dritten Art (No. $12d^2$).

27. *a*) Ist der Mittelpunkt des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ bei ganz beliebiger Lage der Geraden g_δ und g_ξ mit einer derselben, etwa mit g_δ perspectivisch, so ist $\mathfrak{s}^\varrho$ verschieden von $\mathfrak{g}^o$ und es gilt von den den Strahlen des Büschels auf g_δ entsprechenden Punkten das in No. 20, von den auf g_ξ entsprechenden Punkten das in No. 18 Gesagte. Die den sämmtlichen Punkten von g_ξ ausser $\mathfrak{g}^o$ auf g_δ entsprechenden Punkte fallen in den Grenzpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ zusammen und die den übrigen Punkten von g_δ auf g_ξ entsprechenden in $\mathfrak{g}^o$ *). Auf allen von g_δ verschiedenen Strahlen s^ϱ bilden die mit den Geraden g_δ und g_ξ gemeinschaftlichen Punkte Punktepaare der dritten Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$ nach No. $12d^1$, auf dem mit g_δ zusammenfallenden Strahl s^ϱ_o ebenfalls ein Punktepaar dritter Art aber nach No. $12d^3$.

b) Ist $\mathfrak{s}^\varrho$ mit beiden Geraden g perspectivisch, also nach No. 2 mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{g}^o$ identisch, so sind die den sämmtlichen Punkten von g_δ ausser $\mathfrak{g}^o$ auf g_ξ und die den sämmtlichen von g_ξ ausser $\mathfrak{g}^o$ auf g_δ entsprechenden Punkte in $\mathfrak{g}^o$ vereinigt; auf allen von g_δ und g_ξ verschie-

*) Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte 1867, §. 19a.

denen Strahlen s^ϱ bilden die mit g_δ und g_ξ gemeinschaftlichen Punkte Punktepaare dritter Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho = \mathfrak{g}^o$ und s^ψ nach No. $12d^2$, auf den mit g_δ und g_ξ zusammenfallenden Strahlen Punktepaare dritter Art nach No. $12d^3$.

28 *a*) Ist $\mathfrak{s}^\varrho$ mit keiner der Geraden g_δ, g_ξ perspectivisch, so können wir nach No. 25 den Satz in No. 26 auch in dem Falle anwenden, wenn die Punkte $\mathfrak{a}^\delta_\psi$ und $\mathfrak{a}^\xi_\psi$ auf a^λ_ψ zusammenfallen, was nach No. 2 nur möglich ist, wenn $\mathfrak{g}^o$ ein Punkt der Grenzgeraden a^λ_ψ; der besonderen Lage von $\mathfrak{g}^o$ entspricht das Nullwerden einer der beiden Strecken $\mathfrak{a}^{(\delta\xi)}_\psi$ im Resultat. Sind also g_δ und g_ξ irgend zwei Gerade in der Ebene des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$, welche einen Punkt der Grenzgeraden a^λ_ψ gemeinschaftlich haben, $\mathfrak{a}^o_\psi$, so bilden

1. wenn beide Gerade g von a^λ_ψ verschieden sind und den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ nicht enthalten, die Punkte $\mathfrak{s}^\delta$ und $\mathfrak{s}^\xi$ entweder auf allen Strahlen s^ϱ des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$, den mit $\mathfrak{a}^o_\psi$ perspectivischen Strahl s^ϱ_o ausgenommen, ein Punktepaar der zweiten Art oder auf allen Strahlen ein Punktepaar der ersten Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$, je nachdem das eine oder das andere von einem der Strahlen gilt, je nachdem nämlich die Strahlen s^ϱ_o und a^λ_ψ im Büschel $\mathfrak{a}^o_\psi$ ein Strahlenpaar zweiter oder erster Art bilden in Bezug auf die Geraden g_δ und g_ξ als Grenzstrahlen (dies folgt auch aus No. 18), aber auf dem Strahl s^ϱ_o stets ein Punktepaar dritter Art (No. $12d^2$);

2. wenn eine der Geraden g oder beide mit a^λ_ψ zusammenfallen, die mit g_δ und g_ξ perspectivischen Punkte eines jeden Strahles s^ϱ ein Punktepaar dritter Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$ (No. $19c^{1,2}$).

b) Ist $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punkt von a^λ_ψ und

1. sind g_δ und g_ξ zwei beliebige in der Ebene des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ gelegene Gerade, welche von a^λ_ψ verschieden sind und den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ nicht enthalten, so bilden nach No. 13*b* und 25 die Punkte $\mathfrak{s}^\delta$ und $\mathfrak{s}^\xi$ auf dem Strahl s^ϱ in allen seinen von a^λ_ψ verschiedenen Lagen ein Punktepaar

zweiter Art, in der Lage a_ψ^λ aber ein Punktepaar dritter Art in Bezug auf die Grenzpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi$ (No. 12d^4);

2. fallen eine der Geraden g_δ, g_ξ oder beide mit a_ψ^λ zusammen, so bilden die Punkte $\mathfrak{s}^\delta$ und $\mathfrak{s}^\xi$ auf s^ϱ in allen seinen Lagen Punktepaare der dritten Art (No. 12$d^{1\,2\,3\,4}$).

29. Beachten wir, dass $\mathfrak{a}^\lambda$ ein beliebiger Punkt von a_ψ^λ (No. 18), also s_λ^ϱ ein beliebiger Strahl des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ und wählen wir in No. 24 statt des beliebigen Strahles a_χ^λ (No. 21a) des Büschels $\mathfrak{a}^\lambda$ den mit dem Punkt $\mathfrak{g}^o$ perspectivischen Strahl a_o^σ desjenigen Strahlbüschels $\mathfrak{a}^\sigma$, dessen Mittelpunkt der mit dem beweglichen Strahl s^ϱ des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivische Punkt von a_ψ^λ ist, so folgt: Von je zwei entsprechenden Lagen $\mathfrak{s}^\delta = \mathfrak{g}_\delta^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\xi = \mathfrak{g}_\xi^\varrho$, welche auf dem mit ihnen perspectivischen Strahl s^ϱ von $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punktepaar erster Art in Bezug auf $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\psi = \mathfrak{a}^\sigma$ als Grenzpunkte bilden; bewegen sich die beiden dem Strahl s^ϱ, während er den Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ beschreibt, auf g_δ und g_ξ entsprechenden Punkte $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$, der eine im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho o \psi}$ auf das Gebiet des einen der durch die Grenzgerade a_ψ und die perspectivische Lage von s^ϱ a_ϱ^σ bestimmten Winkel, welches den Punkt $\mathfrak{g}^o$ enthält, $a_{(\varrho o \psi)}^\sigma$, der andere im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho\psi o}$ auf das Gebiet des andern Winkels $a_{(\varrho\psi)o}^\sigma$ weiter; von je zwei entsprechenden Lagen aber, welche auf dem mit ihnen perspectivischen Strahl s^ϱ ein Punktepaar zweiter Art bilden, bewegen sich die Punkte $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$ entweder beide im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho o \psi}$ auf das Gebiet des Winkels $a_{(\varrho o \psi)}^\sigma$ oder beide im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho \psi o}$ auf das Gebiet des Winkels $a_{(\varrho\psi)o}^\sigma$ (vergl. 14c). $\mathfrak{g}^\varrho$ und $\mathfrak{g}^\psi$ sind aber die resp. mit a_ϱ^σ, a_ψ perspectivischen Punkte der Geraden g.

§. 7. Zwei Strahlbüschel und zwei Punktreihen. Folgerung.

30. Fassen wir jeden der Strahlen s^ϱ von $\mathfrak{s}^\varrho$ als Ganzes auf, nicht als bestehend aus zwei Strecken $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$, so ist a_ψ^λ eine beliebige Gerade der

Ebene (No. 18, 21a) und $\mathfrak{a}^\lambda$ ein beliebiger Punkt derselben und die drei Strahlen des Büschels $\mathfrak{a}^\lambda$ a^λ_ϱ, a^λ_χ, a^λ_ψ bestimmen einen gewissen Bewegungssinn (No. 14a^3); demnach erhalten wir aus No. 20, 24, 27:

a) Bilden die Schnittpunkte $\mathfrak{a}^\delta_\varrho$ und $\mathfrak{a}^\xi_\varrho$ zweier Geraden g_δ und g_ξ in der Ebene zweier ebener Strahlbüschel $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ mit dem diesen beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahl $a^\lambda_\varrho = s^\varrho_\lambda$ ein Punktepaar der ersten Art in Bezug auf die Mittelpunkte $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ und

beschreiben ein Strahl a^λ von $\mathfrak{a}^\lambda$ und einer s^ϱ von $\mathfrak{s}^\varrho$ jeder in beliebigem Drehsinne sein Büschel, so bewegen sich die auf den Geraden g_δ und g_ξ entsprechenden Punkte auf einer in demselben, auf der anderen in entgegengesetztem Richtungssinne.

durchlaufen ein Punkt $\mathfrak{g}_\delta$ von g_δ und einer $\mathfrak{g}_\xi$ von g_ξ jeder in beliebigem Richtungssinne seine Punktreihe, so bewegen sich die in den Büscheln $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ entsprechenden Strahlen in dem einen Büschel in demselben, in dem anderen in entgegengesetztem Drehsinne.

b) Bilden die Punkte $\mathfrak{a}^\delta_\varrho$ und $\mathfrak{a}^\xi_\varrho$ auf a^λ_ϱ aber ein Punktepaar der zweiten Art in Bezug auf $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$,

so bewegen sich die den Strahlen a^λ und s^ϱ entsprechenden Punkte entweder auf beiden Geraden g in demselben oder auf beiden in entgegengesetztem Richtungssinne.

so bewegen sich die den Punkten $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$ entsprechenden Strahlen entweder in jedem der beiden Büschel in demselben oder in jedem in entgegengesetztem Drehsinne.

c) Fällt einer der Punkte $\mathfrak{a}^\delta_\varrho$, $\mathfrak{a}^\xi_\varrho$ mit einem der Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{s}^\varrho$ zusammen, etwa $\mathfrak{a}^\delta$ mit $\mathfrak{s}^\varrho$, so dass das eine Paar ein Punktepaar dritter Art bildet in Bezug auf das andere als Grenzpunkte,

so verändert der dem Strahl s^ϱ auf g_δ entsprechende Punkt seine Lage nicht, bis s^ϱ mit der Geraden g_δ zusammen-

so verändert der dem Punkt $\mathfrak{g}_\delta$ im Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ entsprechende Strahl seine Lage nicht, bis $\mathfrak{g}_\delta$ mit $\mathfrak{s}^\varrho$ zusammenfällt und

fällt und nimmt nachher, wenn s^ϱ die Bewegung fortsetzt, dieselbe Lage wieder ein, nämlich die des Punktes $\mathfrak{s}^\varrho$. Es kann in diesem Falle von einem eigentlichen Bewegungssinn (No. 1) des dem Strahl s^ϱ auf g_δ entsprechenden Punktes nicht die Rede sein, also auch nicht von einer Vergleichung mit dem Bewegungssinn des dem Strahl a^λ auf g_δ entsprechenden Punktes.

Die den Strahlen s^ϱ und a^λ auf der anderen Geraden g_ξ entsprechenden Punkte können dieselbe sowohl in gleichem, als in entgegengesetztem Richtungssinne beschreiben, was auch durch Hinzuziehung einer dritten von g_ξ verschiedenen weder mit $\mathfrak{a}^\lambda$ noch mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivischen Geraden aus den Fällen *a*) und *b*) erkannt wird.

kehrt nachher, wenn $\mathfrak{g}_\delta$ diesen verlässt, in dieselbe Lage zurück, nämlich in die der Geraden g_δ. Es kann in diesem Falle daher von einem eigentlichen Bewegungssinne (No. 1) des dem Punkt $\mathfrak{g}_\delta$ im Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ entsprechenden Strahles nicht die Rede sein, also auch nicht von einer Vergleichung mit dem Bewegungssinne des dem Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ im Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ entsprechenden Strahles.

Die den Punkten $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$ in dem anderen Büschel $\mathfrak{a}^\lambda$ entsprechenden Strahlen können dasselbe sowohl in gleichem als in entgegengesetztem Drehsinne beschreiben, was auch durch Hinzuziehung eines anderen Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt weder mit g_δ noch mit g_ξ perspectivisch liegt, aus den Fällen *a*) und *b*) erkannt wird.

31. *a*) Jedesmal wenn die Punkte $\mathfrak{a}_\varrho^\delta$ und $\mathfrak{a}_\varrho^\xi$ ein Punktepaar erster, zweiter oder dritter Art in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ bilden, bilden nach No. 13 und 18 die mit $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivischen Strahlen des Büschels $\mathfrak{g}^0$ ein Strahlenpaar resp. erster, zweiter oder dritter Art in Bezug auf die Geraden g_δ und g_ξ und umgekehrt. Die Punkte $\mathfrak{a}_\varrho^\delta$ und $\mathfrak{a}_\varrho^\xi$ bilden daher stets ein Punktepaar erster Art in Bezug auf $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{a}^\lambda$, wenn sie sich der eine in dem einen, der andere in dem anderen der Winkel $g_{(\delta\,\xi)}$ befinden, und stets ein Punktepaar zweiter Art in Bezug auf dieselben Grenzpunkte, wenn sie sich in demselben Winkel $g_{(\delta\,\xi)}$ befinden, und stets ein Punktepaar dritter Art, wenn einer derselben oder beide auf einer der Geraden g_δ, g_ξ oder in beiden liegen, und umgekehrt.

Dies berücksichtigend folgern wir aus No. 24 und 30 folgende Sätze:

a) Durchläuft ein Punkt $\mathfrak{g}_\delta$ stetig in einem bestimmten Sinne die Punktreihe g_δ, so wird dadurch den mit $\mathfrak{g}_\delta$ perspectivischen Strahlen a^λ und s^ϱ der Büschel $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ jedem ein bestimmter Drehsinn ertheilt (No. 1 und 6).

Beschreibt ein Strahl s^ϱ stetig in einem bestimmten Sinne den Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$, so wird dadurch den mit s^ϱ perspectivischen Punkten $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$ der Geraden g_δ und g_ξ jedem ein bestimmter Richtungssinn ertheilt (No. 1 und 6).

b) Die mit a^λ und s^ϱ auf g_ξ perspectivischen Punkte $\mathfrak{g}_\xi^\lambda$ und $\mathfrak{g}_\xi^\varrho$ durchlaufen dann die Punktreihe g_ξ in entgegengesetztem Richtungssinne (No. 17), wenn $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ sich, der eine in dem einen, der andere in dem anderen der durch g_δ und g_ξ bestimmten Winkel befinden, in gleichem Richtungssinne, wenn $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ sich in demselben Winkel $g_{(\delta\xi)}$ befinden.

Die mit $\mathfrak{g}_\delta$ und $\mathfrak{g}_\xi$ im Büschel $\mathfrak{a}^\lambda$ perspectivischen Strahlen a_δ^λ und a_ξ^λ durchlaufen dann ihr Büschel in entgegengesetztem Drehsinne (No. 17), wenn g_δ und g_ξ den beiden Büscheln $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{a}^\lambda$ gemeinschaftlichen Strahl a_ϱ^λ, die eine in einem Punkt der einen, die andere in einem Punkt der anderen der durch die Mittelpunkte bestimmten Strecken schneiden, in gleichem Drehsinn, wenn g_δ und g_ξ beide den Strahl a_ϱ^λ in Punkten derselben Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\lambda)}$ schneiden.

c) Oder:

Die Punkte $\mathfrak{g}_\xi^\lambda$ und $\mathfrak{g}_\xi^\varrho$ bewegen sich in gleichem oder in entgegengesetztem Richtungssinne, jenachdem g_δ und g_ξ die Gerade a_ϱ^λ in Punkten derselben Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\lambda)}$ oder verschiedener Strecken $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\lambda)}$ schneiden.*)

Die Strahlen a_δ^λ und a_ξ^λ bewegen sich in gleichem oder in entgegengesetztem Drehsinne, jenachdem $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ sich in demselben Winkel $g_{(\delta\xi)}$ oder in verschiedenen Winkeln $g_{(\delta\xi)}$ befinden.

*) Vgl. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, No. 50, 51.

d) Liegt der Mittelpunkt eines der beiden Strahlbüschel, etwa $\mathfrak{s}^\varrho$ in einer der Geraden g, so verharrt der dem Strahl s^ϱ auf g_ξ entsprechende Punkt in seiner Lage, nämlich wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ in der Geraden g_δ gelegen, im Schnittpunkt $\mathfrak{g}^0$, wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ in g_ξ gelegen, in $\mathfrak{s}^\varrho$, bis $\mathfrak{g}_\delta$ resp. den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ oder $\mathfrak{g}^0$ deckt, und nimmt, sobald $\mathfrak{g}_\delta$ diese verlassen, die alte Lage wieder ein; der ausgezeichneten Lage von $\mathfrak{g}_\delta$ in resp. $\mathfrak{s}^\varrho$ oder $\mathfrak{g}^0$ aber entsprechen im Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ im ersten Fall die sämmtlichen Strahlen ausser $\mathfrak{g}_\delta$, im zweiten der einzige Strahl g_ξ, in beiden Fällen auf der Geraden g_ξ die sämmtlichen Punkte ausser resp. g^0 und $\mathfrak{s}^\varrho$ *). Fällt auch $\mathfrak{a}^\lambda$ in eine der Geraden g, so gilt von dem dem Strahl a^λ auf g_ξ entsprechenden Punkt Analoges.

Geht eine der Geraden g, etwa g_δ durch den Mittelpunkt eines der beiden Büschel, so verharrt der dem Punkt $\mathfrak{g}_\delta$ im Büschel $\mathfrak{a}^\lambda$ entsprechende Strahl in seiner Lage, nämlich wenn g_δ durch $\mathfrak{s}^\varrho$ geht, in dem gemeinschaftlichen Strahl a^λ_ϱ, wenn g_δ durch $\mathfrak{a}^\lambda$ geht, in g_δ, bis s^ϱ resp. den Strahl g_δ oder $s^\varrho_\lambda = a^\lambda_\varrho$ deckt, und nimmt, sobald s^ϱ diese verlassen, die alte Lage wieder ein; der ausgezeichneten Lage von s^ϱ in resp. g_δ oder s^ϱ_λ aber entsprechen auf der Geraden g_δ im ersten Fall die sämmtlichen Punkte ausser $\mathfrak{s}^\varrho$, im zweiten der einzige Punkt $\mathfrak{a}^\lambda$, in beiden Fällen im Büschel $\mathfrak{a}^\lambda$ die sämmtlichen Strahlen ausser resp. a^λ_ϱ und g_δ *). Geht auch g_ξ durch einen der Mittelpunkte $\mathfrak{s}^\varrho$, $\mathfrak{a}^\lambda$, so gilt von dem dem Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ in $\mathfrak{a}^\lambda$ entsprechenden Strahl Analoges.

Hieraus und aus No. 27 ergiebt sich von selbst das Resultat für den Fall,

dass der Mittelpunkt eines der beiden Büschel mit $\mathfrak{g}^0$ zusammenfällt.

dass eine der Geraden g mit $a^\lambda_\varrho = s^\varrho_\lambda$ zusammenfällt.

32. Wüssten wir eine Gerade g_ν, welche die Eigenschaft hat, dass, während sie von einem ihrer Punkte $\mathfrak{g}_\nu$ in beliebigem aber ein und demselben Sinne stetig durchlaufen wird, alle Strahlbüschel der Ebene, deren Mittelpunkte nicht in ihr liegen, von dem mit $\mathfrak{g}_\nu$ perspectivischen Strahle in gleichem Drehsinn beschrieben werden, welches auch die allgemeine De-

*) Schroeter, die Theorie der Kegelschnitte §. 19a.

finition für die Gleichheit des Drehsinnes in zwei nicht concentrischen Strahlbüscheln sei, wofern sie nur in das in No. 17 angegebene Kriterium übergeht, sobald die Mittelpunkte der beiden Büschel zusammenfallen, so würden wir mit Rücksicht auf No. 17 folgendes specielle Kriterium erhalten: Je zwei nicht concentrische Strahlbüschel der Ebene, deren Mittelpunkte ausserhalb der Geraden g_ν liegen, werden jeder von einem seiner Strahlen in gleichem oder ungleichem Drehsinne beschrieben, je nachdem die Spuren der laufenden Strahlen in der Geraden g_ν sich in gleichem oder ungleichem Richtungssinne bewegen.

Durch Anwendung des Satzes in No. 31, wenn g_ν eine der beliebig in der Ebene gelegenen Geraden g_δ, g_ξ vertritt, folgt dann:

a) Wird eine beliebige von g_ν verschiedene Gerade g_δ der Ebene von einem ihrer Punkte $\mathfrak{g}_\delta$ in einem bestimmten Sinne durchlaufen, so beschreiben die mit $\mathfrak{g}_\delta$ perspectivischen Strahlen aller Strahlbüschel, deren Mittelpunkte ausserhalb der Geraden g_ν und g_δ befindliche Punkte des einen der von g_ν und $\mathfrak{g}_\delta$ begrenzten Winkel sind, ihre Büschel in gleichem Drehsinne, die mit $\mathfrak{g}_\delta$ perspectivischen Strahlen aller Strahlbüschel, deren Mittelpunkte ausserhalb der Geraden g_ν und g_δ befindliche Punkte des anderen Winkels $g_{(\nu\delta)}$ sind, ihre Büschel ebenfalls in unter sich gleichem, aber dem der ersteren entgegengesetzten Drehsinne.

b) Die Grenze zwischen diesen beiden Gruppen von Büscheln, also den Uebergang von den einen zu den anderen bilden die Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in den Geraden g_δ und g_ν liegen. Da sie gemäss ihrer Lage als Grenzgebilde beiden der bezeichneten Gruppen angehören, so müssen sie die Eigenschaften beider in sich vereinigen; der ihnen durch die Bewegung von $\mathfrak{g}_\delta$ ertheilte Bewegungssinn muss das Resultat sein, wenn wir uns den laufenden Strahl sowohl dem Bewegungssinn der einen wie dem der anderen Gruppe (dem entgegengesetzten) folgend denken, kann also mit keinem derselben verglichen werden. In den Strahlbüscheln, deren Mittelpunkte die Punkte der Geraden g_δ sind, erscheint dieser resultirende Bewegungssinn in der in No. 30*c* und 31*d* angegebenen Weise, in den Strahlbüscheln, deren Mittelpunkte die Punkte der Geraden g_ν sind, jedenfalls in anderer Weise, da hier je zwei verschiedenen Lagen von $\mathfrak{g}_\delta$ auch zwei verschiedene Strahlen entsprechen (No. 2, 6, 18).

c) Daraus folgt nun, dass, wenn es überhaupt in der Ebene eine Gerade von der Beschaffenheit giebt, wie wir sie von g_ν angenommen haben, es nur eine einzige der Art geben kann, dass diese sich durch ihre Lage von den anderen unterscheiden und als eine ausgezeichnete kennzeichnen muss; denn die von vornherein von ihr vorausgesetzte wie die in *b*) daraus ge-

folgerte Eigenschaft der Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in ihr liegen, kommen dieser Geraden an sich zu, sind an keine sonstigen Daten geknüpft, von denen sie abhängig wären.

§. 8. Die unendlich entfernte Gerade als Grenzgerade.

A. Eine Punktreihe und ein Strahlbüschel.

33. Da unsere bisherigen Untersuchungen lediglich in einer Ausbeutung der in §. 1 gestellten Voraussetzungen, vorzüglich der Eigenschaften der Stetigkeit und der sich schliessenden Aufeinanderfolge der Elemente in den Grundgebilden bestehen, und wohl in der Anschauung eine Erläuterung finden, deren aber zur Beweisführung nicht bedürfen (vergl. No. 4); da ferner aber die Voraussetzungen des §. 1 gemäss No. 2, 3, 7 auch für die unendlich entfernten Elemente und Träger von Grundgebilden in gleicher Weise gelten, wie für die endlichen (No. 25), so müssen jene den erhaltenen Eigenschaften und Gesetzen ebenso unterworfen sein wie diese, obwohl sie sich der Anschauung entziehen; nur werden eben deswegen die Sätze sich oft etwas einfacher gestalten. Ja wir werden finden, dass Eigenschaften, welche in ihrer einfacheren Form an den unendlich fernen Elementen auffallen und diesen eigenthümlich zu sein scheinen, allgemein allen Elementen der Ebene (Punkten und Geraden) in gleicher Weise zukommen.

34. Wählen wir daher statt der beliebigen Geraden a_{ψ}^{λ} die unendlich entfernte Gerade g_{∞} als Grenzgerade, und ist $\mathfrak{s}^{\varrho}$ irgend ein endlicher oder unendlich entfernter Punkt der Ebene, s_{λ}^{ϱ} ein beliebiger Strahl des Büschels $\mathfrak{s}^{\varrho}$, $\mathfrak{g}_{\infty}^{\lambda} = \mathfrak{s}_{\lambda}^{\infty}$ der mit der unendlich entfernten Geraden gemeinschaftliche Punkt desselben und g_{χ}^{λ} ein beliebiger von $s_{\lambda}^{\varrho} = g_{\varrho}^{\lambda}$ und g_{∞} verschiedener Strahl des Büschels $\mathfrak{g}_{\infty}^{\lambda}$, so folgt aus No. 21*a* mit Rücksicht auf No. 25:

a) Jede Gerade g der Ebene wird durch die mit g_{ϱ}^{λ} und g_{∞} perspectivischen Punkte $\mathfrak{g}^{\varrho}$ und $\mathfrak{g}^{\infty}$ in zwei Halbstrahlen getheilt, von denen der eine $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\infty)}$ ganz mit allen seinen Punkten in der einen der beiden Halbebenen in Bezug auf $g_{\varrho}^{\lambda} = s_{\lambda}^{\varrho}$, $g_{(\varrho\chi\infty)}^{\lambda}$, der andere $\mathfrak{g}^{\chi(\varrho\infty)}$ ganz mit allen seinen Punkten in der anderen Halbebene $g_{\chi(\varrho\infty)}^{\lambda}$ liegt. In allen mit $\mathfrak{g}_{\infty}^{\lambda}$ perspectivischen Geraden wie z. B. g_{χ}^{λ} wird der eine der beiden Halbstrahlen (No. 25) gleich Null, der andere wird gleich dem ganzen Strahl, welcher demnach mit allen

seinen Punkten einer der beiden Halbebenen in Bezug auf $s^\varrho_\lambda = g^\lambda_\varrho$ angehört (vergl. No. 11*a*).

Die Geraden g^λ_ϱ und g_∞ gehören ihrer Eigenschaft als Grenzgeraden gemäss jeder der beiden Halbebenen an.

b) Da alle Strahlen s^ϱ des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ mit dem beliebigen Strahl s^ϱ_λ desselben den Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ gemeinschaftlich haben, so folgt

1. Die beiden Halbstrahlen eines jeden Strahles eines ebenen Strahlbüschels in Bezug auf den Mittelpunkt, dieser mag ein endlicher oder ein unendlich entfernter Punkt sein, liegen in Bezug auf jeden der übrigen Strahlen desselben in verschiedenen Halbebenen, jeder mit allen seinen Punkten in einer (No. 11*a*).

2. Ein Halbstrahl eines Büschels liegt in Bezug auf irgend einen anderen Strahl desselben Büschels in allen seinen Punkten auf derselben Halbebene, auf welcher einer seiner vom Mittelpunkt verschiedenen Punkte sich befindet.

35. Aus No. 21*c*, 22, 24, 25 folgt ferner:

a) Lassen wir einen Strahl s^ϱ von der Lage s^ϱ_λ aus den Strahlbüschel $\mathfrak{s}^\varrho$ in einem bestimmten Bewegungssinne Δ stetig durchlaufen, bis er einen Umlauf vollendet und wieder nach s^ϱ_λ gelangt, so muss der eine Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)} = \mathfrak{s}^{(\varrho\chi\infty)}$ stetig die eine der beiden Halbebenen in Bezug auf $s^\varrho_\lambda = g^\lambda_\varrho$, $g^\lambda_{(\varrho\chi\infty)} = g^\lambda_{(\varrho|\infty)}$ beschreiben, in allen seinen Lagen während dieses ersten Umlaufes und in allen seinen Punkten in dieser Halbebene liegen und es kann keinen vom Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ verschiedenen Punkt derselben geben, welcher von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ während eines Umlaufes mehr als einmal oder keinmal getroffen würde; der andere Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)} = \mathfrak{s}^{\chi(\varrho\infty)}$ aber muss in gleicher Weise die andere Halbebene $g^\lambda_{\chi(\varrho\infty)}$ beschreiben.

b) Es wird demnach, während s^ϱ von s^ϱ_λ an einen Umlauf macht, ganz allgemein jede endliche Gerade g der Ebene in allen von den Grenzpunkten verschiedenen Punkten eines und desselben Halbstrahles in Bezug auf den mit g^λ_ϱ gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ von einem und demselben Halbstrahl

von s^ϱ in Bezug auf den Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ getroffen, in allen Punkten des anderen Halbstrahles von dem anderen; nämlich in allen Punkten des in der Halbebene $g^\lambda_{(\varrho\chi\infty)} = g^\lambda_{(\varrho|\infty)}$ $\left(g^\lambda_{\chi(\varrho\infty)} = g^\lambda_{(\varrho-\infty)}\right)$ gelegenen Halbstrahls $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\infty)} = \mathfrak{g}^{(\varrho|\infty)}$ $\left(\mathfrak{g}^{\chi(\varrho\infty)} = \mathfrak{g}^{(\varrho-\infty)}\right)$ von dem im Sinne Δ diese Halbebene von der Anfangslage $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_\lambda$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_\lambda\right)$ an beschreibenden Halbstrahles $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}\right)$; und zwar:

1. jede Gerade, welche mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch liegt, also ein Strahl s^ϱ_ξ des Büschels ist, während s^ϱ die einzige mit s^ϱ_ξ zusammenfallende Lage hat;

2. jede endliche Gerade g_ξ, welche nicht mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch ist und einen endlichen Punkt $\mathfrak{g}^\varrho_\xi$ mit dem Anfangsstrahl s^ϱ_λ gemeinschaftlich hat, während s^ϱ den mit dem Halbstrahl $\mathfrak{g}^{(\varrho\chi\infty)}_\xi = \mathfrak{g}^{(\varrho|\infty)}_\xi$ $\left(\mathfrak{g}^{\chi(\varrho\infty)}_\xi = \mathfrak{g}^{(\varrho-\infty)}_\xi\right)$ perspectivischen Winkel $s^\varrho_{(\varrho\chi\infty)^\xi} = s^\varrho_{(\lambda|\xi)}$ $\left(s^\varrho_{\chi(\varrho\infty)^\xi} = s^\varrho_{(\lambda-\xi)}\right)$ beschreibt, welcher nach No. 18*d* nur einen Theil des Büschels ausmacht;

3. jede endliche Gerade g, welche nicht mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivisch ist und mit s^ϱ_λ den unendlich entfernten Punkt gemeinschaftlich hat, während s^ϱ continuirlich den ganzen Büschel beschreibt.

c. Von beiden Halbstrahlen, $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ sowohl, als $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ werden getroffen:

Die unendlich entfernte Gerade g_∞ in allen Lagen von s^ϱ;

jede mit $\mathfrak{s}^\varrho$ perspectivische Gerade in allen Lagen von s^ϱ ausser einer, der mit ihr zusammenfallenden;

jede andere endliche Gerade nur in einer Lage von s^ϱ, der mit ihrem unendlich entfernten Punkt perspectivischen.

Jede Gerade der Rubrik b^2 wird in dem mit s^ϱ_λ gemeinschaftlichen Grenzpunkte $\mathfrak{g}^\varrho$ von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ oder $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ getroffen, je nachdem der Punkt $\mathfrak{g}^\varrho$ der Anfangslage des einen, $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_\lambda$, oder der des anderen $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_\lambda$, angehört.

*d*1. Auf den Geraden der Rubrik b^1 ist eine Bewegung (No. 1) des dem Strahl s^ϱ entsprechenden Punktes, also ein eigentlicher Bewegungssinn nicht vorhanden, also auch nicht vergleichbar mit einem anderen Bewegungssinne.

2. Von den Geraden der Rubrik b^2 bewegt sich (No. 24) der dem Strahl s^ϱ entsprechende Punkt auf allen, welche s^ϱ_λ in einem Punkte des Halbstrahles $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ schneiden, im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho \chi \infty}$, auf allen, welche s^ϱ in einem Punkte des Halbstrahles $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ schneiden, im Sinne $\mathfrak{g}^{\varrho \infty \chi}$.

3. In den Geraden der Rubrik b^3 lässt sich über den Bewegungssinn des dem Strahl s^ϱ entsprechenden Punktes unter den angenommenen Verhältnissen nichts bestimmen; da aber dieser Bewegungssinn nicht von dem Anfangselement abhängt, so können wir einen anderen Strahl s^ϱ_ν als Anfangsstrahl wählen, in Bezug auf welchen die zu untersuchenden Geraden der Rubrik b^2 einzureihen sind. Vergl. No. 29, 30.

e) Ein Uebergehen des dem Strahl s^ϱ auf einer Geraden g_ξ, welche mit $\mathfrak{s}^\varrho$ nicht perspectivisch ist, entsprechenden Punktes $\mathfrak{g}_\xi$ von einem Halbstrahl in Bezug auf den Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf den anderen kann nur stattfinden und findet stets statt, wenn der Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ auf g_ξ den unendlich entfernten Punkt überschreitet*) (No. 21*b*), also während eines ganzen Umlaufes des Strahles s^ϱ nur einmal. Umgekehrt bleibt, während s^ϱ einen Theil des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$, einen Winkel beschreibt, der auf einer Geraden g_ξ entsprechende Punkt auf demselben Halbstrahl, also der der einen Grenzlage entsprechende auf demselben als der der anderen Grenzlage entsprechende, so enthält die in dem Winkel liegende Strecke den unendlich entfernten Punkt nicht; und sie enthält ihn stets, wenn der eine der Grenzpunkte von dem einen, der andere von dem anderen Halbstrahl von s^ϱ getroffen wird.

B. Folgerungen. Halbebene. Halbstrahlbüschel. Der unendlich entfernte Punkt.

36. *a.* Wir haben wiederholt hervorgehoben, dass gewisse Eigenschaften für alle Gebilde resp. Elemente von Gebilden innerhalb gewisser genau festgestellter Grenzen gelten, ausserhalb derselben aber für keines, sondern durch andere die ersteren ausschliessende Eigenschaften ersetzt werden. Die Umkehrungen von Sätzen, welche solche Eigenschaften betreffen, müssen ebenfalls richtig sein und in ihrer ganzen Ausdehnung gelten.

---

*) v. Staudt, Geometrie der Lage No. 55.

b) Aus No. 35*eb* folgt mit Rücksicht darauf, dass der Anfangsstrahl s^ϱ_λ ein beliebiger Strahl des Büschels ist:

Schneidet der irgend einen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^\varrho$ in demselben Bewegungssinne stetig durchlaufende Strahl s^ϱ beliebige Gerade derselben Ebene, welche mit dem Mittelpunkt des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ nicht perspectivisch sind, in n aufeinanderfolgenden Lagen jede derselben nur in endlichen Punkten, so wird jede dieser Geraden in allen n Punkten von demselben Halbstrahl des laufenden Strahles s^ϱ getroffen, von welchem sie in einem dieser Punkte getroffen wird, und alle Gerade, deren Schnittpunkte mit s^ϱ in einer der n Lagen demselben Halbstrahl von s^ϱ, angehören, werden in allen n Lagen von demselben Halbstrahl getroffen.

Der Satz gilt auch dann, wenn s^ϱ sich continuirlich in dem Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ bewegend, seinen Drehsinn innerhalb der n aufeinanderfolgenden Lagen ein- oder mehrmal ändert.

c) Von dem ein Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt irgend ein Punkt $\mathfrak{s}$ einer Geraden s ist, in irgend einem, aber einem und demselben Sinne von s aus einmal durchlaufenden Strahl s^ϱ müssen zwei Punkte derselben Halbebene in Bezug auf s mit demselben, zwei Punkte, welche auf verschiedenen Halbebenen in Bezug auf s liegen, aber der eine mit dem einen, der andere mit dem anderen Halbstrahl in Bezug auf den Mittelpunkt $\mathfrak{s}$ getroffen werden; dies gilt auch von dem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der die beiden Punkte enthaltenden und durch dieselben bestimmten (No. 2) Geraden mit s ist; die beiden gegebenen Punkte müssen daher im ersten Fall auf demselben Halbstrahl dieser Geraden in Bezug auf den Schnittpunkt mit s liegen, im zweiten auf verschiedenen Halbstrahlen. Das heisst:

1. Die Verbindungsgerade $b^\varkappa_\nu = b^\nu_\varkappa$ zweier Punkte $\mathfrak{b}^\varkappa$, $\mathfrak{b}^\nu$ wird von einer anderen Geraden s in einem Punkt der Strecke $\mathfrak{b}^{(\varkappa\nu)\infty}$ getroffen, wenn die Punkte $\mathfrak{b}^\varkappa$ und $\mathfrak{b}^\nu$ auf verschiedenen Halbebenen in Bezug auf s liegen, in einem Punkt der Strecke $\mathfrak{b}^{(\varkappa\infty\nu)}$, wenn $\mathfrak{b}^\varkappa$ und $\mathfrak{b}^\nu$ auf derselben Halbebene in Bezug auf s liegen, und umgekehrt.

2. Sind $\mathfrak{b}^\varkappa$ und $\mathfrak{b}^\nu$ zwei aufeinanderfolgende, also unendlich nahe Punkte, so ist die Strecke $\mathfrak{b}^{(\varkappa\nu)\infty}$ der Geraden $b^\varkappa_\nu$ gleich Null; die Gerade $b^\varkappa_\nu$ kann von allen Geraden, von denen sie nicht in den Punkten $\mathfrak{b}^\varkappa$ und $\mathfrak{b}^\nu$ selbst getroffen wird, nur in Punkten der Strecke $\mathfrak{b}^{(\varkappa\infty\nu)}$ getroffen werden. Also:

Zwei aufeinanderfolgende endliche Punkte befinden sich in Bezug auf jede Gerade, welche mit ihnen in derselben Ebene, aber mit keinem perspectivisch liegt, stets auf derselben Halbebene und in Bezug auf jeden der übrigen Punkte ihrer Verbindungslinie auf demselben Halbstrahl.

37. Durch Vergleichung von No. 21*c* oder 35*a* und 10 folgt: Der eine der beiden einfachen Winkel, aus denen ein vollkommener Winkel, dessen Strahlen nur einen Theil eines Strahlbüschels bilden, besteht und welcher s_λ^ϱ entweder gar nicht, oder nur als Grenzstrahl enthält, liegt ganz mit allen seinen Halbstrahlen und den diesen zugehörigen Punkten auf einer der beiden Halbebenen in Bezug auf s_λ^ϱ, der andere einfache Winkel, der Scheitelwinkel des ersteren, ganz auf der anderen. Also:

a) Die beiden einfachen Winkel eines jeden vollkommenen Winkels mit endlichem Mittelpunkt, der nur einen Theil des concentrischen Strahlbüschels bildet, liegt in Bezug auf jeden der beiden Grenzstrahlen, wie in Bezug auf jeden Strahl des Ergänzungswinkels auf entgegengesetzten Halbebenen, jeder mit allen seinen Halbstrahlen auf einer.

b) *n* in demselben oder in ein- oder mehrmal geändertem Drehsinne aber stetig aufeinanderfolgende Lagen desselben Halbstrahles eines stetig in einem Strahlbüschel sich bewegenden Strahles liegen in Bezug auf jeden der übrigen Strahlen des Büschels, d. i. in Bezug auf jeden Strahl desselben, mit welchem der bewegliche Strahl in keiner dieser *n* Lagen zusammenfällt, auf derselben Halbebene.

c) Liegt der eine Halbstrahl eines Strahles $s_\varkappa^\varrho$ und der eine Halbstrahl eines Strahles s_μ^ϱ in Bezug auf einen anderen Strahl s_π^ϱ desselben Büschels auf derselben oder auf entgegengesetzten Halbebenen, so liegen sie in Bezug auf jeden Strahl des Winkels $s_{(\mu\pi\varkappa)}^\varrho$ auf derselben, resp. auf entgegengesetzten Halbebenen und in Bezug auf jeden Strahl des Winkels $s_{(\varkappa\mu)\pi}^\varrho$ resp. auf entgegengesetzten Halbebenen oder auf derselben.

d) Sind s_λ^ϱ und s_μ^ϱ zwei aufeinanderfolgende Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$, so enthält der Winkel $s_{(\lambda\mu)\nu}^\varrho$ keinen Strahl; daher folgt aus vorigem Satz mit Rücksicht auf No. 34b^2: Befinden sich irgend zwei endliche von $\mathfrak{s}^\varrho$ verschiedene Punkte $\mathfrak{s}_\lambda^\eta$, $\mathfrak{s}_\mu^\varepsilon$ zweier aufeinanderfolgender Strahlen s_λ^ϱ, s_μ^ϱ eines Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ in Bezug auf irgend einen

der übrigen Strahlen auf derselben oder auf entgegengesetzten Halbebenen, so liegen sie und die sie enthaltenden Halbstrahlen $\mathfrak{s}_{\lambda}^{(\varrho\eta\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{\mu}^{(\varrho s\infty)}$ in Bezug auf jeden der übrigen Strahlen auf derselben resp. auf entgegengesetzten Halbebenen.

Diese Sätze gelten, $\mathfrak{s}^{\varrho}$ mag ein endlicher oder unendlich entfernter Punkt sein (No. 25, $a_{\psi}^{\lambda} = g_{\infty}$).

38. Jeder der beiden Halbstrahlen von s^{ϱ} bildet, wenn s^{ϱ} von s_{λ}^{ϱ} an den Büschel $\mathfrak{s}^{\varrho}$ einmal durchlaufen und wieder nach s_{λ}^{ϱ} gelangt ist, die Ergänzung zu demjenigen Halbstrahl, welchen er am Anfange der Bewegung deckte, und muss beim zweiten Umlauf von s^{ϱ} in demselben Sinne $\varDelta$ die der beim ersten Umlauf durchlaufenen entgegengesetzte Halbebene beschreiben, so dass er nach Beendigung des zweiten Umlaufes dieselbe Lage hat, als am Anfange der Bewegung (No. 23 *a*).

a) Demnach kann jede der beiden Halbebenen in Bezug auf irgend einen der Büschelstrahlen gemäss No. 10 und 35 *a* als ein einfacher Winkel angesehen werden*), dessen vollkommener Winkel der ganze Strahlbüschel ist. Also zufolge No. 12 *a* und 23 *d*: Derselbe Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}(\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)})$, welcher von der Lage $\mathfrak{s}_{\lambda}^{(\varrho|\infty)}\left(\mathfrak{s}_{\lambda}^{(\varrho-\infty)}\right)$ aus in dem Drehsinne $\varDelta$ von s^{ϱ} die Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}\left(\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}\right)$ beschreibt, beschreibt in dem entgegengesetzten Drehsinne $\overline{\varDelta}$ die andere Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho|\infty)}\left(\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho-\infty)}\right)$, und dieselbe Halbebene, welche, während s^{ϱ} im Sinne $\varDelta$ den Büschel beschreibt, von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ aus der Anfangslage $\mathfrak{s}_{\lambda}^{(\varrho|\infty)}$ beschrieben wird, wird in dem Drehsinne $\overline{\varDelta}$ von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ aus der Anfangslage $\mathfrak{s}_{\lambda}^{(\varrho-\infty)}$ beschrieben, so dass $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)} = \mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho|\infty)} = \mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$, wie auch aus der Bezeichnung nach No. 15 hervorgeht.

b) Die sämmtlichen Lagen eines der beiden Halbstrahlen $\mathfrak{s}^{(\varrho\infty)}$ während zweier aufeinanderfolgender Umläufe von s^{ϱ} in demselben Bewegungssinne erfüllen daher die ganze Ebene und sind ein Gebilde, von welchem die Voraussetzung in No. 1 und die daraus hervorgehenden Folgerungen, wie die in §. 5, in ihrer ganzen Ausdehnung gelten; wir nennen es ein Halbstrahlenbüschel; jeder von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ verschiedene Punkt der Ebene liegt mit einem Halbstrahl dieses Halbstrahlbüschels in einer und nur einer Lage perspectivisch.

---

*) v. Staudt, Geometrie der Lage No. 22.

39. Die Halbstrahlen $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ von s_λ^ϱ sind zwei Elemente des Halbstrahlbüschels, welche dasselbe in zwei Intervalle, Halbebenen theilen, die wir entsprechend dem Princip in No. 15a mit $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ oder resp. mit $\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ in Bezug auf den Drehsinn $\varDelta$ bezeichnen, je nachdem wir uns das laufende Element in der Lage $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ oder in der $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ denken (vergl. No. 38a). Von einem zweiten Strahl s_ν^ϱ gehört nach No. 34b^1 der eine Halbstrahl $\mathfrak{s}_\nu^{(\varrho|\infty)}$ der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}=\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ an und der andere $\mathfrak{s}_\nu^{(\varrho-\infty)}$ der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}=\mathfrak{s}_{(\lambda-\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$. Jede der Halbebenen in Bezug auf s_λ^ϱ wird daher, als Intervall des Halbstrahlbüschels aufgefasst, durch den in ihr enthaltenen Halbstrahl von s_ν^ϱ in zwei Theile getheilt, die gemäss No. 15a in der Reihenfolge, wie sie von dem im Sinne $\varDelta$ den Halbstrahlbüschel von $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ an durchlaufenden Halbstrahl beschrieben werden, folgendermassen zu bezeichnen sind:

$$\mathfrak{s}_{(\lambda|\nu)}^{(\varrho|\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\nu|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\lambda|\nu)}^{(\varrho-\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\nu|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$$

oder resp.

$$\mathfrak{s}_{(\nu-\lambda)}^{(\varrho|\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\lambda-\nu)}^{(\varrho-\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\nu-\lambda)}^{(\varrho-\infty)}\quad \mathfrak{s}_{(\lambda-\nu)}^{(\varrho|\infty)}.$$

Der erste und dritte dieser einfachen Winkel ergänzen sich als Scheitelwinkel zu dem vollkommenen Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho=s_{(\nu-\lambda)}^\varrho$ und ebenso der zweite und vierte zu dem Winkel $s_{(\nu|\lambda)}^\varrho=s_{(\lambda-\nu)}^\varrho$. Während nun s^ϱ von s_λ^ϱ aus im Sinne $\varDelta$ einen Umlauf macht, beschreiben gleichzeitig (No. 21c und 35a) der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ von $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ aus die Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$, der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ von $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ aus die Halbebene $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$; die beiden Halbstrahlen bewegen sich in gleichem (Drehsinn) Bewegungssinn; wir können daher No. 17 anwenden und erhalten, indem wir noch bemerken, dass, was von dem willkürlich gewählten Strahl s_λ^ϱ festgesetzt ist, auf jeden beliebigen anderen Strahl s_ξ^ϱ angewendet werden kann.

a) Während s^ϱ im Sinne $\varDelta$ von s_λ^ϱ aus den Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ einmal durchläuft, ist den Halbebenen $\mathfrak{s}_{(\xi|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ in Bezug auf alle Lagen s_ξ^ϱ des Winkels $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho$ der einfache Winkel $\mathfrak{s}_{(\nu|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ gemeinschaftlich mit allen seinen Halbstrahlen und ausser diesen keiner,

in Bezug auf alle Lagen s_ξ^ϱ des Winkels $s_{(\nu|\lambda)}^\varrho$ der einfache Winkel $\mathfrak{z}_{(\lambda|\nu)}^{(\varrho-\infty)}$ in gleicher Weise; den Halbebenen $\mathfrak{z}_{(\xi-\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ aber ist in Bezug auf alle Lagen s_ξ^ϱ des Winkels $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho$ der einfache Winkel $\mathfrak{z}_{(\nu|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ und in Bezug auf alle Lagen s_ξ^ϱ des Winkels $s_{(\nu|\lambda)}^\varrho$ der einfache Winkel $\mathfrak{z}_{(\lambda|\nu)}^{(\varrho|\infty)}$ gemeinschaftlich.

b) Aus No. 15 *ad* und 34 b^1 ergiebt sich:

Während s^ϱ von s_λ^ϱ aus im Sinne $\varDelta$ stetig den Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho$ beschreibt, liegen auf derselben Halbebene $\mathfrak{z}_{(\xi-\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ in Bezug auf jede seiner Lagen s_ξ^ϱ der von dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ beschriebene einfache Winkel $\mathfrak{z}_{(\lambda\xi)\nu}^{(\varrho|\infty)}$ von $s_{(\lambda\xi)\nu}^\varrho$ und von $s_{\lambda(\xi\nu)}^\varrho$ der einfache Winkel $\mathfrak{z}_{\lambda(\xi\nu)}^{(\varrho-\infty)}$, welcher von dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ beschriebene wird; auf der Halbebene $\mathfrak{z}_{(\xi|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ aber liegen die einfachen Winkel $\mathfrak{z}_{\lambda(\xi\nu)}^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{z}_{(\lambda\xi)\nu}^{(\varrho-\infty)}$; also in Bezug auf jede Lage s_ξ^ϱ im Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho$ liegen stets auf derselben Halbebene der von dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ beschriebene einfache Winkel des einen und der von dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ beschriebene einfache Winkel des anderen der beiden Theile, in welche der Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^\varrho$ durch s_ξ^ϱ zerfällt.

c) In Bezug auf jede Lage s_ξ^ϱ von s^ϱ während des ersten Umlaufes von s_λ^ϱ aus, in welchem die Halbstrahlen $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ von resp. $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ aus resp. die Halbebenen $\mathfrak{z}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{z}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ beschreiben, liegt der Halbstrahl $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ auf der Halbebene $\mathfrak{z}_{(\xi-\xi)}^{(\varrho|\infty)}$, daher $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ auf $\mathfrak{z}_{(\xi|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$, während des zweiten Umlaufes, in welchem die Halbstrahlen $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ und $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ von resp. $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ und $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ aus resp. die Halbebenen $\mathfrak{z}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ und $\mathfrak{z}_{(\lambda|\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ beschreiben, liegt der Halbstrahl $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho|\infty)}$ auf der Halbebene $\mathfrak{z}_{(\xi|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$, also $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho-\infty)}$ auf $\mathfrak{z}_{(\xi-\xi)}^{(\varrho|\infty)}$.

40. Durchläuft von demjenigen Halbstrahl $\mathfrak{z}_\lambda^{(\varrho\xi\infty)}$ von s_λ^ϱ aus, welcher den mit einer Geraden g_ξ der Rubrik b^2 in No. 35 gemeinschaftlichen Punkt

$\mathfrak{g}_\xi^\varrho = \mathfrak{s}_\lambda^\xi$ enthält, der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ im Bewegungssinne Δ stetig den Halbstrahlbüschel $\mathfrak{s}^\varrho$, so trifft er nach No. 21*b* und 35*b*² die Gerade g_ξ in den von $\mathfrak{g}_\xi^\varrho$ an stetig aufeinanderfolgenden Punkten des Halbstrahls $\mathfrak{g}_\xi^{(\varrho|\infty)}$, während er den einfachen Winkel $\mathfrak{s}_{(\lambda|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ beschreibt, bis er in die mit $\mathfrak{g}_\xi^\infty$ perspectivische Lage $\mathfrak{s}_\xi^{(\varrho|\infty)}$ gelangt; darauf so lange nicht, bis er in die Lage $\mathfrak{s}_\xi^{(\varrho-\infty)}$ gelangt ist, d. i. bis er die Halbebene $\mathfrak{s}_{(\xi|\xi)}^{(\varrho|\infty)}$ beschrieben, der Strahl s^ϱ also, dem $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ angehört, von s_ξ^ϱ aus einen ganzen Umlauf vollendet hat (No. 38); von da ab aber trifft der laufende Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ wieder die Gerade g_ξ, während er den Rest des Halbstrahlbüschels, den einfachen Winkel $\mathfrak{s}_{(\xi|\lambda)}^{(\varrho-\infty)}$ beschreibt, in den von $\mathfrak{g}_\xi^\infty$ an im gleichen Richtungssinne wie in $\mathfrak{g}_\xi^{(\varrho|\infty)}$ (No. 16) aufeinanderfolgenden Punkten von $\mathfrak{g}_\xi^{(\varrho-\infty)}$.
Lassen wir daher einen Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ die Gerade g_ξ von $\mathfrak{g}_\xi^\varrho$ ab im Sinne $\mathfrak{g}_\xi^{\varrho|\infty)}$ (No. 14*a*²) durchlaufen, so ist deswegen, weil er beim Ueberschreiten des unendlich entfernten Punktes $\mathfrak{g}_\xi^\infty$ von dem einen Halbstrahl $\mathfrak{s}_\xi^{(\varrho|\infty)}$ auf den anderen $\mathfrak{s}_\xi^{(\varrho-\infty)}$ rückt, der mit demselben perspectivische Halbstrahl des Halbstrahlbüschels $\mathfrak{s}^\varrho$ genöthigt, die Hälfte seines Gebildes, entsprechend einem ganzen Umlauf von s^ϱ zu überspringen, damit den hintereinanderfolgenden Lagen von $\mathfrak{g}_\xi$ hintereinanderfolgende Lagen desselben Halbstrahls entsprechen. Dadurch nur ist es möglich, dass das Halbstrahlbüschel, ein Gebilde von doppelt so grosser Mächtigkeit als die gerade Punktreihe, mit dieser in perspectivische Beziehung gebracht werden kann.

Die Modification, welche eintritt, wenn g_ξ eine Gerade der Rubrik *b*³ in No. 35, ergiebt sich schon hieraus von selbst, wenn wir beachten, dass die ganze Untersuchung ihrem Wesen nach dieselbe bleiben muss, nur einer der Halbstrahlen $\mathfrak{g}_\xi^{(\varrho\,\infty)}$ gleich Null, der andere gleich der ganzen Geraden g_ξ wird (No. 25).

Betreffs der Fälle, wenn $g_\xi = g_\infty$ oder eine Gerade der Rubrik *b*¹ in No. 35, vergleiche No. 35*c*.

41. Zufolge No. 25 und 33 gelten die in diesem Paragraphen angestellten Untersuchungen und abgeleiteten Sätze, sowohl wenn der Mittelpunkt des Büschels $\mathfrak{s}^\varrho$ ein endlicher, als wenn er ein unendlich entfernter Punkt ist; die eintretenden Modificationen wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ ein unendlich entfernter Punkt,

sind in denselben schon enthalten und lassen sich mit Berücksichtigung von No. 25, bezogen auf $a^{\lambda}_{\psi} = g_{\infty}$, leicht erkennen.

Dass, wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ eines ebenen Strahlbüschels ein endlicher Punkt und g_{ξ} irgend eine endliche den Punkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ nicht enthaltende Gerade ist, ihr unendlich entfernter Punkt beiden Halbstrahlen des mit ihm perspectivischen Strahles s^{ϱ}_{ξ} angehört, nach entgegengesetzten Richtungen zu liegen scheint,

dass, während ein Strahl s^{ϱ} den Büschel beschreibt, der ihm auf der Geraden g_{ξ} entsprechende Punkt beim Ueberschreiten des unendlich entfernten Punktes von einem Halbstrahl von s^{ϱ} auf den andern rückt,

sowohl in der dem unendlich entfernten Punkt vorhergehenden, wie in der ihm folgenden Lage auf derselben Halbebene in Bezug auf den mit dem unendlich entfernten Punkt perspectivischen Strahl (Parallelstrahl) liegt, in Bezug auf jeden mit einem endlichen Punkt $\mathfrak{g}^{\mu}_{\xi}$ perspectivischen Strahl aber in der auf $\mathfrak{g}^{\mu}_{\xi}$ folgenden Lage nach No. 34a und 18 auf der entgegengesetzten Halbebene sich befindet, als in der $\mathfrak{g}^{\mu}_{\xi}$ vorhergehenden Lage,

sind durchaus keine dem unendlich entfernten Punkt als solchem eigenthümliche Eigenschaften, sondern sie sind eine Folge der allgemeinen Sätze in No. 21b und 22; sie kommen, wenn wir statt der unendlich entfernten Geraden eine beliebige endliche Gerade a^{λ}_{ψ} als Grenzgerade wählen, auch jedem endlichen Punkt derselben in gleicher Weise zu:

sowohl beim Durchlaufen der einen Strecke $\mathfrak{z}^{(\varrho\psi)}$ von $\mathfrak{z}^{\varrho}$ aus, als beim Durchlaufen der anderen (in entgegengesetztem Richtungssinne, No. 12a) gelangen wir zu demselben;

wenn der dem Strahl s^{ϱ} auf g_{ξ} entsprechende Punkt den der Geraden g_{ξ} mit a^{λ}_{ψ} gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{g}^{\psi}_{\xi}$ überschreitet, geht er stets von der einen Strecke $\mathfrak{z}^{(\varrho\psi)}$ auf die andere über (No. 21b, 22), und

befindet sich in der dem Punkt $\mathfrak{g}^{\psi}_{\xi}$ vorhergehenden, wie in der auf ihn folgenden Lage in demselben der durch a^{λ}_{ψ} und den mit $\mathfrak{g}^{\psi}_{\xi}$ perspectivischen Strahl s^{ϱ}_{ξ} gebildeten Winkel, weil in diesem Falle a^{λ}_{ψ}, g_{ξ} und s^{ϱ}_{ξ} Strahlen des Büschels $\mathfrak{g}^{\psi}_{\xi}$ sind, also der eine mit allen seinen Punkten in einem der von den beiden anderen bestimmten Winkel sich befinden muss (No. 10); in jeder der übrigen Lagen $\mathfrak{g}^{\mu}_{\xi}$ aber fällt nach No. 2 $\mathfrak{g}_{\xi}$ nie mit

einem Punkt von a^λ_ψ zusammen; die dem Punkt $\mathfrak{g}^\mu_\xi$ vorhergehende und die ihm folgende Lage gehören daher nach No. 16 verschiedenen Strecken $\mathfrak{g}^{(\mu\psi)}_\xi$ an, also der eine dem einen, der andere dem anderen der von a^λ_ψ und dem mit $\mathfrak{g}^\mu_\xi$ perspectivischen Strahl s^ϱ_μ gebildeten Winkel (No. 18*bc*), werden aber beide von derselben Strecke $\mathfrak{s}^{(\varrho\psi)}$ getroffen (No. 21*b*).

C. Ein Strahlbüschel und zwei Punktreihen.

42. Aus No. 26 bis 28 folgt, wenn wir die unendlich entfernte Gerade g_∞ statt a^λ_ψ als Grenzgerade wählen, indem wir die Strahlen $s^\varrho_{\infty\delta}$, $s^\varrho_{\infty\xi}$ von $\mathfrak{s}^\varrho$, welche mit den den Geraden g_δ, g_ξ und der Grenzgeraden g_∞ gemeinschaftlichen Punkten, d. i. mit den unendlich entfernten Punkten von g_δ und g_ξ perspectivisch sind, kürzer mit s^ϱ_δ, s^ϱ_ξ und den mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{g}^o$ perspectivischen Strahl mit s^ϱ_o bezeichnen: Die den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels $\mathfrak{s}^\varrho$ auf zwei Geraden g_δ, g_ξ derselben Ebene entprechenden Punkte bilden in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{s}^\varrho$ und $\mathfrak{s}^\infty$ als Grenzpunkte

a) ein Punktepaar dritter Art:

α) auf jedem Strahl des Büschels:

1. wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf g_δ oder g_ξ oder im Schnittpunkte beider liegt, bei beliebiger Lage der Geraden g_δ, g_ξ (No. 27);
2. wenn eine der Geraden g_δ, g_ξ oder beide mit g_∞ zusammenfallen, bei beliebiger Lage der endlichen Geraden und des Punktes $\mathfrak{s}^\varrho$ (No. 28a^2, b^2).

β) nur auf einzelnen Strahlen des Büschels in allen anderen Fällen, also wenn sowohl g_δ als g_ξ endliche Gerade sind und nicht durch den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ gehen, nämlich

1. wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ ein endlicher Punkt, stets und nur auf den Parallelstrahlen zu g_δ und g_ξ, mögen diese durch einen endlichen Winkel von einander getrennt, unendlich nahe sein oder zusammenfallen (No. 26*b*);
2. wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ ein unendlich entfernter Punkt, stets und nur auf dem Strahl, welcher mit g_∞ zusammenfällt, und welcher hier die Parallelstrahlen vertritt (No. 28b^1),

und zwar Punktepaare dritter Art nach No. $12d^4$ nur (im Falle [β^2]) auf dem Strahl g_∞, nach No. $12d^3$ nur (im Fall [α^1]) auf dem mit g_δ oder g_ξ zusammenfallenden Strahl oder auf beiden, nach No. $12d'^2$ in allen anderen Fällen;

b) ein Punktepaar zweiter Art, nur wenn sowohl g_δ als g_ξ endliche Gerade sind und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein ausserhalb derselben befindlicher Punkt der Ebene ist, nämlich, wenn dies der Fall, die Parallelstrahlen s_δ^ϱ, s_ξ^ϱ, resp. die unendlich entfernte Gerade g_∞ von vornherein ausgenommen;

α) auf jedem der übrigen Strahlen des Büschels

1. bei beliebiger Lage der Geraden g_δ, g_ξ mit Berücksichtigung der schon erwähnten Beschränkungen, wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ ein unendlich entfernter Punkt (No. $28b^1$);
2. wenn g_δ und g_ξ unendlich nahe Gerade und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein beliebiger Punkt (No. $26b$);
3. wenn g_δ und g_ξ zwar durch einen endlichen Winkel getrennt sind, sich aber in einem unendlich entfernten Punkte schneiden und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punkt des Winkels $g_{(\delta\,\infty\,\xi)}$ ist, welcher die Gerade g_∞ enthält (No. $28a^1$);

β) nur auf einem Theil der Büschelstrahlen, wenn g_δ und g_ξ beliebige endliche durch einen endlichen Winkel von einander getrennte Gerade sind, die sich in einem endlichen Punkte schneiden, und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein beliebiger endlicher Punkt ausserhalb derselben, nämlich auf den sämmtlichen Strahlen des Winkels $s^\varrho_{(\delta\,o\,\xi)}$, welcher den Schnittpunkt $\mathfrak{g}^o$ enthält (No. $26b$);

c) ein Punktepaar erster Art, nur wenn g_δ und g_ξ zwei endliche und durch einen endlichen Winkel von einander getrennte, sonst beliebige Gerade sind und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein endlicher ausserhalb derselben gelegener Punkt der Ebene ist, nämlich wenn dies der Fall, die Parallelstrahlen s_δ^ϱ, s_ξ^ϱ ausgenommen,

α) auf jedem der übrigen Strahlen des Büschels, wenn g_δ und g_ξ sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, und $\mathfrak{s}^\varrho$ ein Punkt des Winkels $g_{(\delta\,\xi)\,\infty}$ ist, welcher g_∞ nicht enthält (No. $28a^1$);

β) nur auf einem Theil der Büschelstrahlen, stets wenn g_δ und g_ξ sich in einem endlichen Punkte schneiden, nämlich auf den sämmtlichen Strahlen des Winkels $s^\varrho_{o(\delta\,\xi)}$, welcher den Schnittpunkt $\mathfrak{g}^o$ nicht enthält (No. $26b$).

43. *a*) Aus No. 29 folgt, $a_{\psi}^{\lambda} = g_{\infty}$ gesetzt:

Beschreibt ein Strahl s^{ϱ} continuirlich in demselben Drehsinne einen ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^{\varrho}$, so bewegen sich die auf irgend zwei Geraden g_{δ}, g_{ξ} derselben Ebene entsprechenden Punkte $\mathfrak{g}_{\delta}^{\sigma}$, $\mathfrak{g}_{\xi}^{\sigma}$ von jedem derjenigen Büschelstrahlen aus, auf denen sie in Bezug auf den Mittelpunkt $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{s}^{\infty}$ als Grenzpunkte ein Punktepaar erster Art bilden, nach entgegengesetzten Halbebenen (wenn der Schnittpunkt $\mathfrak{g}^{0}$ der Geraden g_{δ}, g_{ξ} ein endlicher Punkt, der eine im Sinne $\mathfrak{g}^{\sigma 0 \infty}$, d. i. sich dem Schnittpunkt $\mathfrak{g}^{0}$ nähernd (No. 8*c*²), der andere im Sinne $\mathfrak{g}^{\sigma \infty 0}$, d. i. sich von $\mathfrak{g}^{0}$ entfernend); von jedem derjenigen Büschelstrahlen aus aber, auf denen sie ein Punktepaar der zweiten Art bilden, bewegen sich die auf g_{δ} und g_{ξ} entsprechenden Punkte auf dieselbe Halbebene (also, wenn $\mathfrak{g}^{0}$ ein endlicher Punkt, entweder beide sich dem Punkt $\mathfrak{g}^{0}$ nähernd, oder beide sich von ihm entfernend).

b) Auf denjenigen Strahlen s^{ϱ}, auf denen die Punkte $\mathfrak{g}_{\delta}^{\sigma}$, $\mathfrak{g}_{\xi}^{\sigma}$ ein Punktepaar dritter Art bilden, gehen sie in den Fällen $[\beta^{1 2}]$ in No. 42*a* je einer oder beide zugleich von dem einen Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho \infty)}$ auf den andern über (No. 25, 35*e*, 41).

Im Falle $[\alpha^{1}]$ in No. 42*a* verändert der der einen Geraden entsprechende Punkt seine Lage (d. i. die des Punktes $\mathfrak{s}^{\varrho}$) nicht und wird nur in der einen mit dieser Geraden zusammenfallenden Lage von s^{ϱ}, welcher auf der anderen der Schnittpunkt $\mathfrak{g}^{0}$ entspricht, durch die Summe der übrigen Punkte ersetzt (No. 27).

Im Falle $[\alpha^{2}]$ in No. 42*a* können wir, da die unendlich entfernte Gerade g_{∞} als Grenzgerade beiden Halbebenen in Bezug auf irgend eine endliche Gerade angehört, sowohl sagen: die Punkte $\mathfrak{g}_{\delta}^{\sigma}$, $\mathfrak{g}_{\xi}^{\sigma}$ bewegen sich in Bezug auf jede Lage von s^{ϱ} auf dieselbe, als sie bewegen sich auf entgegengesetzte Halbebenen.

§. 9. Abhängigkeit der entsprechenden Bewegungssinne in zwei perspectivisch auf einander bezogenen Grundgebilden (Punktreihe, Strahlbüschel) von der relativen Lage ihrer Träger.

44. Beziehen wir irgend zwei Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt perspectivisch auf einander durch die unendlich entfernte Gerade, so dass je zwei entsprechende Strahlen parallel sind, so lehrt die Anschauung, dass

der einem beliebigen Drehsinn des einen Büschels in dem anderen (No. 6, 19) entsprechende stets diesem gleich ist*), wir mögen die Kennzeichnung jedes der beiden in jedem ebenen Strahlbüschel (No. 1) möglichen Bewegungssinne an sich auf die in der „Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" von Steiner auf pag. 46 oder auf die in der „Theorie der Kegelschnitte" von Herrn Schroeter in §. 4, pag. 3 angegebenen Weise ausführen; jede dieser Methoden ist nur auf Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt und auf jedes solche Strahlbüschel anwendbar, also jedesmal und nur dann, wenn beim Uebergange des laufenden Strahles aus einer Lage in die nächstfolgende eine eigentliche Drehung stattfindet, welche ihrem Begriffe nach das Vorhandensein eines endlichen Punktes als festen Drehungscentrums voraussetzt.

a) Die unendlich entfernte Gerade hat daher, wie sie durch ihre Lage vor allen anderen Geraden der Ebene ausgezeichnet ist, die in No. 32 von der Geraden g_v angenommene ausgezeichnete Eigenschaft, dass demselben Richtungssinn in ihr in allen Strahlbüscheln mit endlichem Mittelpunkt derselben Ebene der gleiche Drehsinn entspricht, und umgekehrt. Daher erhalten wir aus No. 30, 31, wenn wir eine der beliebigen Geraden g_δ, g_ξ uns durch g_∞ vertreten denken, folgende Sätze:

b. Sind irgend zwei Strahlbüschel $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{s}^\varrho$ mit endlichem Mittelpunkt auf eine endliche Gerade g_δ derselben Ebene, welche keinem derselben als Strahl angehört, perspectivisch bezogen,

1. so sind die einem beliebigen Richtungssinne von g_δ entsprechenden Drehsinne in $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ einander gleich, wenn die Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ sich auf derselben Halbebene in Bezug auf g_δ befinden, und entgegengesetzt, wenn auf verschiedenen,

2. so ist der einem Drehsinn des einen Büschels im anderen entsprechende ihm gleich, wenn der beiden Büscheln gemeinschaftliche Strahl $s_\lambda^\varrho = a_\varrho^\lambda$ von g_δ in einem Punkte der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\infty\lambda)}$, ihm entgegengesetzt, wenn s_λ^ϱ von g_δ in einem Punkt der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\lambda)\infty}$ getroffen wird (No. 36*c*).

c) Werden zwei Strahlbüschel derselben Ebene mit endlichen Mittelpunkten $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{s}^\varrho$ jeder von einem seiner Strahlen resp. a^λ und s^ϱ in beliebigem Drehsinn beschrieben, so bewegen sich in jeder Geraden der Ebene, welche den Strahl s_λ^ϱ in

*) Schroeter, Theorie der Kegelschnitte 1867. §. 19c.

einem Punkte der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\infty\lambda)}$ schneidet, auch auf der unendlich entfernten Geraden, die den Strahlen a^λ und s^ϱ entsprechenden Punkte in gleichem Richtungssinn, wenn die Strahlbüschel in gleichem, in entgegengesetztem Richtungssinne, wenn die Strahlbüschel in entgegengesetztem Drehsinne durchlaufen werden, und umgekehrt; auf jeder Geraden jedoch, welche den Strahl s_λ^ϱ in einem Punkt der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\lambda)\infty}$ schneidet, bewegen sich die den Strahlen a^λ und s^ϱ entsprechenden Punkte in gleichem Richtungssinne, wenn die Strahlbüschel in entgegengesetztem, in entgegengesetztem Richtungssinne, wenn die Strahlbüschel in gleichem Drehsinne durchlaufen werden, und umgekehrt. Betreffs der Geraden, welche durch einen der Punkte $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{s}^\varrho$ gehen, vergl. No. 30*c*, 31*d*, 43*b*.

d) Lassen wir einen Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ eine beliebig gelegene endliche Punktreihe g_ξ in einem bestimmten Sinne stetig durchlaufen,

1. so müssen die mit $\mathfrak{g}_\xi$ perspectivischen Strahlen aller Strahlbüschel, deren Mittelpunkte endliche, ausserhalb g_ξ gelegene Punkte derselben Halbebene in Bezug auf g_ξ sind, ihre Büschel in gleichem Drehsinne durchlaufen;

2. die mit $\mathfrak{g}_\xi$ perspectivischen Strahlen aller Strahlbüschel, deren Mittelpunkte endliche, ausserhalb g_ξ gelegene Punkte der anderen Halbebene in Bezug auf g_ξ sind, müssen ihre Büschel ebenfalls in unter sich gleichem, aber dem der anderen entgegengesetzten Drehsinne beschreiben.

3. Beim Uebergange des dem Punkte $\mathfrak{g}_\xi$ entsprechenden Strahles eines der Büschel, deren Mittelpunkte in den die Halbebenen begrenzenden Geraden g_ξ, g_∞ liegen, aus einer Lage in die nächstfolgende müsste sowohl eine Drehung in dem einen, wie eine im entgegengesetzten Sinne erfolgen, es erfolgt daher gar keine eigentliche Drehung, sondern nur eine Verschiebung.

† Der mit $\mathfrak{g}_\xi$ perspectivische Strahl jedes Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt in der Geraden g_ξ liegt, fällt in diese Gerade und behält diese Lage bei, so lange nicht $\mathfrak{g}_\xi$ seinen Mittelpunkt deckt (No. 27, 30*c*, 31*d*);

†† der mit $\mathfrak{g}_\xi$ perspectivische Strahl jedes Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt in g_∞ liegt, ein unendlich entfernter Punkt ist, (jedes Parallel-

strahlbüschels) beschreibt sein Büschel in einem von dem Richtungssinne von g_ξ abhängigen und mit demselben sich ändernden (No. 6) Bewegungssinn, der aber keinem und jedem der beiden Drehsinne eines Strahlbüschels mit endlichem Mittelpunkt gleichgesetzt werden kann (No. 32)*).

e) Denken wir uns demnach, alle Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt werden jeder von einem seiner Strahlen in gleichem Drehsinne durchlaufen, so ertheilen alle Strahlbüschel, deren Mittelpunkte endliche Punkte derselben Halbebene in Bezug auf eine beliebige in dieser Ebene befindliche Gerade g_ξ sind, dem mit dem laufenden Strahl auf g_ξ perspectivischen Punkte denselben Bewegungssinn, alle Strahlbüschel, deren Mittelpunkte endliche Punkte der zweiten Halbebene sind in Bezug auf g_ξ, den entgegengesetzten Bewegungssinn; und es giebt keinen einzigen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt ein endlicher ausserhalb g_ξ gelegener Punkt der einen Halbebene in Bezug auf g_ξ, und welcher, in demselben Sinne Δ beschrieben, auf g_ξ denselben Bewegungssinn hervorriefe, als die Strahlbüschel, deren Mittelpunkte Punkte der anderen Halbebene sind.

Der dem laufenden Strahl eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt in g_ξ liegt, auf g_ξ entsprechende Punkt verharrt in der Lage des Mittelpunktes, so lange nicht der laufende Strahl mit g_ξ zusammenfällt.

Dieser Satz enthält den in No. 44*a* als speciellen Fall.

f) Mit Berücksichtigung von No. 34, 35*a*, *e* folgt aus No. 44*c* oder aus 36*c* und 44*e*:

Werden zwei Strahlbüschel derselben Ebene mit endlichen Mittelpunkten $\mathfrak{a}^\lambda$, $\mathfrak{s}^\varrho$ jeder von einem seiner Strahlen resp. a^λ, s^ϱ von dem beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahl $a^\lambda_\varrho = s^\varrho_\lambda$ aus stetig einmal durchlaufen, so beschreiben je ein Halbstrahl von a^λ und einer von s^ϱ, welche in der Lage a^λ_ϱ einen

*) Anmerkung. Die Bezeichnung „Drehsinn“ im engeren Sinne darf daher rechtmässig auch nur bei Strahlbüscheln mit endlichem Mittelpunkt angewendet werden; im Allgemeinen aber haben wir den Bewegungssinn eines jeden Strahlbüschels „Drehsinn“ genannt im Gegensatz zu dem Bewegungssinn in einer Punktreihe, dem Richtungssinn, weil die Bedingung eines festen Mittelpunktes schon in dem Begriff des Strahlbüschels (No. 1, 5) enthalten ist und die Strahlen eines Parallelstrahlbüschels, wenn auch keinen gemeinschaftlichen, endlichen Mittelpunkt, so doch was wir einen unendlich entfernten Punkt nennen (die Richtung) gemeinschaftlich haben.

Punkt der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\infty\lambda)}$ gemeinschaftlich haben, dieselbe Halbebene in Bezug auf s_λ^ϱ, wenn die Büschel in gleichem, verschiedene Halbebenen, wenn sie in entgegengesetztem Drehsinne beschrieben werden; je ein Halbstrahl von a^λ aber und einer von s^ϱ, welche in der Lage s_λ^ϱ keinen Punkt der Strecke $\mathfrak{s}_\lambda^{(\varrho\infty\lambda)}$ gemeinschaftlich haben, beschreiben verschiedene Halbebenen, wenn die Büschel in gleichem, dieselbe Halbebene, wenn sie in entgegengesetztem Drehsinn durchlaufen werden, und umgekehrt (No. 15*e*).

g) Wir heben hervor, dass, wie sehr auch die Untersuchung in No. 32 darauf hinweist, dass die dort von der Geraden g_v angenommene Eigenschaft thatsächlich bei der unendlich entfernten Geraden g_∞ stattfindet, dies doch dadurch nicht bewiesen ist und der Satz am Anfange von No. 44 als ein Erfahrungssatz aus der Anschauung entnommen ist, wie dies auch in der „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" pag. 52 und der „Theorie der Kegelschnitte" §. 19*c* pag. 79 geschehen.

Aus der Vergleichung von No. 32 und 44 bis 44d^3 mit der Anschauung geht aber hervor, dass dieser Satz mit den auf die Voraussetzungen des §. 1 allein sich stützenden früheren Untersuchungen im vollsten Einklange steht.

h) Wollten wir in ähnlicher Weise den Richtungssinn in zwei beliebigen geraden Punktreihen der Ebene an sich, d. i. ohne Rücksicht auf ein Strahlbüschel vergleichen, so würde eine No. 32 ganz analoge Untersuchung als Bedingung erkennen lassen das Vorhandensein eines Strahlbüschels in der Ebene, welcher die ausgezeichnete Eigenschaft besässe, dass einem und demselben Drehsinn in ihm in allen nicht mit ihm perspectivischen Geraden der Ebene derselbe Richtungssinn entspreche, oder von dem wir dies annehmen wollten. Ein solcher Strahlbüschel müsste aber aus dem in No. 32*c* angegebenen Grunde durch seine Lage ausgezeichnet sein vor allen übrigen. Der Strahlbüschel mit endlichem Mittelpunkt giebt es unendlich viele, die sich an sich keiner von dem anderen unterscheiden lassen, und Strahlbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkt giebt es auch unendlich viele, die sich keiner von dem anderen unterscheiden lassen, und einen ausgezeichneten Punkt wie jede endliche Gerade besitzt die unendlich entfernte Gerade nicht. Da wir also keinen einzig und allein von allen übrigen sich unterscheidenden Strahlbüschel kennen, so können wir nicht allgemein den Richtungssinn einer Geraden mit dem einer anderen an sich vergleichen, sondern nur in Rücksicht auf ein oder mehrere Strahlbüschel von gewisser Lage*).

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, No. 49.

45. *a*) Bewegen wir, nachdem der Strahl s^ϱ in dem ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^\varrho$ einen Winkel $s^\varrho_{(\lambda|\nu)}$ in demselben Drehsinn Δ_ϱ von s^ϱ_λ an stetig durchlaufen, den Mittelpunkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf dem beliebig gewählten Strahl s^ϱ_ν in einem und demselben Sinne P_σ, so theilt er in jeder seiner Lagen den Strahl s^ϱ_ν in zwei Halbstrahlen, die wir nach dem Princip von No. 15*a* mit $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_\nu$ und $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_\nu$ bezeichnen. Denken wir uns nun s^ϱ in jeder Lage von $\mathfrak{s}^\varrho$ in demselben Sinne Δ_ϱ von s^ϱ_ν an den Büschel weiter durchlaufend, so beschreibt nach No. 15*e* und 44*f* der von der Anfangslage $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_\nu$ ausgehende Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ stets eine und dieselbe der Halbebenen in Bezug auf s^ϱ_ν, $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\nu|\nu)}$, der von der Anfangslage $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_\nu$ ausgehende Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ stets die andere $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\nu|\nu)}$ $=\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\nu-\nu)}$ (vergl. No. 39).

b) Während s^ϱ den Winkel $s^\varrho_{(\lambda|\nu)}$ beschrieben, beschrieb der ihm auf jeder Geraden g_χ, welche nicht den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ enthält, entsprechende Punkt $\mathfrak{g}_\chi$ eine Strecke $\mathfrak{g}^{(\lambda|\nu)}_\chi$ in bestimmtem Richtungssinne P_χ. Wenn nun s^ϱ, nachdem $\mathfrak{s}^\varrho$ in eine beliebige Lage $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu\xi}$ gerückt, seinen Büschel in demselben Sinne Δ_ϱ von der Lage s^ϱ_ν an weiter beschreibt, so durchläuft der ihm auf irgend einer Geraden g_ξ, welche nicht den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ enthält, entsprechende Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ in demselben Sinne P_ξ, in welchem er die Strecke $\mathfrak{g}^{(\lambda|\nu)}_\xi$ durchlaufen, weiter die Strecke $\mathfrak{g}^{(\nu|\lambda)}_\xi$, wenn die neue Lage $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu\xi}$ von $\mathfrak{s}^\varrho$ mit der ursprünglichen, die wir mit $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu o}$ bezeichnen wollen, auf derselben Halbebene in Bezug auf g_ξ sich befindet (nach No. 44*e*); sobald aber, sei es dadurch, dass $\mathfrak{s}^\varrho$ die Gerade g_ξ oder die Gerade g_∞ überschritten, die neue Lage $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu\xi}$ sich nicht mehr mit $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu o}$ auf derselben Halbebene befindet, beschreibt der Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ in dem entgegengesetzten Richtungssinne $\overline{P}_\xi$ zunächst dieselbe Strecke $\mathfrak{g}^{(\nu-\lambda)}_\xi=\mathfrak{g}^{(\lambda|\nu)}_\xi$.

Rückt der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ in die mit g_ξ perspectivische Lage $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu\xi}$, so verharrt der dem Strahl s^ϱ entsprechende Punkt in dieser Lage $\mathfrak{s}^\varrho_{\nu\xi}=\mathfrak{g}^\nu_\xi=\mathfrak{s}^\xi_\nu$.

Rückt der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ in die Lage des unendlich entfernten Punktes von

s_ν^ϱ $\mathfrak{s}_{\nu\infty}^\varrho$, so lässt sich der Drehsinn von s^ϱ nicht mehr mit dem des Büschels $\mathfrak{s}_{\nu o}^\varrho$ vergleichen; der dem Strahl s^ϱ entsprechende Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ kann daher mit gleichem Recht in demselben Sinne P_ξ die Strecke $\mathfrak{g}_\xi^{(\nu|\lambda)}$, als in dem entgegengesetzten Sinne $\overline{P}_\xi$ die Strecke $\mathfrak{g}_\xi^{(\nu-\lambda)} = \mathfrak{g}_\xi^{(\lambda|\nu)}$ beschreiben.

c) Eine Aenderung des Bewegungssinnes von $\mathfrak{g}_\xi$ findet demnach statt:

1. wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ die Gerade g_ξ überschreitet,
2. wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ die Gerade g_∞ überschreitet,
3. wenn s^ϱ den Drehsinn ändert (No. 6).

Da, wo gleichzeitig zwei dieser Fälle auftreten, hebt eine Aenderung die andere auf; so durch Combination der Fälle 1 und 2, wenn s_ν^ϱ die Gerade g_ξ in ihrem unendlich entfernten Punkte schneidet (vergl. No. 16 und 44*e*) oder g_ξ mit g_∞ zusammenfällt (vergl. 44*a*), $\mathfrak{s}^\varrho$ also gleichzeitig sowohl den Punkt $\mathfrak{s}_{\nu\xi}^\varrho$ als den Punkt $\mathfrak{s}_{\nu\infty}^\varrho$ überschreitet; bei solcher Lage von s_ν^ϱ resp. g_ξ wird daher der Bewegungssinn von $\mathfrak{g}_\xi$ nicht geändert, welche Lage auch der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf der Geraden s_ν^ϱ haben mag, so lange der Strahl s^ϱ in demselben Drehsinne sich bewegt; es geht aber bei der ersten Combination gemäss No. 35*e* der Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ auf den anderen Halbstrahl von s^ϱ über.

d) Andererseits denken wir uns den Mittelpunkt des Strahlbüschels fest, drehen aber, nachdem der Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ auf der Geraden g_ξ eine Strecke $\mathfrak{g}_\xi^{(\lambda|\nu)}$ in demselben Richtungssinne P_ξ von $\mathfrak{g}_\xi^\lambda$ an durchlaufen, die Gerade g_ξ um den beliebig gewählten Punkt $\mathfrak{g}_\xi^\nu$ in einem und demselben Drehsinne Δ_γ, und durchläuft der Punkt $\mathfrak{g}_\xi$ auf der Geraden g_ξ in irgend einer neuen Lage $g_{\xi\eta}^\nu$ die andere Strecke $\mathfrak{g}_\xi^{(\nu|\lambda)}$ in demselben Richtungssinne P_ξ, so beschreibt auch s^ϱ in demselben Drehsinn Δ_ϱ weiter den Winkel $s_{(\nu|\lambda)}^\varrho$, wenn der Halbstrahl $\mathfrak{g}_{\xi\eta}^{(\nu|\infty)}$ (die Bezeichnung bezogen auf den Richtungssinn P_ξ) auf derselben Halbebene in Bezug auf s_ν^ϱ liegt, als der Halbstrahl $\mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu|\infty)}$ der ursprünglichen Lage $g_{\xi o}^\nu$ von g_ξ (No. 35, 38*a*, 37); sobald aber dadurch, dass g_ξ den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ überschreitet, die Halbstrahlen $\mathfrak{g}_{\xi\eta}^{(\nu|\infty)}$ und $\mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu|\infty)}$ auf entgegengesetzten Halbebenen in Bezug auf s_ν^ϱ, oder was dasselbe ist (No. 34)

$\mathfrak{g}_{\xi\eta}^{(\nu|\infty)}$ und $\mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu-\infty)}$ auf derselben Halbebene sich befinden, beschreibt der Strahl s^{ϱ} in dem entgegengesetzten Drehsinn $\overline{\Delta}_{\varrho}$ zunächst wieder den Winkel $s_{(\nu-\lambda)}^{\varrho} = s_{(\lambda|\nu)}^{\varrho}$ (No. 16). Dies Kriterium gilt zufolge No. 10, wenn der Mittelpunkt des Strahlbüschels ein unendlich entfernter Punkt, wie wenn er ein endlicher Punkt ist.

Eine Aenderung des Bewegungssinnes von s^{ϱ} findet demnach stets und nur statt, wenn

1. g_{ξ} den Punkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ überschreitet, sei es, dass in der mit $\mathfrak{z}^{\varrho}$ perspectivischen Lage $g_{\xi\varrho}^{\nu}\,\mathfrak{z}^{\varrho}$ dem Halbstrahl $\mathfrak{g}_{\xi\varrho}^{(\nu|\infty)}$ oder dem Halbstrahl $\mathfrak{g}_{\xi\varrho}^{(\nu-\infty)}$ angehört,

2. $\mathfrak{g}_{\xi}$ den Richtungssinn ändert (No. 6).

In einer Combination zweier Fälle findet keine Aenderung des Drehsinnes von s^{ϱ} statt.

e) Mit Rücksicht auf No. 38*a*, 15*e*, 39*c*, 44*d,e*, 45 können wir vorstehende Sätze auch folgendermassen aussprechen:

Lassen wir, nachdem s^{ϱ} in dem ebenen Strahlbüschel $\mathfrak{z}^{\varrho}$ im Sinne Δ_{ϱ} den Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^{\varrho}$, also der auf der Geraden g_{ξ} ihm entsprechende Punkt $\mathfrak{g}_{\xi}$ im Sinne P_{ξ} die Strecke $\mathfrak{g}_{\xi}^{(\lambda|\nu)}$ beschrieben, den Mittelpunkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ in einem und demselben Richtungssinne P_{σ} von der ursprünglichen Lage $\mathfrak{z}_{\nu o}^{\varrho}$ an den Strahl s_{ν}^{ϱ} durchlaufen, und in jeder neuen Lage $\mathfrak{z}_{\nu\xi}^{\varrho}$ von $\mathfrak{z}^{\varrho}$ den Strahl s^{ϱ} in demselben Drehsinn Δ_{ϱ} von s_{ν}^{ϱ} an weiter bewegen, so bewegt sich der Punkt $\mathfrak{g}_{\xi}$ auf g_{ξ}, je nachdem, bezogen auf den Rich-

Lassen wir, nachdem der Punkt $\mathfrak{g}_{\xi}$ auf der Geraden g_{ξ} im Sinne P_{ξ} die Strecke $\mathfrak{g}_{\xi}^{(\lambda|\nu)}$, also der in einem Büschel $\mathfrak{z}^{\varrho}$ entsprechende Strahl s^{ϱ} im Sinne Δ_{ϱ} den Winkel $s_{(\lambda|\nu)}^{\varrho}$ beschrieben, die Gerade g_{ξ} in einem und demselben Drehsinne Δ_{γ} von der ursprünglichen Lage $g_{\xi o}^{\nu}$ aus den Büschel $\mathfrak{g}_{\xi}^{\nu}$ durchlaufen, und in jeder neuen Lage $g_{\xi\eta}^{\nu}$ von g_{ξ} den Punkt $\mathfrak{g}_{\xi}$ in demselben Richtungssinn P_{ξ} von $\mathfrak{g}_{\xi}^{\nu}$ an sich weiter bewegen, so bewegt sich der Strahl s^{ϱ} im Büschel $\mathfrak{z}^{\varrho}$, je nachdem, bezogen auf

tungssinn P_σ, g_ξ den Strahl s_ν^ϱ in einem Punkt des Halbstrahles $\mathfrak{s}_{\nu o}^{(\varrho|\infty)}$ oder $\mathfrak{s}_{\nu o}^{(\varrho-\infty)}$ schneidet,

in demselben Richtungssinn P_ξ weiter, so lange g_ξ auch in Bezug auf die neue Lage $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^\varrho$ den Strahl s_ν^ϱ in einem Punkt des Halbstrahles $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^{(\varrho|\infty)}$ resp. $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^{(\varrho-\infty)}$ trifft,

in dem entgegengesetzten Sinne $\bar{P}_\xi$, wenn g_ξ den Strahl s_ν^ϱ in einem Punkt des Halbstrahles $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^{(\varrho-\infty)}$ resp. $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^{(\varrho|\infty)}$ schneidet,

gar nicht, wenn g_ξ mit $\mathfrak{s}_{\nu\zeta}^\varrho$ perspectivisch liegt.

den Drehsinn Δ_γ der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ in Bezug auf $g_{\xi o}^\nu$ sich auf der Halbebene $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)o}^{(\nu|\infty)}$ oder $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)o}^{(\nu-\infty)}$ befindet,

in demselben Drehsinn Δ_ϱ weiter, so lange $\mathfrak{s}^\varrho$ auch in Bezug auf die neue Lage $g_{\xi\eta}^\nu$ sich auf der Halbebene $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)\eta}^{(\nu|\infty)}$ resp. $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)\eta}^{(\nu-\infty)}$ befindet,

in dem entgegengesetzten Drehsinn $\bar{\Delta}_\varrho$, wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ sich auf der Halbebene $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)\eta}^{(\nu-\infty)}$ resp. $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)\eta}^{(\nu|\infty)}$ befindet,

gar nicht, wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ mit $g_{\xi\eta}^\nu$ perspectivisch liegt.

f) Als Zusatz zu dem Satz rechts gehört Folgendes:

Befindet sich der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf der Halbebene $\mathfrak{g}_{(\xi|\xi)o}^{(\nu|\infty)}$, so muss, wenn g_ξ im Sinne Δ_γ den Büschel $\mathfrak{g}_\xi^\nu$ bis zur Lage $s_\nu^\varrho = g_{\xi\varrho}^\nu$ beschreibt, in dieser Lage nach No. 35*a* und 39 der Halbstrahl $\mathfrak{g}_\xi^{(\nu|\infty)}$ denselben treffen, also die Lage $\mathfrak{g}_{\xi\varrho}^{(\nu\varrho\infty)} = \mathfrak{s}_\nu^{(\xi\varrho\infty)}$ haben. Der auf irgend einer Geraden g_ψ der Ebene, welche $g_\xi = g_{\xi o}^\nu$ in einem endlichen von $\mathfrak{g}_\xi^\nu$ verschiedenen Punkte $\mathfrak{g}_\psi^\xi = \mathfrak{g}_{\xi o}^\psi$ des Halbstrahles $\mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu|\infty)}$ und s_ν^ϱ in einem Punkt $\mathfrak{s}_\nu^\psi = \mathfrak{g}_\psi^\nu$ der endlichen Strecke $\mathfrak{s}_\nu^{(\xi\varrho)\infty}$ schneidet, entsprechende Punkt muss daher nach No. 35*e* die endliche Strecke $\mathfrak{g}_\psi^{(\xi\nu)\infty}$ von $\mathfrak{g}_\psi^\xi$ an durchlaufen. Wenn nun der Strahl s^ϱ im Sinne Δ_ϱ von s_ν^ϱ an den Büschel $\mathfrak{s}^\varrho$ durchläuft, so trifft er (No. 35) mit demselben Halbstrahl, welcher in der Anfangslage $\mathfrak{s}_\nu^{(\varrho\xi\infty)}$ die Punkte $\mathfrak{g}_\xi^\nu = \mathfrak{s}_\nu^\xi$ und $\mathfrak{g}_\psi^\nu$ enthält und die Halbebene $\mathfrak{s}_{(\nu|\nu)}^{(\varrho\xi\infty)}$ beschreibt, in welcher die Halbstrahlen $\mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu|\infty)} = \mathfrak{g}_{\xi o}^{(\nu\psi\infty)}$ von $g_{\xi o}^\nu$ und $\mathfrak{g}_\psi^{(\nu\xi\infty)}$ von g_ψ mit

allen ihren Punkten liegen (No. $34\,b^2$), auch den Punkt $\mathfrak{g}_{\psi}^{\xi} = \mathfrak{g}_{\xi o}^{\psi}$; der auf g_{ψ} entsprechende Punkt muss daher von $\mathfrak{g}_{\psi}^{\nu}$ an (No. $35\,e$) die endliche Strecke $\mathfrak{g}_{\psi}^{(\nu\,\xi)\,\infty}$ durchlaufen, also dieselbe, wie der dem Strahl g_{ξ}^{ν} entsprechende Punkt, aber von dem anderen Grenzpunkt aus, also nach No. 17 in entgegengesetztem Richtungssinne.

Die beiden Drehsinne $\varDelta_{\gamma}$ und $\varDelta_{\varrho}$ sind daher nach No. $44\,c$ einander gleich.

Befindet sich der Punkt $\mathfrak{s}^{\varrho}$ aber auf der Halbebene $\mathfrak{g}_{(\xi - \xi)\,o}^{(\nu\,|\,\infty)}$ bezogen auf den Drehsinn $\varDelta_{\gamma}$, so deckt der Halbstrahl $\mathfrak{g}_{\xi}^{(\nu\,|\,\infty)}$, wenn g_{ξ}^{ν} das erste Mal in die Lage s_{ν}^{ϱ} kommt, den Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\nu}^{\varrho\,(\xi\,\infty)}$, der auf derselben Geraden g_{ψ} entsprechende Punkt beschreibt daher nach No. $35\,e$ die Strecke $\mathfrak{g}_{\psi}^{(\xi\,\infty\,\nu)}$, welche den unendlich entfernten Punkt enthält, der dem Strahl s^{ϱ} entsprechende Punkt beschreibt wieder die Strecke $\mathfrak{g}_{\psi}^{(\nu\,\xi)\,\infty}$ von $\mathfrak{g}_{\psi}^{\nu}$ an, bewegt sich also nach No. 17 in demselben Richtungssinne; in diesem Falle sind die beiden Drehsinne $\varDelta_{\gamma}$ und $\varDelta_{\varrho}$ nach No. $44\,c$ entgegengesetzt.

(Fortsetzung folgt.)

X.

Ueber die developpabele Fläche, welche zwei gegebenen Flächen umschrieben ist.

Von

Dr. A. Enneper,

ausserordentliches Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

I.

Die Gleichungen der beiden gegebenen Flächen auf ein orthogonales Coordinatensystem bezogen seien $f(x, y, z) = 0$ und $f_1(x, y, z) = 0$, oder kürzer $f = 0$ und $f_1 = 0$. Der Punkt (x, y, z) der Fläche $f = 0$ möge mit dem Punkte (x_1, y_1, z_1) der Fläche $f_1 = 0$, dieselbe berührende Ebene haben. Sind a, b, c die Winkel, welche die Normale zur Fläche $f = 0$ im Punkte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, haben a_1, b_1, c_1 analoge Bedeutungen für den Punkt (x_1, y_1, z_1) der Fläche $f_1 = 0$, so finden bekanntlich folgende Gleichungen statt:

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos a}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{\cos b}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \dfrac{\cos c}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left\{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}}}, \\ \dfrac{\cos a_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}} = \dfrac{\cos b_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}} = \dfrac{\cos c_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left\{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der berührenden Ebenen in den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) sind:

$$(X - x)\cos a + (Y - y)\cos b + (Z - z)\cos c = 0,$$
$$(X - x_1)\cos a_1 + (Y - y_1)\cos b_1 + (Z - z)\cos c_1 = 0.$$

Sollen diese Gleichungen identisch sein, so müssen folgende Relationen stattfinden:

$$2) \quad \begin{aligned} &\cos a = \cos a_1, \quad \cos b = \cos b_1, \quad \cos c = \cos c_1, \\ &x \cos a + y \cos b + z \cos c = x_1 \cos a_1 + y_1 \cos b_1 + z_1 \cos c_1. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$3) \quad x \cos a + y \cos b + z \cos c = p, \quad x_1 \cos a_1 + y_1 \cos b_1 + z_1 \cos c_1 = p,$$

so geben die Gleichungen 2) und 3) in Verbindung mit $f=0$ und $f_1=0$ ein System von sechs Gleichungen, welchen zufolge x, y, z und x_1, y_1, z_1 als Functionen von p angesehen werden können. Lässt man p variiren, so erhält man auf jeder der beiden Flächen eine Curve, längs welcher dieselben gleiche berührende Ebenen in zwei entsprechenden Punkten haben. Die Enveloppe dieser berührenden Ebenen ist die developpabele Fläche, welche den beiden Flächen $f=0$ und $f_1=0$ gleichzeitig umschrieben ist. Es soll vorausgesetzt werden, dass in den Gleichungen 3) p nicht constant ist infolge einer der Gleichungen $f=0$ oder $f_1=0$, ein Umstand, welcher stattfindet, wenn eine der gegebenen Flächen die Parallelfläche einer Kegelfläche oder eine Kugelfläche ist. Der erste Fall ist überhaupt auszuschliessen, der Fall einer Kugelfläche ist weiter unten besonders behandelt, wobei sich herausstellt, dass die allgemeinen Gleichungen ihre Gültigkeit behalten.

Die Coordinaten des Punktes der Wendecurve der developpabelen Fläche, welcher mit den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) auf derselben Geraden liegt, sind durch (ξ, η, ζ) bezeichnet. Zur Bestimmung von ξ, η, ζ dienen die Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \xi\cos a+\eta\cos b+\zeta\cos c=p, \\ \xi\dfrac{\partial\cos a}{\partial p}+\eta\dfrac{\partial\cos b}{\partial p}+\zeta\dfrac{\partial\cos c}{\partial p}=1, \\ \xi\dfrac{\partial^2\cos a}{\partial p^2}+\eta\dfrac{\partial^2\cos b}{\partial p^2}+\zeta\dfrac{\partial^2\cos c}{\partial p^2}=0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\cos a\frac{\partial x}{\partial p}+\cos b\frac{\partial y}{\partial p}+\cos c\frac{\partial z}{\partial p}=0,\quad \cos a_1\frac{\partial x_1}{\partial p}+\cos b_1\frac{\partial y_1}{\partial p}+\cos c_1\frac{\partial z_1}{\partial p}=0,$$

so geben die Gleichungen 3) nach p differentiirt:

$$x\frac{\partial\cos a}{\partial p}+y\frac{\partial\cos b}{\partial p}+z\frac{\partial\cos c}{\partial p}=1,\quad x_1\frac{\partial\cos a_1}{\partial p}+y_1\frac{\partial\cos b_1}{\partial p}+z_1\frac{\partial\cos c_1}{\partial p}=1,$$

oder auch wegen 2):

$$x\frac{\partial\cos a}{\partial p}+y\frac{\partial\cos b}{\partial p}+z\frac{\partial\cos c}{\partial p}=1,\quad x_1\frac{\partial\cos a_1}{\partial p}+y_1\frac{\partial\cos b_1}{\partial p}+z_1\frac{\partial\cos c}{\partial p}=1.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit:

$$\cos a\frac{\partial\cos a}{\partial p}+\cos b\frac{\partial\cos b}{\partial p}+\cos c\frac{\partial\cos c}{\partial p}=0$$

geben:

$$5)\quad \begin{cases} D\dfrac{\partial\cos a}{\partial p}=(z-z_1)\cos b-(y-y_1)\cos c, \\ D\dfrac{\partial\cos b}{\partial p}=(x-x_1)\cos c-(z-z_1)\cos a, \\ D\dfrac{\partial\cos c}{\partial p}=(y-y_1)\cos a-(x-x_1)\cos b, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$6)\qquad D=\begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix}.$$

Mittelst der Gleichungen 5) geht die zweite Gleichung 4) über in:

$$7)\quad [(z-z_1)\cos b-(y-y_1)\cos c]\,\xi+[(x-x_1)\cos c-(z-z_1)\cos a]\,\eta$$
$$+[(y-y_1)\cos a-(x-x_1)\cos b]\,\zeta=D.$$

Wegen der Gleichungen 2) geben die Gleichungen 3) subtrahirt:

$$8)\qquad (x-x_1)\cos a+(y-y_1)\cos b+(z-z_1)\cos c=0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 9) folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \cos a}{\partial p}, & \frac{\partial \cos b}{\partial p}, & \frac{\partial \cos c}{\partial p} \\ x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{D}\,[x\cos a+y\cos b+z\cos c]$$

$$+[x(x-x_1)+y(y-y_1)+z(z-z_1)]\,[(x-x_1)\cos a+(y-y_1)\cos b+(z-z_1)\cos c],$$

d. i. wegen 3) und 8):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \cos a}{\partial p}, & \frac{\partial \cos b}{\partial p}, & \frac{\partial \cos c}{\partial p} \\ x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix}=-\frac{p}{D}\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2].$$

Analog findet man mit Hülfe der Gleichungen 5), 8) und $\xi\cos a+\eta\cos b+\zeta\cos c=p$:

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \frac{\partial \cos a}{\partial p}, & \frac{\partial \cos b}{\partial p}, & \frac{\partial \cos c}{\partial p} \\ x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \end{vmatrix}=-\frac{p}{D}\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2].$$

Differentiirt man die Gleichung 7) nach p, wobei ξ, η, ζ als Constanten anzusehen sind, so zeigen die beiden zuletzt entwickelten Gleichungen, dass auf beiden Seiten der Term:

$$\frac{p}{D}\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]$$

wegfällt, es bleibt dann:

$$9)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \xi-x_1, & \eta-y_1, & \zeta-z_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p}, & \frac{\partial y_1}{\partial p}, & \frac{\partial z_1}{\partial p} \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \xi-x, & \eta-y, & \zeta-z \end{vmatrix}.$$

Durch die vorstehende Gleichung, die Gleichung 7) und $\xi\cos a+\eta\cos b+\zeta\cos c=p$ sind ξ, η, ζ bestimmt. Es bleibt noch übrig, die Differentialquotienten von x, y, z und x_1, y_1, z_1 nach p auf einfache Weise darzustellen.

Da die drei Punkte (ξ, η, ζ), (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) auf derselben Geraden liegen, so kann man setzen:

$$\frac{\xi - x}{\xi - x_1} = \frac{\eta - y}{\eta - y_1} = \frac{\zeta - z}{\zeta - z_1} = q,$$

oder:

$$10) \qquad \xi = \frac{x - q x_1}{1 - q}, \qquad \eta = \frac{y - q y_1}{1 - q}, \qquad \zeta = \frac{z - q z_1}{1 - q}.$$

Mittelst dieser Gleichungen wird die erste Gleichung 4) und die Gleichung 7) identisch. Die Gleichung 9) geht über in:

$$11) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p}, & \frac{\partial y_1}{\partial p}, & \frac{\partial z_1}{\partial p} \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \end{vmatrix}.$$

Die Quantität q, bestimmt durch die Gleichung 11), hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung, wie gleich gezeigt werden soll.

Differentiirt man $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, welche Functionen von x, y, z sind, nach p, so folgt:

$$\frac{\partial \cos a}{\partial p} = \frac{\partial \cos a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial \cos a}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial \cos a}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \cos b}{\partial p} = \frac{\partial \cos b}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial \cos b}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial \cos b}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \cos c}{\partial p} = \frac{\partial \cos c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial \cos c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial \cos c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p}.$$

Setzt man diese Werthe von

$$\frac{\partial \cos a}{\partial p}, \quad \frac{\partial \cos b}{\partial p}, \quad \frac{\partial \cos c}{\partial p}$$

in die Gleichungen:

$$x\frac{\partial \cos a}{\partial p} + y\frac{\partial \cos b}{\partial p} + z\frac{\partial \cos c}{\partial p} = 1, \quad x_1\frac{\partial \cos a}{\partial p} + y_1\frac{\partial \cos b}{\partial p} + z_1\frac{\partial \cos c}{\partial p} = 1,$$

nimmt zu denselben noch die Gleichung:

$$\cos a\frac{\partial x}{\partial p} + \cos b\frac{\partial y}{\partial p} + \cos c\frac{\partial z}{\partial p} = 0,$$

so erhält man zur Bestimmung von

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial p}$$

folgende Gleichungen:

$$12) \left\{ \begin{aligned} &\left(x\frac{\partial \cos a}{\partial x} + y\frac{\partial \cos b}{\partial x} + z\frac{\partial \cos c}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(x\frac{\partial \cos a}{\partial y} + y\frac{\partial \cos b}{\partial y} + z\frac{\partial \cos c}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p} \\ &\qquad + \left(x\frac{\partial \cos a}{\partial z} + y\frac{\partial \cos b}{\partial z} + z\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial p} = 1, \\ &\left(x_1\frac{\partial \cos a}{\partial x} + y_1\frac{\partial \cos b}{\partial x} + z_1\frac{\partial \cos c}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(x_1\frac{\partial \cos a}{\partial y} + y_1\frac{\partial \cos b}{\partial y} + z_1\frac{\partial \cos c}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial p} \\ &\qquad + \left(x_1\frac{\partial \cos a}{\partial z} + y_1\frac{\partial \cos b}{\partial z} + z_1\frac{\partial \cos c}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial p} = 1, \end{aligned} \right.$$

$$\cos a\frac{\partial x}{\partial p}+\cos b\frac{\partial y}{\partial p}+\cos c\frac{\partial z}{\partial p}=0.$$

Sind R', R'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche $f=0$ im Punkte (x, y, z), so hat man für das Product derselben die Gleichung:

13) $$\begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c, & 0 \\ \frac{\partial \cos a}{\partial x}, & \frac{\partial \cos b}{\partial x}, & \frac{\partial \cos c}{\partial x}, & \cos a \\ \frac{\partial \cos a}{\partial y}, & \frac{\partial \cos b}{\partial y}, & \frac{\partial \cos c}{\partial y}, & \cos b \\ \frac{\partial \cos a}{\partial z}, & \frac{\partial \cos b}{\partial z}, & \frac{\partial \cos c}{\partial z}, & \cos c \end{vmatrix}=\frac{1}{R'R''}.$$

Wegen der Gleichungen 1) lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

14) $$\frac{1}{R'R''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^2=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}, & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}, & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Bildet man das Product der Gleichung 13) mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c & 0 \\ x & y & z & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=D,$$

so bemerkt man leicht, dass das Product der beiden Determinanten gleich der Determinante des Systems 12) ist in Beziehung auf

$$\frac{\partial x}{\partial p},\ \frac{\partial y}{\partial p},\ \frac{\partial z}{\partial p}$$

als Unbekannte, der gemeinschaftliche Nenner derselben ist also einfach gleich $\frac{D}{R'R''}$.

Zur Abkürzung setze man:

15) $$\sqrt{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]}=\Delta,$$

16) $$\begin{cases} (x-x_1)\frac{\partial \cos a}{\partial x}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b}{\partial x}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c}{\partial x}=L\,\Delta, \\ (x-x_1)\frac{\partial \cos a}{\partial y}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b}{\partial y}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c}{\partial y}=M\,\Delta, \\ (x-x_1)\frac{\partial \cos a}{\partial z}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b}{\partial z}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c}{\partial z}=N\,\Delta. \end{cases}$$

$$(x-x_1)\frac{\partial \cos a_1}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b_1}{\partial x_1}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c_1}{\partial x_1}=L_1 \Delta,$$
$$(x-x_1)\frac{\partial \cos a_1}{\partial y_1}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b_1}{\partial y_1}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c_1}{\partial y_1}=M_1 \Delta,$$
$$(x-x_1)\frac{\partial \cos a_1}{\partial z_1}+(y-y_1)\frac{\partial \cos b_1}{\partial z_1}+(z-z_1)\frac{\partial \cos c_1}{\partial z_1}=N_1 \Delta.$$

Schreibt man die Gleichung 8) auf folgende Weise:

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}+(z-z_1)\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

so erhält man mittelst der vorstehenden Gleichung und der Gleichungen 1) aus 16) für L, M, N auch nachstehende Werthe:

$$17)\quad \begin{cases} (x-x_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(y-y_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+(z-z_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=L\Delta.H, \\ (x-x_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+(y-y_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+(z-z_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=M\Delta.H, \\ (x-x_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+(y-y_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+(z-z_1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=N\Delta.H, \\ H=\sqrt{\left\{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}}. \end{cases}$$

Durch die Verbindungslinie der beiden Punkte (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) und die Normale zur Fläche $f=0$ im Punkte (x, y, z) werde eine Ebene gelegt und der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes im Punkte (x, y, z) durch R bezeichnet. Für R hat man bekanntlich die Gleichung:

$$18)\quad \frac{\Delta^2}{R}\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}}$$
$$=(x-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+(z-z)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2(x-x_1)(y-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$
$$+2(x-x_1)(z-z_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+2(y-y_1)(z-z_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}.$$

Wegen der Gleichungen 17) lässt sich die Gleichung 18) auf folgende Form bringen:

$$19)\quad (x-x_1)L+(y-y_1)M+(z-z_1)N=\frac{\Delta}{R}.$$

Setzt man in den Gleichungen 14) und 18) f_1, x_1, y_1, z_1 statt f, x, y, z, s mögen $R' R''$ und R übergehen in $R'_1 R''_1$ und R_1.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 16) erhält man aus 12):

$$20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p}=(\cos b\,.\,N-\cos c\,.\,M)\;R' R''\;\dfrac{\Delta}{D}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial p}=(\cos c\,.\,L-\cos a\,.\,N)\;R' R''\;\dfrac{\Delta}{D}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial p}=(\cos a\,.\,M-\cos b\,.\,L)\;R' R''\;\dfrac{\Delta}{D}. \end{cases}$$

Wegen $\cos a_1 = \cos a$, $\cos b_1 = \cos b$, $\cos c_1 = \cos c$ hat man analog:

$$21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial p} = (\cos b \,.\, N_1 - \cos c \,.\, M_1)\, R'_1 R''_1 \dfrac{\Delta}{D}, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial p} = (\cos c \,.\, L_1 - \cos a \,.\, N_1)\, R'_1 R''_1 \dfrac{\Delta}{D}, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial p} = (\cos a \,.\, M_1 - \cos b \,.\, L_1)\, R'_1 R''_1 \dfrac{\Delta}{D}. \end{cases}$$

Substituirt man die Werthe der Differentialquotienten aus den Gleichungen 20) und 21) in die Gleichung 11), so folgt wegen $(x-x_1)\cos a + (y-y_1)\cos b + (z-z_1)\cos c = 0$:

$$\{(x-x_1)L + (y-y_1)M + (z-z_1)N\} R' R''$$
$$= q\{(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1\} R'_1 R''_1,$$

d. i. wegen 19) und der analogen Gleichung für R_1:

$$22)\quad q = \frac{R' R''}{R} \cdot \frac{R_1}{R'_1 R''_1}.$$

Durch die vorstehende Gleichung ist q in Function von x, y, z und x_1, y_1, z_1 bestimmt. Die Gleichungen 10), 22) in Verbindung mit $f=0$, $f_1=0$ und

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \frac{x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + y_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} + z_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}}{x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} + z \dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

geben ein System von neun Gleichungen; eliminirt man x, y, z, x_1, y_1, z_1 zwischen denselben, so erhält man drei Gleichungen zwischen ξ, η, ζ und q, welche die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Wendecurve der developpabelen Fläche in Function der Variabelen q bestimmen.

Das Bogenelement der Wendecurve sei ∂s, ferner ϱ der Krümmungshalbmesser und r der Torsionsradius. Da nun

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 = \left(\frac{\partial \cos a}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos b}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos c}{\partial p}\right)^2,$$

so geben die Gleichungen 5) nach 8) und 15):

$$23)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\Delta}{D}.$$

Aus den Gleichungen 20) findet man mittelst 9) und 19)

$$(y-y_1)\frac{\partial z}{\partial p} - (z-z_1)\frac{\partial y}{\partial p}$$
$$= R' R'' \frac{\Delta}{D} \{(L(x-x_1) + M(y-y_1) + N(z-z_1)\} \cos a = \frac{R' R''}{iR} \frac{\Delta^2}{D} \cos a,$$

folglich:

$$(y-y_1)\frac{\partial (z-z_1)}{\partial p} - (z-z_1)\frac{\partial (y-y_1)}{\partial p} = \frac{\Delta^2}{D}\left(\frac{R' R''}{R} - \frac{R'_1 R''_1}{R_1}\right) \cos a.$$

Diese Gleichung und zwei analoge Gleichungen geben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{x-x_1}{\Delta}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{y-y_1}{\Delta}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{z-z_1}{\Delta}\right)^2=D^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R'R''}{R}-\frac{R'_1R''_1}{R_1}\right)^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber $\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2$. Nimmt man die Quadratwurzel positiv, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial p}=\frac{1}{D}\left(\frac{R'R''}{R}-\frac{R'_1R''_1}{R_1}\right),$$

oder, wenn man die vorstehende Gleichung durch die Gleichung 23) dividirt:

$$24)\qquad \frac{r}{\varrho}\cdot\Delta=\frac{R'R''}{R}-\frac{R'_1R''_1}{R_1}.$$

Die Bogenelemente der Contactcurven der developpabelen Fläche mit den Flächen $f=0$ und $f_1=0$ seien $\partial\sigma$ und $\partial\sigma_1$, ferner φ und φ_1 die Winkel, welche die bemerkten Curven mit der Verbindungslinie der Punkte (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) bilden. Die Gleichungen 20) geben:

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=\left(R'R''\frac{\Delta}{D}\right)^2\{L^2+M^2+N^2$$
$$-(L\cos a+M\cos b+N\cos c)^2\},$$

$$\cos\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial p}=\frac{x-x_1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{y-y_1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{z-z_1}{\Delta}\frac{\partial z}{\partial p}$$
$$=\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ L, & M, & N \end{vmatrix}\frac{R'R''}{D}.$$

Mittelst der Gleichung 19) leitet man aus den vorstehenden Gleichungen leicht die folgenden ab:

$$25)\qquad \sin\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial p}=\frac{R'R''}{R}\frac{\Delta}{D},\quad \begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ L, & M, & N \end{vmatrix}=\frac{\Delta}{R}\cot\varrho.$$

Ebenso folgt:

$$26)\qquad \sin\varphi_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial p}=\frac{R'_1R''_1}{R_1}\frac{\Delta}{D},\quad \begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ L, & M, & N, \end{vmatrix}=\frac{\Delta}{R_1}\cot\varphi_1.$$

Es ist offenbar:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y_1}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial p}=\cos(\varphi-\varphi_1)\frac{\partial\sigma}{\partial p}\frac{\partial\sigma}{\partial p}$$
$$=(1+\cot\varphi\cot\varphi_1)\sin\varphi\sin\varphi_1\frac{\partial\sigma}{\partial p}\frac{\partial\sigma_1}{\partial p},$$

oder nach 25) und 26)

$$27)\qquad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y_1}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial p}$$
$$=(1+\cot\varphi\cot\varphi_1)\frac{R'R''}{R}\cdot\frac{R'_1R''_1}{R_1}\left(\frac{\Delta}{D}\right)^2.$$

Substituirt man in

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2=\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right)^2$$

für ξ, η, ζ ihre Werthe aus 10), so folgt nach 20) und 21):

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2=\Delta^2\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}\right)^2+\frac{1}{(1-q)^2}\left\{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)^2+q^2\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial p}\right)^2\right\}$$
$$-\frac{2q}{1-q}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y_1}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial p}\right)$$
$$+2\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ L, & M, & N\end{vmatrix}\frac{R'R''}{D}\Delta\frac{1}{1-q}\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}$$
$$-2\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ L_1, & M_1, & N_1\end{vmatrix} q\frac{R'_1R''_1}{D}\Delta\frac{1}{1-q}\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}.$$

Wegen der Gleichungen 25), 26) und 27) wird die vorstehende Gleichung einfacher:

$$\frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2=\left\{\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}+\frac{1}{1-q}\frac{R'R''}{R}\frac{1}{D}\cot\varphi-\frac{q}{1-q}\frac{R'_1R''_1}{D}\cot\varphi_1\right\}^2$$
$$+\frac{1}{(1-q)^2}\frac{1}{D^2}\left\{\frac{R'R''}{R}-q\frac{R'_1R''_1}{R_1}\right\}^2.$$

In dieser Gleichung verschwindet nach 22) das zweite Quadrat auf der rechten Seite, man hat also einfach:

$$\frac{\partial s}{\partial p}=\Delta\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}+\frac{1}{1-q}\frac{R'R''}{R}\frac{\Delta}{D}\cot\varphi-\frac{q}{1-q}\frac{R'_1R''_1}{R_1}\frac{\Delta}{D}\cot\varphi_1,$$

oder auch nach 25) und 26)

$$28)\qquad \frac{\partial s}{\partial p}=\Delta\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{1-q}+\frac{\cos\varphi}{1-q}\frac{\partial \sigma}{\partial p}-\frac{q\cos\varphi_1}{1-q}\frac{\partial \sigma_1}{\partial q}.$$

Diese Gleichung lässt sich noch weiter vereinfachen. Die Differenz der beiden Gleichungen:

$$\frac{x-x_1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{y-y_1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{z-z_1}{\Delta}\frac{\partial z}{\partial p}=\cos\varphi\frac{\partial \sigma}{\partial p},$$
$$\frac{x-x_1}{\Delta}\frac{\partial x_1}{\partial p}+\frac{y-y_1}{\Delta}\frac{\partial y_1}{\partial p}+\frac{z-z_1}{\Delta}\frac{\partial z_1}{\partial p}=\cos\varphi_1\frac{\partial \sigma_1}{\partial p}$$

giebt:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p}=\cos\varphi\frac{\partial \sigma}{\partial p}-\cos\varphi_1\frac{\partial \sigma_1}{\partial p}.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich die Gleichung 28) auf eine der folgenden Formen bringen:

$$29)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial p}&=\frac{\partial}{\partial p}\frac{q\Delta}{1-q}+\cos\varphi\frac{\partial \sigma}{\partial p},\\ \frac{\partial s_1}{\partial p}&=\frac{\partial}{\partial p}\frac{\Delta}{1-q}+\cos\varphi_1\frac{\partial \sigma_1}{\partial p}.\end{aligned}$$

Aus den vorhergehenden Entwickelungen lassen sich einige bemerkenswerthe Sätze ableiten. Zufolge der Gleichungen 10) ist q das Verhältniss der Distanzen der Punkte (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) vom Punkte (ξ, η, ζ). Mittelst der Gleichung 22) folgt:

Ist eine developpabele Fläche zwei Flächen umschrieben, so verhalten sich die Distanzen zweier Punkte der Berührungscurven, welche derselben Generatrix angehören, vom entsprechenden Punkte der Wendecurve, wie die Producte der Hauptkrümmungshalbmesser in diesen Punkten, dividirt durch die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte, welche durch ihre Verbindungslinie gehen.

Aus den Gleichungen 5), 20) und 25) folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial \cos a}{\partial p}, & \frac{\partial \cos b}{\partial p}, & \frac{\partial \cos c}{\partial p} \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \end{vmatrix} = \frac{\varDelta}{D} \cos \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial p}.$$

Ist nun $\cos\varphi=0$, so genügt die Berührungscurve der Fläche $f=0$ der Differentialgleichung der Krümmungslinien und umgekehrt. Setzt man:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

so ist nach 10) $t=\frac{q\varDelta}{1-q}$. Für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ giebt die erste Gleichung 29): $\frac{\partial t}{\partial s}=1$, oder $t-t_0=s-s_0$, wo t_0 der Werth von t ist, welcher dem Werthe s_0 von s entspricht. Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar:

Berührt eine developpabele Fläche eine beliebige Fläche längs einer Krümmungslinie, so ist die Differenz zweier Generatricen, begrenzt durch die Wendecurve und die Contactcurve, gleich dem zwischen ihnen liegenden Bogen der Wendecurve.

Berührt eine developpabele Fläche zwei Flächen in Krümmungslinien, so ist die Distanz zwischen zwei entsprechenden Punkten der Berührungscurven constant.

II.

Die in I angewandte Methode erfordert einige Modificationen für den Fall, dass eine der gegebenen Flächen eine Kugelfläche ist. Setzt man:

$$1)\qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2=k^2,$$

so ist:

$$2)\qquad x_1=k\cos a,\quad y_1=k\cos b,\quad z_1=k\cos c;$$

$$3)\qquad xx_1+yy_1+zz_1=k^2.$$

Diese Gleichungen und $f=0$ gestatten es, je fünf der Quantitäten x, y, z, x_1, y_1, z_1 als Functionen der sechsten anzusehen, oder besser, man kann

die sämmtlichen Coordinaten als Functionen einer Variabelen ansehen, für welche man z. B. den Bogen der Berührungscurve der developpabelen Fläche mit der Kugelfläche nehmen kann. Diese unabhängige Variabele werde durch τ bezeichnet und zur Abkürzung gesetzt $\frac{\partial x}{\partial \tau}=x'$, $\frac{\partial x_1}{\partial \tau}=x'_1$ etc. Die Gleichungen 1) und 2) geben:

4) $$x_1 x'_1+y_1 y'_1+z_1 z'_1=0, \quad x_1 x'+y_1 y'+z_1 z'=0.$$

Mittelst dieser Gleichungen und 2) folgt:

5) $$x x'_1+y y'_1+z z'_1=0.$$

Bezeichnet g eine Unbestimmte, so erhält man aus 2), 4) und 5):

6) $$\begin{cases} x'_1=k\dfrac{\partial \cos a}{\partial \tau}=g(z y_1-z_1 y), \\ y'_1=k\dfrac{\partial \cos b}{\partial \tau}=g(x z_1-x_1 z), \\ z'_1=k\dfrac{\partial \cos c}{\partial \tau}=g(y x_1-y_1 x). \end{cases}$$

Ist wieder (ξ, η, ζ) der Punkt der Wendecurve, welcher mit den Punkten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) auf derselben Geraden liegt, so hat man zur Bestimmung von ξ, η, ζ die Gleichungen:

7) $$\begin{cases} \xi x_1+\eta y_1+\zeta z_1=k^2, \\ \xi x'_1+\eta y'_1+\zeta z'_1=0, \\ \xi x''_1+\eta y''_1+\zeta z''_1=0. \end{cases}$$

Die zweite der vorstehenden Gleichungen geht wegen 6) über in:

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \end{vmatrix}=0,$$

welche Gleichung selbstverständlich ist. Setzt man:

8) $$\xi=\frac{x-q x_1}{1-q}, \quad \eta=\frac{y-q y_1}{1-q}, \quad \zeta=\frac{z-q z_1}{1-q},$$

so giebt die dritte Gleichung 7):

9) $$x x''_1+y y''_1+z z''_1=q(x_1 x''_1+y_1 y''_1+z_1 z''_1).$$

Die Gleichungen:

$$x x'_1+y y'_1+z z'_1=0, \quad x_1 x'_1+y_1 y'_1+z_1 z'_1=0$$

nach τ differentiirt geben:

$$x x''_1+y y''_1+z z''_1=-(x' x'_1+y' y'_1+z' z'_1),$$
$$x_1 x''_1+y_1 y''_1+z_1 z''_1=-(x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1).$$

Die Gleichung 9) lässt sich also auch schreiben:

$$q(x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1)=(x' x'_1+y' y'_1+z' z'_1),$$

d. i. nach 1), 3) und 6):

$$10) \qquad g k^2 (x^2+y^2+z^2-k^2) q = \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x, & y, & z \end{vmatrix}.$$

Um aus dieser Gleichung x', y', z' zu eliminiren, wird es am einfachsten sein, die rechts stehende Determinante mit derjenigen zu multipliciren, welche das reciproke Product der beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche $f=0$ im Punkte (x, y, z) darstellt. Die in I, 13) gegebene Gleichung lässt sich leicht auf folgende Form bringen:

$$11) \qquad \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c, & 0 \\ \frac{\partial \cos a}{\partial x}, & \frac{\partial \cos a}{\partial y}, & \frac{\partial \cos a}{\partial z}, & \cos a \\ \frac{\partial \cos b}{\partial x}, & \frac{\partial \cos b}{\partial y}, & \frac{\partial \cos b}{\partial z}, & \cos b \\ \frac{\partial \cos c}{\partial x}, & \frac{\partial \cos c}{\partial y}, & \frac{\partial \cos c}{\partial z}, & \cos c \end{vmatrix} = \frac{1}{R' R''}.$$

Die vorstehende Gleichung werde mit der folgenden multiplicirt:

$$12) \qquad \begin{vmatrix} x', & y', & z', & 0 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 0 \\ x, & y, & z, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x, & y, & z \end{vmatrix}.$$

Nach den Gleichungen 1), 2), 3) und 6) ist:

$$\cos a . x' + \cos b . y' + \cos c . z' = 0,$$

$$x' \frac{\partial \cos a}{\partial x} + y' \frac{\partial \cos a}{\partial y} + z' \frac{\partial \cos a}{\partial z} = \frac{\partial \cos a}{\partial \tau} = \frac{g}{k}(z y_1 - x_1 y),$$

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = x_1 \cos a + y_1 \cos b + z_1 \cos c = k.$$

Wendet man diese Gleichungen an und ersetzt in dem Product der Gleichungen 11) und 12) die vier Elemente der letzten Horizontal- oder Verticalreihe $0, \cos a, \cos b, \cos c$ durch $0, \frac{x_1}{k}, \frac{y_1}{k}, \frac{z_1}{k}$, so folgt:

$$\frac{1}{R' R''} \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x, & y, & z \end{vmatrix} \frac{1}{g k}$$

$$= (x-x_1) \left\{ (x-x_1) \frac{\partial \cos a}{\partial x} + (y-y_1) \frac{\partial \cos b}{\partial x} + (z-z_1) \frac{\partial \cos c}{\partial x} \right\}$$

$$+ (y-y_1) \left\{ (x-x_1) \frac{\partial \cos a}{\partial y} + (y-y_1) \frac{\partial \cos b}{\partial y} + (z-z_1) \frac{\partial \cos c}{\partial y} \right\}$$

$$+ (z-z_1) \left\{ (x-x_1) \frac{\partial \cos a}{\partial z} + (y-y_1) \frac{\partial \cos b}{\partial z} + (z-z_1) \frac{\partial \cos c}{\partial z} \right\}$$

Diese Gleichung durch

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = (x^2+y^2+z^2-k^2)$$

dividirt, giebt:

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x, & y, & z \end{vmatrix} \frac{1}{g k^2 (x^2+y^2+z^2-k^2)} = \frac{R' R''}{R} \frac{1}{k},$$

d. i nach 10):

$$q = \frac{R' R''}{R} \frac{1}{k},$$

wo R dieselbe Bedeutung wie in I) hat. Aus dem Vorstehenden folgt, dass die in I) aufgestellten Gleichungen 10) und 22) für die Kugelfläche gültig bleiben, d. h. wenn $R'_1 = R''_1 = R_1 = k$ ist. Haben r, ϱ, s, σ, σ_1 und

13) $$\Delta = \sqrt{\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2-k^2)}$$

dieselben Bedeutungen wie in I), so findet man aus den Gleichungen 1), 3) und 10):

14) $$\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \tau} = g\Delta, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = kg\Delta.$$

Die Gleichung 13) nach τ differentiirt, giebt:

15) $$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = \frac{x x' + y y' + z z'}{\Delta}.$$

Die Gleichung 10) quadrirt, giebt mit Rücksicht auf 4), 13) und 15):

16) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (qkg\Delta)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}\right)^2.$$

Aus 6) und 10) findet man leicht:

17) $$x' x'_1 + y' y'_1 + z' z'_1 = (kg\Delta)^2 q, \\ x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1 = (kg\Delta)^2.$$

Mittelst der Gleichungen 15), 16) und 17) lässt sich zwischen ϱ, r und s eine bemerkenswerthe Gleichung darstellen. Zufolge dieser Gleichungen findet man:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left\{(x'-x'_1)^2+(y'-y'_1)^2+(z'-z'_1)^2 - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}\right)^2\right\} = (kg)^2(1=q)^2.$$

Setzt man also:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial \tau} = kg(1-q),$$

so folgt mittelst der ersten Gleichung 14):

18) $$\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{k}\frac{\Delta}{1-q}.$$

Mittelst der Gleichungen 15), 16) und 17) geben die Gleichungen 8):

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\Delta}{1-q}\right)^2,$$

oder:

$$1 = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\Delta}{1-q}.$$

Eliminirt man $\frac{\Delta}{1-q}$ zwischen der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 18), so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\varrho}{k}=\frac{1}{k},$$

oder integrirt:

$$\frac{\varrho}{r}=\frac{s}{k}+h,$$

wo h eine Constante ist. Durch diese Gleichung ist die kürzeste Linie einer Kegelfläche charakterisirt*). Aus dem Vorstehenden folgt:

Die Wendecurve einer developpabelen Fläche, welche eine Kugelfläche berührt, ist die kürzeste Linie einer Kegelfläche.

Ist (X, Y, Z) ein Punkt der developpabelen Fläche, welche der Fläche $f=0$ und einer Kugelfläche umschrieben ist, bezeichnet man durch v die Distanz der beiden Punkte (X, Y, Z) und (x_1, y_1, z_1), so finden die Gleichungen statt:

$$X=x_1+v\frac{x-x_1}{\Delta},\quad Y=y_1+v\frac{y-y_1}{\Delta},\quad Z=z_1+v\frac{z-z_1}{\Delta}.$$

Ist p eine Constante, so hat man für einen Punkt (X_1, Y_1, Z_1) der Parallelfläche:

$$X_1=x_1+v\frac{x-x_1}{\Delta}-p\cos a,$$

$$Y_1=y_1+v\frac{y-y_1}{\Delta}-p\cos b,$$

$$Z_1=z_1+v\frac{z-z_1}{\Delta}-p\cos c.$$

Nun ist nach 2) $\cos a=\frac{x_1}{k}$, $\cos b=\frac{y_1}{k}$, $\cos c=\frac{z_1}{k}$, nimmt man also in den vorstehenden Gleichungen $p=k$, so folgt:

$$\frac{X_1}{x-x_1}=\frac{Y_1}{y-y_1}=\frac{Z_1}{z-z_1}.$$

Die Elimination von x, y, z, x_1, y_1, z_1 zwischen diesen Gleichungen, den Gleichungen 1), 2), 3) und der Gleichung $f=0$ giebt offenbar ein Resultat von der Form:

$$\Phi\left(\frac{Y_1}{Z_1},\frac{X_1}{Z_1}\right)=0,$$

was die Gleichung einer Kegelfläche ist, welche den Anfangspunkt der Coordinaten (Mittelpunkt der Kugelfläche) zur Spitze hat. Hieraus ergiebt sich:

---

*) Der Beweis dieses Satzes ist in den „Bemerkungen über Raumcurven" gegeben, welche ein Supplement zu II bilden.

Eine beliebige developpabele Fläche, welche einer Kugelfläche umschrieben ist, ist die Parallelfläche einer Kegelfläche, welche den Mittelpunkt der Kugelfläche zur Spitze hat.

Um eine einfache Anwendung der vorhergehenden Entwickelungen zu geben, seien die Gleichungen der beiden Flächen $f=0$ und $f_1=0$, respective:

$$19)\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,\quad \frac{x^2_1}{A_1}+\frac{y^2_1}{B_1}+\frac{z^2_1}{C_1}=1.$$

Wegen

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=z$$

findet man:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\frac{\partial f}{\partial z},$$

oder:

$$20)\qquad \frac{x}{A}=\frac{x_1}{A_1},\quad \frac{y}{B}=\frac{y_1}{B_1},\quad \frac{z}{C}=\frac{z_1}{C_1}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit:

$$\xi=\frac{x-qx_1}{1-q},\quad \eta=\frac{y-qy_1}{1-q},\quad \zeta=\frac{z-qz_1}{1-q}$$

geben:

$$21)\qquad \begin{cases} x=A\xi_1,\quad y=B\eta_1,\quad z=C\zeta_1;\\ x_1=A_1\xi_1,\ y_1=B_1\eta_1,\ z_1=C_1\zeta_1, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$22)\qquad \xi_1=\frac{1-q}{A-qA_1}\xi,\quad \eta_1=\frac{1-q}{B-qB_1}\eta,\quad \zeta_1=\frac{1-q}{C-qC_1}\zeta.$$

Die Substitution der Werthe von x, y, z, x_1, y_1, z_1 aus 21) in 19) giebt:

$$23)\qquad A\xi^2_1+B\eta^2_1+C\zeta^2_1=1,\quad A_1\xi^2_1+B_1\eta^2_1+C_1\zeta^2_1=1 \text{ etc.}$$

Es ist ferner:

$$\frac{R'R''}{R'_1R''_1}=\frac{ABC}{A_1B_1C_1},$$

$$\frac{R_1}{R}=\frac{\frac{(x-x_1)^2}{A}+\frac{(y-y_1)^2}{B}+\frac{(z-z_1)^2}{C}}{\frac{(x-x_1)^2}{A_1}+\frac{(y-y_1)^2}{B_1}+\frac{(z-z_1)^2}{C_1}},$$

oder wegen 21) und 23):

$$\frac{R_1}{R}=\frac{\frac{A^2_1}{A}\xi^2_1+\frac{B^2_1}{B}\eta^2_1+\frac{C^2_1}{C}\zeta^2_1-1}{\frac{A^2}{A_1}\xi^2_1+\frac{B^2}{B_1}\eta^2_1+\frac{C^2}{C_1}\zeta^2_1-1}.$$

Die Gleichung für q wird hierdurch:

$$\frac{A_1 B_1 C_1}{A B C} q = \frac{\frac{A^2_1}{A}\xi_1^2 + \frac{B_1^2}{B}\eta_1^2 + \frac{C^2_1}{C}\zeta_1^2 - 1}{\frac{A^2}{A_1}\xi^2_1 + \frac{B^2}{B_1}\eta^2_1 + \frac{C^2}{C_1}\zeta^2_1 - 1}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung und den Gleichungen 23) die Werthe von ξ^2_1, η^2_1, ζ^2_1, setzt darauf für ξ_1, η_1, ζ_1 ihre Werthe aus 22) ein, so ergeben sich für ξ, η, ζ folgende Gleichungen:

$$\xi^2 = \frac{(B-B_1)(C-C_1)}{(AB_1 - A_1 B)(AC_1 - A_1 C)} \left(\frac{A - qA_1}{1-q}\right)^3,$$

$$\eta^2 = \frac{(A-A_1)(C-C_1)}{(BA_1 - B_1 A)(BC_1 - B_1 C)} \left(\frac{B - qB_1}{1-q}\right)^3,$$

$$\zeta^2 = \frac{(A-A_1)(B-B_1)}{(CA_1 - C_1 A)(CB_1 - C_1 B)} \left(\frac{C - qC_1}{1-q}\right)^3.$$

Nimmt man A, B, C positiv, $A > B > C$, ferner $A_1 = B_1 = C_1 = k$, $A > k > B$, so ist ein Punkt (ξ, η, ζ) der Wendecurve der developpabelen Fläche, welche den beiden Flächen:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = k$$

umschrieben ist, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$24) \quad \begin{cases} (k\xi)^2 = \dfrac{(k-B)(k-C)}{(A-B)(A-C)} \left(\dfrac{A-kq}{1-q}\right)^3, \\ (k\eta)^2 = \dfrac{(A-k)(k-C)}{(A-B)(B-C)} \left(\dfrac{B-kq}{1-q}\right)^3, \\ (k\zeta)^2 = \dfrac{(A-k)(k-B)}{(A-C)(B-C)} \left(\dfrac{kq-C}{1-q}\right)^3, \end{cases}$$

wo $\frac{B}{k} > q > \frac{C}{k}$. Die developpabele Fläche ist die Parallelfläche für die constante Distanz $\sqrt{k}$ zur Kegelfläche:

$$\frac{x^2}{A-k} = \frac{y^2}{k-B} + \frac{z^2}{k-C}.$$

Aus den Gleichungen 24) findet man:

$$k\frac{\partial s}{\partial q} = \sqrt{\{(A-k)(k-B)(k-C)\}} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{(1-q)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial q} = \tfrac{1}{2} k\sqrt{k} \cdot \frac{\sqrt{(1-q)}}{\sqrt{\{(A-kq)(B-kq)(C-kq)\}}},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial q} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{(A-k)(B-k)(C-k)}{(A-kq)(B-kq)(C-kq)}\right\}}\, \frac{1}{1-q}.$$

III.

Sind die beiden Flächen $f=0$ und $f_1=0$ zwei Flächen zweiten Grades, so lässt sich die Gleichung der umschriebenen developpabelen Fläche am einfachsten ausführen, wenn statt der Punktcoordinaten sogenannte tetraedrische Coordinaten zu Grunde gelegt werden. Man kann bekanntlich das Fundamentaltetraeder so wählen, dass die Ecken desselben, in Beziehung auf jede der gegebenen Flächen, die Pole der gegenüberliegenden Seitenebenen sind. Die auszuführenden Rechnungen entsprechen dann dem einfachsten Fall für Punktcoordinaten, wenn nämlich die beiden Flächen concentrisch sind und ihre Hauptachsen gleiche Richtungen haben. Die Reduction zweier homogenen Functionen zweiten Grades mittelst einer linearen Substitution auf ihre einfachsten Formen, in welchen die Producte ungleicher Variabelen nicht enthalten sind, ist schon mehrfach ausgeführt; der grösseren Uebersichtlichkeit wegen sind im Nachstehenden nur die Entwickelungen der bemerkten Reduction ausgeführt, unter Hinzufügung einiger neuen Relationen, welche für den vorliegenden Zweck erforderlich sind.

Seien P und Q zwei homogene Functionen zweiten Grades der n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so dass:

$$1)\qquad P=\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} a_{r,s}x_r x_s,\qquad Q=\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} b_{r,s}x_r x_s,$$

wo allgemein $a_{r,s}=a_{s,r}$ und $b_{r,s}=b_{s,r}$ ist. Mittelst der Substitution:

$$2)\qquad \begin{cases} c_{1,1}x_1+c_{2,1}x_2+\ldots+c_{n,1}x_n=\varrho y_1, \\ c_{1,2}x_1+c_{2,2}x_2+\ldots+c_{n,2}x_n=\varrho y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1,n}x_1+c_{2,n}x_2+\ldots+c_{n,n}x_n=\varrho y_n, \end{cases}$$

lassen sich P und Q als Functionen von $\varrho y_1, \ldots \varrho y_n$ auf folgende Art darstellen:

$$3)\qquad \begin{cases} P=(a_1 y_1^2+a_2 y_2^2+\ldots+a_n y_n^2)\varrho^2, \\ Q=(b_1 y_1^2+b_2 y_2^2+\ldots+b_n y_n^2)\varrho^2. \end{cases}$$

Substituirt man in die Gleichungen 3) für P, Q ihre Werthe aus 1) und die Werthe von $\varrho y_1, \varrho y_2, \ldots \varrho y_n$ aus 2), so ergeben sich die $n(n+1)$ Gleichungen:

$$4)\qquad \begin{cases} a_1 c_{r,1}c_{s,1}+a_2 c_{r,2}c_{s,2}+\ldots+a_n c_{r,n}c_{s,n}=a_{r,s}, \\ b_1 c_{r,1}c_{s,1}+b_2 c_{r,2}c_{s,2}+\ldots+b_n c_{r,n}c_{s,n}=b_{r,s}, \end{cases}$$

wo r, s alle ganzen Zahlen von 1 bis n durchlaufen. Von den n^2 Coefficienten $c_{r,s}$ der Substitution 2) und den $2n$ Quantitäten $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ bleiben n unbestimmt, eine Unbestimmtheit, welche sich leicht aufheben lässt, wenn $\frac{y_1}{\sqrt{a_1}}, \ldots \frac{y_n}{\sqrt{a_n}}$ statt $y_1 \ldots y_n$ gesetzt wird. Es soll vorausgesetzt werden, dass keine der Determinanten:

5) $$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,n} \\ a_{n,1}, & a_{n,n} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,n} \\ b_{n,1}, & b_{n,n} \end{vmatrix} = B$$

verschwindet. Durch C werde die folgende Determinante bezeichnet:

6) $$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,n} \\ c_{n,1} & c_{n,n} \end{vmatrix} = C.$$

In den Determinanten A, B, C seien respective $\alpha_{r,s}$, $\beta_{r,s}$, $\gamma_{r,s}$ die Factoren von $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, $c_{r,s}$.

Die Determinante C mit $a_1, a_2 \ldots a_n$ multiplicirt, giebt:

7) $$\begin{vmatrix} a_1\, c_{1,1}, & a_2\, c_{1,2}, \ldots & a_n\, c_{1,n} \\ a_1\, c_{2,1}, & a_2\, c_{2,2}, \ldots & a_n\, c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1\, c_{n,1}, & a_2\, c_{n,2}, \ldots & a_n\, c_{n,n} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n\, C.$$

Bildet man das Product mit der Gleichung 6), so ist nach 4) die linke Seite des Products gleich A, die rechte Seite gleich $a_1 a_2 \ldots a_n C^2$. Man erhält so die beiden Gleichungen:

8) $$A = a_1 a_2 \ldots a_n C^2, \quad B = b_1 b_2 \ldots b_n C^2.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung 4) mit b_m, die zweite mit a_m, bildet die Differenz der Producte, so folgt:

$$\sum_{t=1}^{t=n} (a_m b_t - b_m a_t)\, c_{r,t}\, c_{s,t} = a_m b_{r,s} - b_m a_{r,s}.$$

Für $s = 1, 2, \ldots n$ ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, (a_m b_t - b_m a_t)\, c_{r,t}\, c_{1,t} = a_m b_{r,1} - b_m a_{r,1}, \\ &\Sigma\, (a_m b_t - b_m a_t)\, c_{r,t}\, c_{2,t} = a_m b_{r,2} - b_m a_{r,2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Sigma\, (a_m b_t - b_m a_t)\, c_{r,t}\, c_{n,t} = a_m b_{r,n} - b_m a_{r,n}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\gamma_{1,m}, \gamma_{2,m}, \ldots \gamma_{n,m}$, bildet die Summe der Producte, berücksichtigt:

$$\gamma_{1,m}\, c_{1,t} + \ldots + \gamma_{n,m}\, c_{n,t} = 0, \quad t \gtrless m,$$
$$a_m b_t - b_m a_t = 0, \quad t = m,$$

so folgt:

$$(a_m b_{r,1} - b_m a_{r,1})\, \gamma_{1,m} + \ldots + (a_m b_{r,n} - b_m a_{r,n})\, \gamma_{n,m} = 0,$$

oder $\frac{a_m}{b_m} = z$ gesetzt:

$$(z\, b_{r,1} - a_{r,1})\, \gamma_{1,m} + \ldots + (z\, b_{r,n} - a_{r,n})\, \gamma_{n,m} = 0.$$

Setzt man hierin $r = 1, 2, \ldots n$, so ergiebt sich für $\gamma_{1,m} \ldots \gamma_{n,m}$ ein System von n Gleichungen, dessen Determinante verschwinden muss, da nicht gleichzeitig $\gamma_{1,m} \ldots \gamma_{n,m}$ verschwinden können. Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} z\, b_{1,1} - a_{1,1}, & z\, b_{1,2} - a_{1,2}, \ldots & z\, b_{1,n} - a_{1,n} \\ z\, b_{2,1} - a_{2,1}, & z\, b_{2,2} - a_{2,2}, \ldots & z\, b_{2,n} - a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z\, b_{n,1} - a_{n,1}, & z\, b_{n,2} - a_{n,2}, \ldots & z\, b_{n,n} - a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

oder:

9) $$Bz^n - pz^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} qz + (-1)^n A = 0,$$

wo:

10) $$\begin{cases} p = \sum_{r=1}^{r=n} (a_{1,r}\beta_{1,r} + a_{2,r}\beta_{2,r} + \ldots + a_{n,r}\beta_{n,r}), \\ q = \sum_{r=1}^{r=n} (b_{1,r}\alpha_{1,r} + b_{2,r}\alpha_{2,r} + \ldots + b_{n,r}\alpha_{n,r}). \end{cases}$$

Bezeichnet man die Wurzeln der obigen Gleichung in z durch $z_1, z_2, \ldots z_n$, so hat man bekanntlich:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \frac{p}{B}, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = \frac{q}{A}.$$

Da nun allgemein $z = \frac{a_m}{b_m}$, so sind die Wurzeln von 9) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$. Hieraus folgt:

11) $$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{B}, \quad \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{q}{A}.$$

Multiplicirt man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,s}, & c_{1,n} \\ c_{r-1,1}, & c_{r-1,s}, & c_{r-1,n} \\ 0, & 1, & 0 \\ c_{r+1,1}, & c_{r+1,s}, & c_{r+1,n} \\ c_{n,1}, & c_{n,s}, & c_{n,n} \end{vmatrix} = \gamma_{r,s}$$

mit der Gleichung 7), so folgt nach 4):

12) $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s} & a_{1,n} \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,s} & a_{r-1,n} \\ c_{1,s} & c_{r,s} & c_{n,s} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,s} & a_{r+1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,s} & a_{n,n} \end{vmatrix} a_s = a_1 a_2 \ldots a_n C \gamma_{r,s}.$$

Die links stehende Determinante ergiebt sich aus A, wenn die Elemente $a_{r,1}, a_{r,2} \ldots a_{r,n}$ ersetzt werden durch $c_{1,s}, c_{2,s}, \ldots c_{n,s}$. Hieraus folgt:

$$a_s (\alpha_{r,1} c_{1,s} + \alpha_{r,2} c_{2,s} + \ldots + \alpha_{r,n} c_{n,s}) = a_1 \ldots a_n C \gamma_{r,s}.$$

Wegen $a_1 a_2 \ldots a_n C = \frac{A}{C}$ und $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$ lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

13) $$a_s(\alpha_{1,r} c_{1,s} + \alpha_{2,r} c_{2,s} + \ldots + \alpha_{n,r} c_{n,s}) = \frac{A}{C} \gamma_{r,s}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 2) respective mit $a_1 c_{r,1}, a_2 c_{r,2}, \ldots a_n c_{r,n}$ bildet die Summe der Producte, so folgt nach 4)

$$\varrho (a_1 c_{r,1} y_1 + a_2 c_{r,2} y_2 + \ldots + a_n c_{r,n} y_n) = x_1 a_{r,1} + x_2 a_{r,2} + \ldots + x_n a_{r,n},$$

d. i.:

$$14)\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x_r} = \varrho \sum_{s=1}^{s=n} a_s y_s c_{r,s}.$$

Mittelst dieser Gleichung folgt:

$$15)\quad \tfrac{1}{2}\left\{\beta_{1,r}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \beta_{2,r}\frac{\partial P}{\partial x_2} + \ldots + \beta_{n,r}\frac{\partial P}{\partial x_n}\right\}$$

$$= \varrho \sum_{s=1}^{s=n} a_s y_s (\beta_{1,r} c_{1,s} + \beta_{2,r} c_{2,s} + \ldots + \beta_{n,r} c_{n,s}).$$

Analog wie die Gleichung 13) findet man:

$$b_s(\beta_{1,r} c_{1,s} + \beta_{2,r} c_{2,s} + \ldots + \beta_{n,r} c_{n,s}) = \frac{B}{C}\gamma_{r,s}.$$

Die Gleichung 15) geht hierdurch über in:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=n}\beta_{s,r}\frac{\partial P}{\partial x_s} = \varrho\frac{B}{C}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{a_t}{b_t} y_t \gamma_{r,t}.$$

Für $r=1, 2, \ldots n$ ergeben sich hieraus die n Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=n}\beta_{s,1}\frac{\partial P}{\partial x_s} = \varrho\frac{B}{C}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{a_t}{b_t} y_t \gamma_{1,t},$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=n}\beta_{s,2}\frac{\partial P}{\partial x_s} = \varrho\frac{B}{C}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{a_t}{b_t} y_t \gamma_{2,t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=n}\beta_{s,n}\frac{\partial P}{\partial x_s} = \varrho\frac{B}{C}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{a_t}{b_t} y_t \gamma_{n,t}.$$

Diese Gleichungen resp. mit $\tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x_1}, \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x_2}, \ldots \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x_n}$ multiplicirt und addirt, geben nach 14):

$$\tfrac{1}{4}\sum_{s=1}^{1=n}\frac{\partial P}{\partial x_s}\left(\beta_{s,1}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \beta_{s,2}\frac{\partial P}{\partial x_2} + \ldots + \beta_{s,n}\frac{\partial P}{\partial x_n}\right)$$

$$= \varrho^2\frac{B}{C}\sum_{t=1}^{t=n}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{a_s a_t}{b_t} y_s y_t (c_{1,s}\gamma_{1,t} + \ldots + c_{n,s}\gamma_{n,t}).$$

Da in der Doppelsumme rechts nur die Terme übrig bleiben, für welche $s=t$ ist, so folgt:

$$16)\quad \tfrac{1}{4}\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n}\beta_{r,s}\frac{\partial P}{\partial x_r}\frac{\partial P}{\partial x_s} = \varrho^2 B\sum_{s=1}^{s=n}\frac{a_s^2}{b_s} y_s^2.$$

Auf analoge Weise folgt:

$$17)\quad \tfrac{1}{4}\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n}\alpha_{r,s}\frac{\partial Q}{\partial x_r}\frac{\partial Q}{\partial x_s} = \varrho^2 A\sum_{s=1}^{s=n}\frac{b_s^2}{a_s} y_s^2.$$

IV.

Seien y_1, y_2, y_3, y_4 vier homogene, lineare Functionen der vier Variabeln $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ und x_4. Die Gleichungen $P=0$ und $Q=0$ zweier Flächen zweiten Grades lassen sich auf folgende Formen bringen:

$$1)\qquad \begin{cases} a_1 y^2_1 + a_2 y^2_2 + a_3 y^2_3 + a_4 y^2_4 = 0, \\ b_1 y^2_1 + b_2 y^2_2 + b_3 y^2_3 + b_4 y^2_4 = 0. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung werde im Folgenden gesetzt:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = \Sigma g.$$

Berührt die Ebene:

$$2)\qquad \Sigma v y = 0$$

jede der Flächen 1), so finden die Relationen statt:

$$3)\qquad \Sigma \frac{v^2}{a} = 0, \quad \Sigma \frac{v^2}{b} = 0.$$

Von den vier Parametern v_1, v_2, v_3, v_4 der Gleichung 2) sind nur drei arbiträr, da dieselbe durch einen der Parameter dividirt nur drei beliebige Constanten enthält. Die Gleichungen 2) und 3) bleiben ungeändert, wenn allgemein v ersetzt wird durch $\frac{v}{c}$, wo $c^2 (v^2_1 + v^2_2 + {}^2_3 + v_4^2) = 1$ genommen werden kann, so dass, unbeschadet der Allgemeinheit:

$$4)\qquad \Sigma v^2 = 1$$

sein möge. Die vier Parameter v_1, v_2, v_3, v_4 der Gleichungen 2), 3) und 4) werden als Functionen einer Variabelen u angesehen. Differenziirt man unter dieser Voraussetzung die Gleichung 2) nach u, so ist das Resultat der Elimination von u zwischen der Gleichung 2) und der folgenden:

$$5)\qquad \Sigma y \frac{\partial v}{\partial u} = 0,$$

die Gleichung der developpabelen Fläche, welche die beiden Flächen 1) gleichzeitig berührt. Die Gleichungen 3) und 4) nach u differentiirt geben:

$$6)\qquad \Sigma \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{v}{b} \frac{\partial v}{\partial u} = 0, \quad \Sigma v \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) folgt:

$$7)\qquad \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ \frac{v_1}{a_1}, & \frac{v_2}{a_2}, & \frac{v_3}{a_3}, & \frac{v_4}{a_4} \\ \frac{v_1}{b_1}, & \frac{v_2}{b_2}, & \frac{v_3}{b_3}, & \frac{v_4}{b_4} \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminirt man v_1, v_2, v_3, v_4 zwischen den Gleichungen 2), 3), 4) und 7), so ist das Resultat der Elimination die Gleichung der developpabelen Fläche. Die Gleichung 7) lässt sich durch vier Gleichungen von folgender Form ersetzen:

$$y_r = \lambda \frac{v_r}{a_r} + \mu \frac{v_r}{b_r} + \nu v_r,$$

für $r = 1, 2, 3, 4$; λ, μ, ν sind drei Unbestimmte. Multiplicirt man diese Gleichung mit v_r, setzt darauf $r = 1, 2, 3, 4$, addirt die Producte, so folgt nach 2) und 3): $\nu = 0$. Man hat also:

$$y_r = v_r\left(\frac{\lambda}{a_r} + \frac{\mu}{b_r}\right),$$

oder mit Weglassung des Index:

$$8)\qquad v = \frac{y}{\frac{\lambda}{a} + \frac{\mu}{b}}.$$

Setzt man diesen Werth von v in die Gleichungen 3), so gehen dieselben über in:

$$9)\qquad \Sigma\frac{1}{a}\frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2} = 0, \quad \Sigma\frac{1}{b}\frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2} = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung 9) mit λ, die zweite mit μ, so giebt ihre Summe:

$$10)\qquad \Sigma\frac{y^2}{\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}} = 0.$$

Die Gleichungen 9) folgen respective durch Differentiation der Gleichung 10) nach λ und μ. Hieraus folgt, dass die Discriminante der Gleichung 10) gleich Null gesetzt, die gesuchte Gleichung der Fläche ist.

Die Gleichung 10) vollständig entwickelt ist:

$$\begin{aligned} 11)\qquad &\frac{\lambda^3}{a_1 a_2 a_3 a_4}(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2) \\ &+ \frac{\lambda^2\mu}{a_1 a_2 a_3 a_4}\left\{\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\frac{a_4}{b_4}\right)(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + a_4 y_4^2)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{a_1^2}{b_1}y_1^2 + \frac{a_2^2}{b_2}y_2^2 + \frac{a_3^2}{b_3}y_3^2 + \frac{a_4^2}{b_4}y_4^2\right)\right\} \\ &+ \frac{\lambda\mu^2}{b_1 b_2 b_3 b_4}\left\{\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}\right)(b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{b_1^2}{a_1}y_1^2 + \frac{b_2^2}{a_2}y_2^2 + \frac{b_3^2}{a_3}y_3^2 + \frac{b_4^2}{a_4}y_4^2\right)\right\} \\ &+ \frac{\mu^3}{b_1 b_2 b_3 b_4}(b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2) = 0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Wendecurve dienen die Gleichungen:

$$\Sigma v y = 0, \quad \Sigma y\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \quad \Sigma y\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen 6) und die Gleichung 5) nach u differentiirt, geben:

$$\Sigma\frac{v}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} + \Sigma\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 = 0, \quad \Sigma\frac{v}{b}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} + \Sigma\frac{1}{b}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2,$$

$$\Sigma y\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit -1 und bildet die Summe, so folgt:

$$\Sigma\left\{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)v-y\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}+\Sigma\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2=0.$$

Da nun nach 8) allgemein $\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)v=y$, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf:

$$12)\qquad \Sigma\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2=0.$$

Bedeutet H eine Unbestimmte, so geben die Gleichungen 6):

$$H\frac{\partial v_1}{\partial u}=\begin{vmatrix} v_2, & v_3, & v_4 \\ \frac{v_2}{a_2}, & \frac{v_3}{a_3}, & \frac{v_4}{a_4} \\ \frac{v_2}{b_2}, & \frac{v_3}{b_3}, & \frac{v_4}{b_4}\end{vmatrix}=\frac{1}{a_2 a_3 a_4}\begin{vmatrix} a_2 v_2, & a_3 v_3, & a_4 v_4 \\ v_2, & v_3, & v_4 \\ \frac{a_2}{b_2}v_2, & \frac{a_3}{b_3}v_3, & \frac{a_4}{b_4}v_4\end{vmatrix}.$$

Bildet man das Product der beiden rechts stehenden Determinanten, so folgt:

$$a_2 a_3 a_4 H^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2=\begin{vmatrix} \Sigma a v^2 - a_1 v^2_1, & 1-v^2_1, & \Sigma\frac{a}{b}v^2-\frac{a_1}{b_1}v^2_1 \\ 1-v^2_1, & -\frac{v^2_1}{a_1}, & -\frac{v^2_1}{b_1} \\ \Sigma\frac{a}{b}v^2-\frac{a_1}{b_1}v^2_1, & -\frac{v^2_1}{b_1}, & \Sigma\frac{a}{b^2}v^2-\frac{a_1}{b^2_1}v^2_1\end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 H^2\frac{1}{a_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2=\frac{a_1}{b^2_1}v_1^2+(2v^2_1-1)\,\Sigma\frac{a}{b^2}v^2-2\frac{v^2_1}{b_1}\,\Sigma\frac{a}{b}v^2$$
$$+\frac{v^2_1}{a_1}\left\{\left(\Sigma\frac{a}{b}v^2\right)^2-\Sigma a v^2\,.\,\Sigma\frac{a}{b^2}v^2\right\}.$$

Diese Gleichung und drei analoge Gleichungen geben, mit Rücksicht auf 3) und 4):

$$a_1 a_2 a_3 a_4 H^2\,\Sigma\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2=-\Sigma\frac{a}{b^2}v^2.$$

Auf ganz ähnliche Weise folgt:

$$b_1 b_2 b_3 b_4 H^2\,\Sigma\frac{1}{b}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2=-\Sigma\frac{b}{a^2}v^2.$$

Mittelst der beiden letzten Gleichungen geht die Gleichung 12) über in:

$$\frac{\lambda}{a_1 a_2 a_3 a_4}\,\Sigma\frac{a}{b^2}v^2+\frac{\mu}{b_1 b_2 b_3 b_4}\,\Sigma\frac{b}{a^2}v^2=0,$$

d. i. nach 8):

$$13)\qquad \frac{\lambda}{a_1 a_2 a_3 a_4}\,\Sigma\frac{a}{b^2}\frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2}+\frac{\mu}{b_1 b_2 b_3 b_4}\,\Sigma\frac{b}{a^2}\frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2}=0.$$

Nun ist:

$$\mu^2 \Sigma \frac{a}{b^2} \frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2} = \Sigma a y^2 - 2\lambda \Sigma \frac{y^2}{\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}} + \lambda^2 \Sigma \frac{a y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2}.$$

Diese Gleichung reducirt sich nach 9) und 10) einfach auf:

$$\Sigma \frac{a}{b^2} \frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)} = \frac{1}{\mu^2} \Sigma a y^2.$$

Mittelst dieser Gleichung und

$$\Sigma \frac{b^2}{a} \frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}\right)^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Sigma b y^2$$

lässt sich die Gleichung 13) auf folgende Weise schreiben:

$$\frac{\lambda^3}{a_1 a_2 a_3 a_4} \Sigma a y^2 + \frac{\mu^3}{b_1 b_2 b_3 b_4} \Sigma b y^2 = 0,$$

oder entwickelt:

$$14) \quad \frac{\lambda^3}{a_1 a_2 a_3 a_4} (a_1 y^2_1 + a_2 y^2_2 + a_3 y^2_3 + a_4 y^2_4) + \frac{\mu^3}{b_1 b_2 b_3 b_4} (b_1 y^2_1 + b_2 y^2_2 + b_3 y^2_3 + b_4 y^2_4) = 0.$$

Durch diese Gleichung und die Gleichungen 9) ist die Wendecurve bestimmt. Nimmt man in den Gleichungen 1), 3), 8), 10), 11) und 16) von III $n=4$, so kann man in den Gleichungen 11) und 14) von IV unmittelbar statt der tetraedrischen Coordinaten die gewöhnlichen Punktcoordinaten einführen. Man gelangt dann zu folgendem Resultat.

In den beiden homogenen Functionen:

$$P = \sum_{r=1}^{r=4} \sum_{s=1}^{s=4} a_{r,s} x_r x_s, \quad Q = \sum_{r=1}^{r=4} \sum_{s=1}^{s=4} b_{r,s} x_r x_s,$$

sei allgemein $a_{r,s} = a_{s,r}$, $b_{r,s} = b_{s,r}$. Bezeichnet $\alpha_{r,s}$ den Factor von $a_{r,s}$ in A, $\beta_{r,s}$ den Factor von $b_{r,s}$ in B, wo:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,4} \\ a_{4,1}, & a_{4,4} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,4} \\ b_{4,1}, & b_{4,4} \end{vmatrix},$$

setzt man:

$$p = \sum_{r=1}^{r=4} \sum_{s=1}^{s=4} a_{r,s} \beta_{r,s}, \quad q = \Sigma \Sigma b_{r,s} \alpha_{r,s},$$

$$4 P_1 = \Sigma \Sigma \beta_{r,s} \frac{\partial P}{\partial x_r} \frac{\partial P}{\partial x_s}, \quad 4 Q_1 = \Sigma \Sigma \alpha_{r,s} \frac{\partial Q}{\partial x_r} \frac{\partial Q}{\partial x_s},$$

so ist die Discriminante der Gleichung:

$$P B \lambda^3 + (P p - P_1) \lambda^2 \mu + (Q q - Q_1) \lambda \mu^2 + A Q \mu^3 = 0$$

gleich Null gesetzt, die Gleichung der developpabelen Fläche, welche den beiden Flächen $P=0$ und $Q=0$ umschrieben ist. Die Gleichung der Fläche ist also das Resultat der Elimination von $\frac{\lambda}{\mu}$ zwischen den Gleichungen:

$$3PB\lambda^2+2(Pp-P_1)\lambda\mu+(Qq-Q_1)\mu^2=0,$$
$$(Pp-P_1)\lambda^2+2(Qq-Q_1)\lambda\mu+3AQ\mu^2=0.$$

Für die Wendecurve tritt zu den vorstehenden Gleichungen noch die folgende:

$$BP\lambda^3+AQ\mu^3=0.$$

Durch Ausführung der angegebenen Elimination ergiebt sich als Gleichung der Fläche:

$$(Pp-P_1)^2(Qq-Q_1)^2-4AQ(Pp-P_1)^3-4BP(Qq-Q_1)^3$$
$$-27(ABPQ)^2+18ABPQ(Pp-P_1)(Qq-Q_1)=0.$$

Die Wendecurve ist durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt:

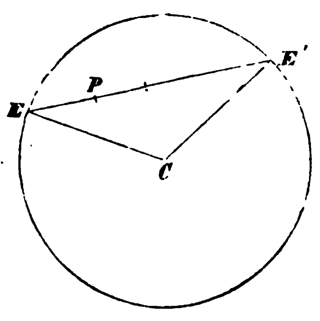
$$(Pp-P_1)^2=3BP(Qq-Q_1),$$
$$(Qq-Q_1)^2=3AQ(Pp-P_1).$$

Die durch P_1 und Q_1 bezeichneten Functionen haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich $P_1=0$ die Gleichung der reciproken Polarfläche der Fläche $Q=0$ in Beziehung auf die Fläche $P=0$. Analoge Bedeutung hat die Gleichung $Q_1=0$.

Kleinere Mittheilungen.

XV. Mittheilungen aus Thomson and Tait, treatise on natural philosophy. Oxford 1867.

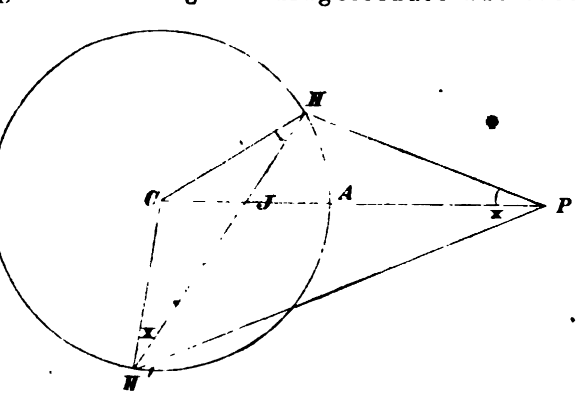
Inhalt des Stückes, den ein Kegel von sehr geringer Oeffnung aus einer Kugelfläche herausschneidet. Es sei E der Inhalt eines sehr kleinen Stückes der Kugelfläche (d. h. eines Stückes, wovon jeder Theil dem Punkt E sehr nahe liegt) und welches durch einen Kegel, der P zur Spitze hat, aus der Kugelfläche herausgeschnitten wird. Die sehr kleine Oeffnung dieses Kegels sei ω; so gross ist also das Stück, welches er aus einer Kugel schneidet, deren Mittelpunkt mit seiner Spitze zusammenfällt und deren Radius die Einheit ist. Aus einer Kugel, deren Mittelpunkt P und deren Radius PE ist, würde jener Kegel das Stück ωPE^2 schneiden. Dieses Stück ist die orthogonale Projection des Elementes E, und weil der Winkel zwischen beiden Kugelstücken $= PEC$ ist, so hat man



$$E = \omega PE^2 : \cos PEC = \frac{2 a \omega PE^2}{EE'},$$

wenn $a = CE$ den Radius der Kugel bezeichnet.

Die Anziehung einer homogenen Kugelschale auf einen ausserhalb gelegenen Punkt ist dieselbe, als ob die Masse der Schale im Mittelpunkt derselben concentrirt wäre. Es sei C der Mittelpunkt der sehr dünnen Kugelschale, P der ausserhalb gelegene Punkt und J ein



Punkt auf PC, so dass $CJ:CA = CA:CP$. Ferner sei die ganze Kugelschale in Paare von Elementen zerlegt, die durch einen Doppelkegel mit der Spitze J herausgeschnitten werden. H und H' seien die Inhalte zweier solcher Elemente, dem Kegel mit der Oeffnung ω entsprechend. Dann ist nach dem Obigem

$$H = \frac{\omega JH^2}{\cos CHJ} \text{ und } H' = \frac{\omega JH'^2}{\cos CH'J}.$$

Bezeichnet man mit ϱ die überall gleiche Dichtigkeit der Schale, so sind die Anziehungen der beiden Elemente H und H' auf P bezüglich

$$\varrho \frac{\omega}{\cos CHJ} \cdot \frac{JH^2}{PH^2} \text{ und } \varrho \frac{\omega}{\cos CH'J} \cdot \frac{JH'^2}{PH'^2}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CPH und CHJ folgt $\angle CPH = \angle CHJ$ und

$$\frac{JH}{HP} = \frac{CH}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

Gleicherweise folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PCH' und $CH'J$, dass $\angle CPH' = \angle CH'J$ und

$$\frac{JH'}{H'P} = \frac{CH'}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

Die Ausdrücke für die Anziehungen der Elemente H und H' auf P gehen durch diese Substitutionen über in

$$\varrho \frac{\omega}{\cos CHJ} \cdot \frac{a^2}{CP^2} \text{ und } \varrho \frac{\omega}{\cos CH'J} \cdot \frac{a^2}{CP^2}.$$

Weil Dreieck $H'CH$ gleichschenklig ist und die Winkel CPH und CPH' bezüglich gleich CHJ und $CH'J$ sind, so sind diese Ausdrücke gleich und geben eine Resultirende in der Richtung PC, deren Grösse

$$2\omega\varrho . \frac{a^2}{CP^2}.$$

Um die ganze von der Schale auf den Punkt P ausgeübte Kraft zu finden, wird die ganze Schale durch Doppelkegel, deren Spitzen in J liegen, in entsprechende Elemente zerlegt. Die Resultirende je zweier Elemente ist $2\omega' . \varrho \frac{a^2}{CP^2}$ und liegt in der Richtung PC. Da $\Sigma 2\omega$ gleich der Oberfläche der mit dem Radius 1 um J beschriebenen Kugelfläche, also $= 4\pi$ ist, so hat man als Ausdruck der ganzen von der Kugelschale auf P ausgeübten Kraft

$$\frac{4\pi\varrho . a^2}{CP^2}.$$

Duisburg, 3. Mai 1868.

Dr. W. Krumme,
Oberlehrer an der Realschule.

XVI. Auflösung einer Aufgabe von Prinz A. Boncompagni, die Summe von Cubikzahlen betreffend. Von Dr. Ludwig Matthiessen in Husum.

Im IX. Jahrgange der Zeitschrift wurde die Aufgabe mitgetheilt: Die ganzen Zahlenwerthe der Grössen x, n, r zu bestimmen, welche die Summe

$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3+\ldots\ldots+[x+(n-1)r]^3$$

zu einer Cubikzahl machen.

Inzwischen ist nach einem im XI. Bande pag. 248 u. flg. von Professor Cantor in Heidelberg gegebenen Referat im Jahre 1866 von Angelo Genocchi der päpstlichen Academia de' nuovi Lincei eine Abhandlung vorgelegt, worin er Auflösungen der unbestimmten Gleichungen

$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3+\ldots\ldots+[x+(n-1)r]^3=y^3.$$

und
$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3+\ldots\ldots+[x+(n-1)r]^3=z^2$$

giebt. Genocchi wendet dabei das bekannte Verfahren an, aus bereits entdeckten Werthen der Unbekannten neue Wurzeln zu erfinden. Angesichts des bekannten Beispiels

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

hat es nun keine Schwierigkeit für $n=3$ neue Werthe von x, r und y zu bestimmen. Da aber auch für n andere ganze Zahlenwerthe verlangt werden, indessen aus dem Referate von Professor Cantor nicht zu ersehen ist, wie Genocchi zu anderen Zahlenwerthen dieser Grösse gelangt, so will ich hier mein Verfahren mittheilen. Man kann nämlich ausgehen von folgenden identischen Gleichungen:

$$0^3+1^3=1^3 \qquad n=2$$
$$(-1)^3+1^3+3^3=3^3 \qquad n=3$$
$$(-1)^3+0^3+1^3+2^3=2^3 \qquad n=4$$
$$(-3)^3+(-1)^3+1^3+3^3+5^3=5^3 \qquad n=5$$
$$(-2)^3+(-1)^3+0^3+1^3+2^3+3^3=3^3 \qquad n=6$$

u. s. w.

Mittelst dieser Gleichungen ist man nun im Stande, eine beliebige Anzahl von Zahlen zu finden, welche eine arithmetische Progression bilden und deren Cubensumme wieder eine Kubikzahl ist, sowie umgekehrt eine jede Cubikzahl in eine beliebige Anzahl anderer Cubikzahlen zu verwandeln, deren Basen eine arithmetische Progression bilden.

Die Summe der gegebenen Reihe ist nämlich

$$n\left(x+\frac{n-1}{2}r\right)\left\{x^2+(n-1)rx+\frac{n(n-1)}{1.2}r^2\right\}=y^3.$$

Dividirt man die Gleichung durch r^3 und setzt $x:r=\xi$, $y:r=\eta$, substituirt ausserdem $2\xi+n-1=\zeta$, so erhält man

$$\frac{n}{8}\zeta(\zeta^2+n^2-1)=\eta^3.$$

Aus den oben angeführten speciellen Beispielen folgt nun, dass die Summe der Reihe ein Cubus wird, wenn

1) $n=2p=3,\quad x=-(2p+1),\quad r=2,\quad y=2p+3,$

2) $n=2p+4,\quad x=-(p+1),\quad r=1,\quad y=p+2$

ist. Fügt man hinzu die speciellen Fälle

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$
$$(-2)^3+(-1)^3+0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=6^3,$$

so ist die Summe ein Cubus, wenn

3) $n=3,\quad x=3,\quad r=1,\quad y=6,$

4) $n=8,\quad x=-2,\quad r=1,\quad y=6.$

Setzt man $2x+(n-1)r=z$, so kann die Summe offenbar noch ein Cubus werden, wenn n eine beliebige gerade oder ungerade Zahl und $z=r=1$ ist, also:

5) $n=n,\quad x=\frac{2-n}{2},\quad r=1,\quad y=\frac{n}{2}.$

Zu der Auflösung $3^3+4^3+5^3=6^3$ gelangt man, wenn man

$$n=8,\quad r=1,\quad z=1+u,\quad y=4+u$$

setzt. Hieraus ergiebt sich die Bedingung $u=2$ und $y=6$, $x=-2$. Es ist also die Auflösung

$$(-2)^3+(-1)^3+0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=6^3,$$

welche die erstere involvirt.

Zu der schönen Auflösung

$$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$$

gelangt man, wenn man $n=4$, $r=1$, $z=1+u$ setzt. Dann ist

$$y^3=\tfrac{4}{8}(1+u)\{(1+u)^2+15\}=8+9u+\tfrac{3}{2}u^2+\tfrac{1}{2}u^3.$$

Setzt man $y=2+pu$, so erhält man die Bedingungsgleichungen der Rationalität

$$p=\tfrac{3}{4},\quad u=\frac{3-12p^2}{2p^3-1}=24,\ \text{also}\ y=20,\ x=11.$$

Was den Fall $n=2$ anbetrifft, so bemerkt schon Euler in seinen Schriften, dass es unmöglich sei, zwei Cubikzahlen anzugeben, deren Summe wieder einen Cubus gäbe. Also wäre das Beispiel $0^3+m^3=m^3$ die einzige Lösung. Dann kann natürlich auch $n=1$ sein. Dass man im Stande ist, auf diese Art Cubikzahlen in die Summe beliebig vieler anderer Cubikzahlen zu verwandeln, deren Basen in arithmetischer Progression stehen, ersieht man aus folgender Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}&351120^3\\ &=0^3+351120^3\\ &=175560^3+234080^3+292600^3\\ &=193116^3+210672^3+228228^3+245784^3\\ &=183540^3+193914^3+204288^3+214662^3+225036^3\\ &=132240^3+153824^3+175408^3+196992^3+218576^3+240160^3\\ &=91245^3+117150^3+143055^3+168960^3+194865^3+220770^3+246675^3\\ &=58520^3+85690^3+112860^3+140030^3+167200^3+194370^3+221540^3+248700^3.\end{aligned}$$

XVII. Zur Geschichte der Erfindung der elektrischen Telegraphie. Abbé Moigno theilt in „Les Mondes" tome XV, livr. 14, pag. 561 mit: Cantu habe von Mailand an den Administrator des historischen Instituts, Renzi, eine Mittheilung über den Antheil Alexander Volta's an

der Erfindung der elektrischen Telegraphie gelangen lassen. Cantu sagt, dass Volta zuerst daran gedacht habe, Signale auf grosse Entfernungen mittels eines auf hölzernen Pfählen ausgespannten Drahtes zu befördern. Als Beweis dafür wird ein von Volta an den Professor Barletti am 15. April 1777 geschriebener Brief mitgetheilt. Bis auf Weiteres scheint mir aber dieser Beweis durchaus ungenügend, weil erstens in dem Briefe zwar von der Möglichkeit, von Como aus in Mailand eine elektrische Pistole zu lösen, die Rede ist, nicht aber von einer Verwerthung dieser Möglichkeit für telegraphische Zwecke, und weil zweitens bereits aus den Jahren 1753 und 1774 Vorschläge zu elektrischen Telegraphen bekannt sind.

Die betreffende Stelle des Briefes von Volta giebt Moigno mit folgenden Worten wieder: *Je ne sais à combien de milles un fil de fer tendu sur le sol des champs ou de la route, replié en arrière ou traversant un canal d'eau, conduirait l'étincelle suivant le parcours indiqué. Mais je prévois que dans un très-long voyage sur la terre humide ou à travers les eaux courants, ils s'établirait bientôt une communication qui dévierait le cours du feu électrique séparé du crochet de la bouteille pour retourner au fond. Mai, si le fil de fer était soutenu à une certaine élévation au-dessus du sol par des poteaux en bois plantés de distance à distance, par exemple de Côme à Milan, et interrompu seulement dans ce dernier lieu par mon pistolet, qu'il continuât et vint enfin plonger dans un canal de navigation, qui communique avec mon lac de Côme, je ne crois pas impossible de faire partir mon pistolet à Milan, avec une bonne bouteille de Leyde chargée par moi à Côme.*

Dagegen wurde aus „*Scots Magazine*" (Bd. XV, S. 78) zuerst von dem Glasgower Journal „*The Common Wealth*" in der Nummer vom 21. Februar 1854 ein Brief mitgetheilt, welcher nach der französischen Uebersetzung im „*Cosmos, revue encyclopédique*" (IV, 7) auch in die Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins (I, 94) überging; derselbe ist von Renfrew am 7. Februar 1753 datirt und mit C. M. unterzeichnet, was man für die Anfangsbuchstaben des Schotten Charles Marshall hält (vgl. Du Moncel, *traité de télégr. électr. p.* 304). In diesem Briefe wird vorgeschlagen, für jeden Buchstaben einen Draht mittels Glas oder Harzkitt isolirt an feste Träger zu befestigen und am Ende mit einer Kugel zu versehen, welche nach dem Elektrisiren einen auf Papier geschriebenen Buchstaben anziehen sollte; oder man sollte anstatt dieser Buchstaben Glocken von verschiedener Grösse nehmen und auf diese den elektrischen Funken überspringen lassen. Zur besseren Isolation könne man auch die Drähte ihrer ganzen Länge nach mit einer dünnen Lage von Holzkitt überziehen.

Aehnlich war bekanntlich der 1774 von Lesage in Genf gemachte Vorschlag, mittels an den Drähten angebrachter Hollundermarkkügelchen zu telegraphiren.

Schliesslich möge noch eine Notiz (in „*Comptes rendus*", *LXVI*, 1109) Erwähnung finden, in welcher die erste Idee zu einem magnetischen Tele-

graphen in das Jahr 1636 verlegt wird; dieselbe scheint sich aber auf den in Daniel Schwenter's mathematisch-philosophischen Erquickstunden (Nürnberg 1636) enthaltenen, damals und auch jetzt noch unausführbaren Vorschlag zu beziehen, welchen auch Dub (Anwendung des Elektromagnetismus S. 272) aus Poggendorff's Annalen (82, 335) mittheilt.

EDUARD ZETZSCHE.

XVIII. Ueber den Aufsatz von Dr. Grelle: „Lineare Construction des Punktepaares, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren gleichzeitig harmonisch ist" (Seite 148 laufenden Jahrganges). Die vom Verfasser behandelte Aufgabe ist augenscheinlich unmöglich lösbar; denn das Resultat sind zwei Punkte, demnach bestimmen sich diese durch eine quadratische Gleichung, und diese letztere kann nie linear lösbar sein. — Die Folgerungen des Aufsatzes sind richtig bis Seite 150 unten, wo der Verfasser sagt: „Verfährt man demnach mit den Paaren u, v und p, q ebenso, wie vorhin mit r, s und $p, q, \ldots$ so ist $i \ldots$ festgelegt." Hier hat der Verfasser übersehen, dass dieses i ein anderes auf der neuen Linie ist, als das vorhergehende (die beiden i liegen auf einer Geraden, welche durch a geht). Selbstverständlich sind auch die folgenden Aufgaben nicht linear zu lösen.

Berlin. Dr. H. HERTZER,
Lehrer an der Gewerbeakademie.

XIX. Das Carpi-Prämium. Wir wünschen unsere Leser auch dieses Jahr wieder mit der Preisfrage bekannt zu machen, an deren Lösung die päpstliche Akademie der Nuovi Lincei in Rom die Ertheilung das Carpi-Prämiums von 1000 Lires knüft. Der Gegenstand der Bearbeitung, welche bekanntlich in italienischer, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst, spätestens am 31. October 1869 der Akademie übergeben sein muss, und welcher der Name des Verfassers in mit einem Motto zu versehenden geschlossenen Couvert beizuliegen hat, ist

„Die Vergleichung der Ebbe- und Fluthverhältnisse der hauptsächlichsten Häfen an der italienischen Küste, die Prüfung und Erklärung der dabei auftretenden Unterschiede."

Mathematische Erörterungen im Anschluss an die Untersuchungen von Laplace über den Gegenstand sind dringend empfohlen; zum Mindesten eine klare Darstellung der Schwierigkeiten, welche einer mathematischen Behandlung entgegenstehen. Das experimentelle Material muss aus officiellen Quellen geschöpft sein.

XX. Erklärung in Betreff der Abhandlung des Herrn Dr. v. Drach über die cubischen Kegelschnitte. Gegenüber den Angriffen, welche unser College Dr. v. Drach durch seine Schrift über die cubischen Kegelschnitte sich zugezogen hat, fühlen wir uns zu folgender Erklärung veranlasst.

Nachdem im Eingange jener Schrift Möbius, Chasles, Seidewitz, Schröter, Cremona als diejenigen bezeichnet worden sind, durch welche die Theorie der cubischen Kegelschnitte entstanden und ausgebildet ist, fährt Drach fort:

„Mit Rücksicht darauf, dass einerseits synthetische Betrachtungen „nicht Jedermann angenehm sind und andererseits die analytische Behand- „lung Cremona's ausserhalb seines Vaterlandes weniger bekannt sein mag, „dürfte vielleicht nachfolgende Zusammenstellung der hauptsächlichsten „Eigenthümlichkeiten der Raumcurven dritter Ordnung, welche zugleich „einen Beitrag liefert zu der immer innigeren Verschmelzung der neueren „analytischen und synthetischen Geometrie, sowie zu einer Theorie der „algebraischen Raumcurven überhaupt, nicht unerwünscht sein und die „Aufmerksamkeit in etwas höherem Grade auf jene Curven hinlenken, „deren Bedeutung für die Mechanik schon von Möbius und Chasles er- „kannt wurde und denen möglicher Weise für die weitere Entwickelung „mancher mechanischer und physikalischer Untersuchungen eine nicht „unbedeutendere Rolle zugetheilt sein mag, als den ebenen Curven und den „Oberflächen zweiter Ordnung."

In der Schrift selbst sucht Drach die Untersuchungen der genannten Autoren so gut als möglich zu benutzen, um eine Darstellung zu liefern, durch welche dem Leser ein bequemer Zugang eröffnet werden soll in das Innere der in Rede stehenden Theorie.

Wenn Drach in seiner Schrift zuweilen Untersuchungen von Cremona fast wörtlich wiedergiebt, so können wir hierin nur eine Anerkennung der Vortrefflichkeit derselben erblicken, und können überhaupt nicht zugeben, dass, nachdem die von ihm benutzten Quellen in der Einleitung einmal genannt waren, der Verfasser auch im weiteren Verlaufe der Schrift zu fortwährenden Citationen verpflichtet gewesen wäre.

Allerdings, einräumen müssen wir, dass das Verfahren unseres Collegen Drach ein etwas unvorsichtiges gewesen ist. Denn jeder Leser wird, sobald er in der Einleitung einen so glänzenden Namen wie Cremona gefunden hat, ein Vorurtheil fassen zu Gunsten Cremona's, und jeden beliebigen Theil der Schrift von vornherein mehr geneigt sein, als ein Werk Cremona's denn als ein Werk Drach's anzusehen. Und was wohl zu beachten ist, jeder Leser wird fast unwillkürlich sämmtliche gute Partieen der Schrift auf Rechnung Cremona's, hingegen die weniger gelungenen oder gar fehlerhaften Partieen derselben auf Rechnung Drach's setzen.

Unvorsichtig ist es also allerdings, dass Drach nicht Schritt für Schritt angegeben hat, in wie weit die einzelnen Betrachtungen von Cremona oder von ihm selbst herrühren. Aber es ist eine Unvorsichtigkeit, durch welche Cremona in keinerlei Weise geschädigt werden kann, eine Unvorsichtigkeit, durch welche nur Drach selbst in üble Lage kommen konnte.

Jedenfalls dürfte nicht zu bestreiten sein, dass Drach sich um das grössere Publicum ein anerkennenswerthes Verdienst erworben, indem er die Aufmerksamkeit desselben auf die schätzbaren Untersuchungen Cremona's geleitet hat.

O. Hesse.
A. Clebsch.
C. Neumann.

Die projectivischen Eigenschaften der gewöhnlichen und ausgezeichneten Elemente ebener Curven.

Fortsetzung (siehe viertes Heft).

Zweiter Abschnitt.

Krumme ebene Punktreihen und ebenes Strahlbüschel, ebenes Tangentenbüschel und gerade Punktreihe in perspectivischer Lage.

§. 10. Allgemeine Definition und Erzeugungsweise von Curven.

46. *a*) Denken wir uns einen Punkt $\mathfrak{s}$ aus der Lage $\mathfrak{s}^0$ auf einer Geraden s_0 in die Lage eines der ihm benachbarten Punkte gerückt, etwa in die Lage von $\mathfrak{s}^1$, dann eine Gerade s aus der Lage s_0 in der Ebene $\mathfrak{S}$ um den Punkt $\mathfrak{s}^1$ in die Lage eines der dem Strahl s_0 benachbarten Strahlen des ebenen Strahlbüschels $\mathfrak{s}$, etwa in die Lage s_1 gedreht, dann $\mathfrak{s}$ auf der Geraden s_1 aus der Lage $\mathfrak{s}^1$ in die eines der beiden benachbarten Punkte gerückt, etwa nach $\mathfrak{s}^2$, s um den Punkt $\mathfrak{s}^2$ in derselben Ebene $\mathfrak{S}$ aus der Lage s_1 in die eines der beiden im Büschel $\mathfrak{s}^2$ benachbarten Strahlen s_2 gedreht u. s. f., so entsteht eine stetige ebene Curve*); an welchen Begriff wir jedoch die Bedingung knüpfen, dass $\mathfrak{s}$ und s in wenigstens zwei aufeinander folgenden Lagen denselben Richtungs- resp. Drehsinn beibehalte**). Jede der Geraden $s_0, s_1, s_2 \ldots s_\zeta \ldots$ verbindet zwei aufeinander folgende Curvenpunkte, resp. $\mathfrak{s}^0\,\mathfrak{s}^1$, $\mathfrak{s}^1\,\mathfrak{s}^2$, $\mathfrak{s}^2\,\mathfrak{s}^3 \ldots \mathfrak{s}^\zeta\,\mathfrak{s}^\eta \ldots$ und jeder der Punkte $\mathfrak{s}^1\,\mathfrak{s}^2, \ldots \mathfrak{s}^\zeta \ldots$ ist der Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Tangenten resp. $s_0 s_1$, $s_1 s_2 \ldots$ $s_\varepsilon s_\zeta \ldots$

b) Kommt es vor, dass, wenn s in eine Lage s_λ und der zugehörige der Punkte $\mathfrak{s}$ in die Lage $\mathfrak{s}^{\lambda+1}$ gelangt sind, der Winkel, um welchen nun s

---

*) Vgl. *Cremona*, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* No. 23; v. Staudt, Geometrie der Lage No. 2, 21.

**) Siehe die Anmerkung zu No. 50*b*².

sich dreht, gleich Null ist, also $\mathfrak{s}$ auf der Geraden s_λ an die Stelle eines der Nachbarelemente von $\mathfrak{s}^{\lambda+1}$, etwa $\mathfrak{s}^{\lambda+2}$ rücken muss, dass s ferner diese Lage s_λ beibehält und nur $\mathfrak{s}$ in die dem $\mathfrak{s}^{\lambda+2}$ benachbarte Lage $\mathfrak{s}^{\lambda+3}$ rückt u. s. f., bis $\mathfrak{s}$ zu einem Punkt $\mathfrak{s}^{\lambda+\mu}$ der Geraden s_λ gelangt, um welchen sich s aus der Lage s_λ in die eines der Nachbarelemente des Büschels $\mathfrak{s}^{\lambda+\mu}$ dreht; oder kommt es andererseits vor, dass, wenn $\mathfrak{s}$ in die Lage eines Punktes $\mathfrak{s}^\lambda$ und s in die Lage s_λ gekommen, s aus der Lage s_λ in die darauffolgende u. s. f. übergeht, ohne dass $\mathfrak{s}$ aus der Lage $\mathfrak{s}^\lambda$ rückt, bis s in eine Lage $s_{\lambda+\mu}$ gelangt, auf welchem Strahl $\mathfrak{s}$ aus der Lage $\mathfrak{s}^\lambda$ in eine benachbarte rückt, s aber in seinen sämmtlichen Lagen in derselben Ebene $\mathfrak{S}$ liegt, so nennen wir eine solche Curve eine e b e n e g e b r o c h e n e C u r v e, eine s t e t i g e e b e n e g e b r o c h e n e C u r v e, wenn weder $\mathfrak{s}$ in der Punktfolge von $\mathfrak{s}^{\lambda+1}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda+\mu-1}$ incl., noch s in der Strahlenfolge von s_λ bis $s_{\lambda+\mu-1}$ incl. den Bewegungssinn ändert.

47. Zur Erzeugung einer ebenen Curve nahmen wir die sämmtlichen in $\mathfrak{s}^1, \mathfrak{s}^2 \ldots \mathfrak{s}^\zeta \ldots$ befindlichen ebenen Strahlbüschel in einer und derselben Ebene liegend an. Denken wir uns jedoch, nachdem $\mathfrak{s}$ in den dem $\mathfrak{s}^0$ benachbarten Punkt $\mathfrak{s}^1$ und s von s_0 nach s_1 gerückt, die Ebene $\mathfrak{S}$ aus der Lage $(s_0 s_1) = \mathfrak{S}^0$ in die der einen der $\mathfrak{S}^0$ benachbarten Ebenen des Ebenenbüschels s_1 gedreht, etwa in die Lage $\mathfrak{S}^1$, dann $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{s}^1$ auf der Geraden s_1 nach $\mathfrak{s}^2$ und s aus der s_1 in die des einen seiner Nachbarstrahlen in dem der Ebene $\mathfrak{S}^1$ zugehörigen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^2$, s_2 gedreht und nun wieder die Ebene $\mathfrak{S}$ aus der Lage $\mathfrak{S}^1$ in die der einen ihrer Nachbarebenen im Ebenenbüschel s_2 gedreht, etwa in die Lage $\mathfrak{S}^2$, und nachdem $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{s}^2$ auf s_2 in die folgende Lage $\mathfrak{s}^3$ gerückt, in dem der Ebene $\mathfrak{S}^2$ zugehörigen Strahlbüschel $\mathfrak{s}^3$ die Gerade s aus der Lage s_2 in die des einen der Nachbarstrahlen, s_3 gedreht u. s. f., so entsteht eine gewöhnliche s t e t i g e R a u m c u r v e, sobald wir die Bedingung erfüllen, dass, wenn $\mathfrak{s}$ in irgend einer Lage s_λ der Geraden s den Richtungssinn oder s in irgend einer Lage $\mathfrak{s}^\mu$ von $\mathfrak{s}$ den Drehsinn oder $\mathfrak{S}$ in irgend einer Lage s_ν von s den Drehsinn ändern, die beweglichen Elemente $\mathfrak{s}$, s, $\mathfrak{S}$ den jedesmaligen neuen Richtungs- resp. Drehsinn wenigstens in zwei aufeinanderfolgenden Lagen beibehalten.

$\mathfrak{z}^0, \mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2$ u. s. f., andererseits s_0, s_1, s_2 u. s. f., $\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^2, \mathfrak{S}^3$ u. s. f. nennen wir aufeinanderfolgende Elemente der Raumcurve.

Den Inbegriff der Bewegung, welche die drei Elemente $\mathfrak{z}, s, \mathfrak{S}$ ausführen, wenn sie resp. aus einer Lage $\mathfrak{z}^\lambda, s_\lambda, \mathfrak{S}^\lambda$ in die darauffolgende resp. $\mathfrak{z}^{\lambda+1}, s_{\lambda+1}, \mathfrak{S}^{\lambda+1}$ übergehen, nennen wir eine Bewegungseinheit. Verändern in einer Aufeinanderfolge von Bewegungseinheiten eines oder zwei der Elemente $\mathfrak{z}, s, \mathfrak{S}$ ihre Lage nicht, so erhalten wir eine gebrochene stetige Raumcurve; wir stellen aber auch hier die Bedingung, dass, so lange in einer Aufeinanderfolge von Bewegungseinheiten dieselben zwei der Elemente $\mathfrak{z}, s, \mathfrak{S}$ ihre Lage nicht ändern, das dritte den Richtungs- resp. Drehsinn nicht ändern darf, und dass, so lange eines und dasselbe der Elemente $\mathfrak{z}, s$ seine Lage nicht verändert, die anderen beiden ihren Bewegungssinn nicht ändern dürfen.

a) Besteht zwischen den Ortsveränderungen der Elemente $\mathfrak{z}, s, \mathfrak{S}$ einer Bewegungseinheit und den Bewegungseinheiten unter sich ein Gesetz, so heisst die Curve eine gesetzmässige, im anderen Falle eine gesetzlose.

Gelangen nach einer Aufeinanderfolge von Bewegungseinheiten die Elemente $\mathfrak{z}, s, \mathfrak{S}$ resp. aus den Lagen $\mathfrak{z}^\lambda, s_\lambda, \mathfrak{S}^\lambda$ in die Anfangslage resp. $\mathfrak{z}^0, s_0, \mathfrak{S}^0$ und fallen sie in den folgenden Bewegungseinheiten $(\mathfrak{z} s \mathfrak{S})^{\lambda+2}$, $(\mathfrak{z} s \mathfrak{S})^{\lambda+3}$ u. s. f. resp. mit den gleichartigen Elementen der Bewegungseinheiten $(\mathfrak{z} s \mathfrak{S})^1$, $(\mathfrak{z} s \mathfrak{S})^2$ u. s. f. zusammen, so heisst die Curve eine geschlossene Curve.

b) 1. Verändert während des ganzen Verlaufes der Curve die Ebene $\mathfrak{S}$ ihre Lage nicht, so erhalten wir eine stetige ebene Curve; verändert während des ganzen Verlaufes der Curve s seine Lage nicht, so entsteht ein Ebenenbüschel, dessen Bewegungseinheiten aus den zwei beweglichen Elementen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{S}$ bestehen, und verändert während des ganzen Verlaufes der Curve $\mathfrak{z}$ seine Lage nicht, so hüllen die Elemente s und $\mathfrak{S}$ einen Kegel ein. Bleiben während des ganzen Verlaufes der Curve s und $\mathfrak{z}$ fest, so entsteht ein Ebenenbüschel, dessen Bewegungseinheiten nur aus dem einen Element $\mathfrak{S}$ bestehen; bleiben $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{z}$ fest, so entsteht ein ebener Strahlbüschel und bleiben $\mathfrak{S}$ und s fest, eine gerade Punktreihe als specielle Fälle der allgemeinen Curve.

2. Sind nie während des ganzen Verlaufes einer in der angegebenen Weise erzeugten, stetigen, gebrochenen geschlossenen Raumcurve alle drei Elemente der Bewegungseinheiten in Bewegung, wenn diese aus einer Lage in die nächstfolgende übergehen, und wechseln stets die Aufeinanderfolgen von Bewegungseinheiten, in denen die Gerade s festbleibt, während

𝔖 und 𝔖 in der angegebenen Weise stetig ihre Lage verändern, mit solchen Aufeinanderfolgen ab, in denen die Gerade s stetig ihre Lage verändert, während 𝔖 und 𝔖 festbleiben, so entsteht ein räumliches und wenn die Ebene 𝔖 stets festbleibt, ein ebenes Polygon als specieller Fall der allgemeinen, stetigen, gebrochenen und geschlossenen Raumcurve.

c) Aus dem Vorhergehenden folgt, gemäss den in § 1 gemachten Voraussetzungen als charakteristisches Merkmal aller Curven, welche auf die erwähnte Art erzeugt gedacht werden können, dass jede Bewegungseinheit nur an zwei benachbarte grenzt, so dass, wenn die eine derselben als die vorhergehende bezeichnet wird, nur eine die folgende sein kann, und dass jedes der Elemente der Bewegungseinheiten (der Curve) nur an zwei gleichartige grenzt, derart, dass, wenn das eine derselben das vorhergehende, nur eines das folgende sein kann, die Curve also nur in zweierlei, einander entgegengesetzten Bewegungssinnen von den sie bildenden Bewegungseinheiten oder deren Elementen beschrieben werden kann.

Weiter auf die Raumcurven einzugehen, entspricht unserem Zwecke nicht; bis hierher glaubten wir aber auch auf sie unsere Discussion ausdehnen zu müssen, um die allgemeine Giltigkeit der angegebenen Erzeugungsart der Curven und damit ihre Berechtigung und ihre Grenzen zu erkennen (vergl. No. 7d).

48. Nachdem in dem ersten Abschnitt die speciellen ebenen stetigen Curven, eine oder mehrere gerade Punktreihen mit einem oder mehreren ebenen Strahlbüscheln in perspectivische Beziehung gebracht und die in den verschiedenen Lagen derselben stattfindenden und die jedesmalige Lage charakterisirenden Eigenschaften, die Abhängigkeit der Lage und des Bewegungssinnes jedes der Elemente von der Lage und dem Bewegungssinn des entsprechenden erörtert, wollen wir in diesem Abschnitt die allgemeinen stetigen ebenen nicht gebrochenen Curven in ihren Beziehungen zu diesen einfachsten ebenen stetigen Curven in gleicher Weise untersuchen und im Folgenden unter „Curve" immer eine ebene stetige nicht gebrochene Curve verstehen, welche wir uns auf die in No. 46 angegebene Art erzeugt denken können.

a) Eine solche Curve kann, da jede ihrer Bewegungseinheiten stets aus zwei Elementen, Punkt und Gerade besteht, ihrer Entstehung gemäss (No. 46 und 47c) sowohl als eine continuirliche Aufeinanderfolge von Punkten, eine krumme Punktreihe, wie als eine continuirliche Aufeinanderfolge von Strahlen, ein Tangentenbüschel angesehen werden. Jeder Punkt der Curve erscheint als der Mittelpunkt eines ebenen Strahlbüschels, welcher zwei aufeinanderfolgende Strahlen mit der Curve, d. i. ihrem Tangentenbüschel gemeinschaftlich hat, und jede Tangente der Curve als eine

gerade Punktreihe, welche zwei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemeinschaftlich hat.

b) Den Voraussetzungen in No. 2 und 3 zufolge oder nach No. 5 entspricht

jedem Punkt der Curve in jedem Strahlbüschel der Ebene, mit dessen Mittelpunkt er nicht zusammenfällt, ein und nur ein Strahl, welcher mit ihm perspectivisch liegt; in demjenigen Strahlbüschel aber, dessen Mittelpunkt mit ihm identisch ist, entsprechen ihm alle Strahlen;

je zwei von einander verschiedenen aufeinanderfolgenden Punkten $\mathfrak{s}^{\pi}$, $\mathfrak{s}^{\pi+1}$ der Curve entsprechen in jedem der Strahlbüschel der Ebene, deren Mittelpunkte ausserhalb der beiden gemeinschaftlichen Tangente s_{π} liegen, zwei aufeinanderfolgende von einander verschiedene Strahlen;

in jedem der Strahlbüschel der Ebene, deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{s}^{\pi}$ und $\mathfrak{s}^{\pi+1}$ verschiedenen Punkte von s_{π} sind, ein und derselbe (zwei zusammenfallende) Strahl, nämlich die beide verbindende Tangente s_{π};

in jedem der beiden Strahlbüschel, deren Mittelpunkte die Punkte $\mathfrak{s}^{\pi}$ und $\mathfrak{s}^{\pi+1}$ selbst sind, die Tangente s_{π}, der beiden gemeinschaftliche Strahl, und alle übrigen Büschelstrahlen.

jeder Tangente der Curve auf jeder geraden Punktreihe der Ebene, deren Träger nicht mit ihr zusammenfällt, ein und nur ein Punkt, welcher mit ihr perspectivisch liegt; auf derjenigen Punktreihe aber, deren Träger mit ihr identisch ist, entsprechen ihr alle Punkte;

je zwei von einander verschiedenen aufeinanderfolgenden Tangenten $s_{\pi-1}$, s_{π} der Curve entsprechen auf jeder der geraden Punktreihen der Ebene, welche nicht den beiden gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{s}^{\pi}$ enthalten, zwei aufeinanderfolgende von einander verschiedene Punkte;

auf jeder der Punktreihen, welche den beiden gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{s}^{\pi}$ enthalten, aber mit keiner derselben zusammenfallen, ein und derselbe (zwei zusammenfallende) Punkt, nämlich der Curvenpunkt $\mathfrak{s}^{\pi}$;

auf jeder der beiden Punktreihen, deren Träger diese beiden Tangenten selbst sind, der Curvenpunkt $\mathfrak{s}^{\pi}$, welcher beiden gemeinschaftlich ist, und alle übrigen Punkte der Geraden.

§. 11. Gewöhnliche endliche Curvenelemente.

A. Allgemeine Bestimmungen.

49. Bewegen wir eine Gerade s_{ϱ} so, dass sie in einem bestimmten Sinne Σ der Reihe nach die Lage der Tangenten s einer ebenen stetigen Curve S einnimmt, von irgend einer ihrer Tangenten an, welche wir mit s_{0}

bezeichnen wollen, und rücke ein Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf der Geraden s_ϱ in jeder ihrer Lagen so fort, dass er der Reihe nach die Punkte der Curve von $\mathfrak{s}^o$ an deckt, das heisst also, lassen wir die Gerade s_ϱ im Sinne Σ von s_o an den Tangentenbüschel und zugleich den Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ von $\mathfrak{s}^o$ an die krumme Punktreihe S durchlaufen, so wird zufolge No. 46 und $14a^1$ durch die Bestimmung des Bewegungssinnes Σ auf jeder der Tangenten s der Curve ein gewisser Richtungs- und in jedem der Büschel $\mathfrak{s}$ ein gewisser Drehsinn bezeichnet, welche jeder gleichzeitig mit Σ in den entgegengesetzten übergehen.

a) Wir nehmen nun vorläufig an, die Curve S habe in den nächsten λ im Sinne Σ auf s_o resp. $\mathfrak{s}^o$ folgenden Tangenten $s_1\ s_2 \ldots s_\lambda$ und Punkten $\mathfrak{s}^1\ \mathfrak{s}^2 \ldots \mathfrak{s}^\lambda$, welche das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ bilden, die Eigenschaft,

1. dass diese Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ lauter endliche Gerade, welche sich sämmtlich nur in endlichen Punkten schneiden, so dass also auch die $\lambda+1$ Curvenpunkte $\mathfrak{s}$ von $S^{(o\lambda)}$ lauter endliche Punkte sind,
2. dass s_ϱ beim Uebergang aus jeder der ersten λ Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ in die im Sinne Σ folgende eine Drehung in demselben Sinne Δ ausführe, als bei dem Uebergange aus der Lage s_o in die s_1,
3. dass der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$, um aus der Lage irgend eines der ersten λ Curvenpunkte von $S^{(o\lambda)}$ in den im Sinne Σ folgenden zu gelangen, auf der mit beiden perspectivischen Lage von s_ϱ sich jedesmal in demselben Richtungssinn P bewegen muss, der auf der Geraden s_ϱ in der Anfangslage derselben s_o durch die Bewegung des Punktes $\mathfrak{s}^\varrho$ aus der Lage $\mathfrak{s}^0$ in die $\mathfrak{s}^1$ eindeutig bezeichnet ist (No. $14a^1$).

Diese Annahmen sind nach No. 46 gestattet, da über den Werth von λ nichts bestimmt ist.

b) s_δ, s_ε, s_ζ, s_η, s_ϑ seien irgend fünf im Sinne Σ aufeinanderfolgende der erwähnten $\lambda+1$ Tangenten von $S^{(o\lambda)}$, von denen die ersten vier resp. die Curvenpunkte $\mathfrak{s}^\delta\,\mathfrak{s}^\varepsilon$, $\mathfrak{s}^\varepsilon\,\mathfrak{s}^\zeta$, $\mathfrak{s}^\zeta\,\mathfrak{s}^\eta$, $\mathfrak{s}^\eta\,\mathfrak{s}^\vartheta$ enthalten; s_α, s_β seien irgend zwei im Sinne Σ aufeinanderfolgende der $\zeta+1$ Tangenten von s_o bis s_ζ, welche resp. die Punkte $\mathfrak{s}^\alpha\,\mathfrak{s}^\beta$, $\mathfrak{s}^\beta\,\mathfrak{s}^\gamma$ enthalten, wobei also ζ jeden der Werthe 0, 1, 2, ... $\lambda - 2$, β jeden der Werthe 1, 2 ... $\zeta - 1$ haben kann.

c) Befindet sich s_ϱ in der Lage einer der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$, etwa s_ζ, so deckt der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho\,|\,\infty)}$, d. i. der Halbstrahl, welcher mit dem

Grenzpunkt $\mathfrak{s}^{\varrho}$ als Anfangspunkt den Richtungssinn P angiebt (No. $14a^2$), wenn $\mathfrak{s}^{\varrho}$ in der Lage $\mathfrak{s}^{\zeta}$, den Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta\eta\infty)} = \mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta|\infty)}$, und wenn $\mathfrak{s}^{\varrho}$ in die Lage $\mathfrak{s}^{\eta}$ rückt, den Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\zeta}^{\zeta(\eta\infty)} = \mathfrak{s}_{\zeta}^{(\eta|\infty)}$; geht nun s_{ϱ} in die im Sinne Σ auf s_{ζ} folgende Lage s_{η} über, im Büschel $\mathfrak{s}^{\eta}$ im Sinne $\varDelta$ sich fortbewegend, so geht nach Voraussetzung (No. $49a^2$) der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ aus der Lage $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\eta|\infty)}$ in die Lage $\mathfrak{s}_{\eta}^{(\eta|\infty)} = \mathfrak{s}_{\eta}^{(\eta\vartheta\infty)}$ über, in welcher er mit der folgenden, wenn $\mathfrak{s}^{\varrho}$ aus der Lage $\mathfrak{s}^{\eta}$ in die $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ rückt, ausser diesen beiden (Punkten) $\mathfrak{s}^{\eta}$ und $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ alle übrigen Punkte gemeinschaftlich hat; desgleichen haben die Halbebenen $\mathfrak{s}_{(\zeta|\zeta)}^{(\eta|\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\eta|\eta)}^{(\eta|\infty)}$ ausser den Punkten der begrenzenden Halbstrahlen, d. i. ausser den Punkten der Geraden s_{ζ} und s_{η} alle übrigen Punkte gemeinschaftlich (No. $17a$, $39a$). Ebenso haben auch die Halbstrahlen $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\eta-\infty)} = \mathfrak{s}_{\zeta}^{(\eta\zeta\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{\zeta}^{\eta(\zeta\infty)} = \mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta-\infty)}$ ausser den Grenzpunkten $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\eta}$ alle übrigen Punkte und die Halbebenen $\mathfrak{s}_{(\zeta|\zeta)}^{(\eta-\infty)} = \mathfrak{s}_{(\zeta-\zeta)}^{(\eta|\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\eta|\eta)}^{(\eta-\infty)}$ alle Punkte ausser denen der Geraden s_{ζ} und s_{η} gemeinschaftlich; folglich:

Der Schnittpunkt irgend einer Geraden g_{π} mit der Tangente s_{ζ} gehört demnach, wenn er ein endlicher von $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\eta}$ verschiedener Punkt ist, demjenigen der beiden Halbstrahlen $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$, $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$, welchem er in Bezug auf die eine der beiden Lagen $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\eta}$ von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ angehört, auch in Bezug auf die andere an.

Der Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ irgend eines Strahlbüschels gehört, wenn er ein endlicher ausserhalb der Geraden s_{ζ} und s_{η} gelegener Punkt der Ebene ist, derjenigen der beiden Halbebenen $\mathfrak{s}_{(\varrho|\varrho)}^{(\varrho|\infty)}$, welcher er in Bezug auf die eine der beiden Lagen s_{ζ} und s_{η} von s_{ϱ} angehört, auch in Bezug auf die andere an.

Wegen der Voraussetzungen in No. $49a$ gilt, was hier von den Punkten $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\eta}$ und den Tangenten s_{ζ} und s_{η} gesagt ist, von je zwei aufeinanderfolgenden Punkten und je zwei aufeinanderfolgenden Tangenten des Curvenstücks $S^{(o\lambda)}$.

B. Ein nur gewöhnliche endliche Elemente enthaltendes Curvenstück und eine gerade Punktreihe.

50. Aus No. $49c$ und $45e$ oder $36c^2$ und $45b$ erhalten wir folgende Sätze:

a) 1. Da die Punkte $\mathfrak{s}$ von $S^{(o\lambda)}$ continuirlich sich aneinander reihen,

und lauter endliche Punkte sind, so liegen sie in Bezug auf jede Gerade, welche keinen derselben enthält, auf derselben Halbebene.

2. Es folgen daher, während die Gerade s_ϱ von s_o an stetig im Sinne Σ das Curvenstück $S^{(o\,\lambda)}$ beschreibt bis s_λ, die mit den aufeinanderfolgenden Lagen derselben, d. i. mit den im Sinne Σ aufeinanderfolgenden Tangenten von $S^{(o\,\lambda)}$ auf irgend einer Geraden g_π der Ebene, welche keinen der Punkte $\mathfrak{z}$ von $S^{(o\,\lambda)}$ enthält, also auch auf g_∞, perspectivischen Punkte stetig in demselben Richtungssinne P_π aufeinander und bilden auf derselben di Strecke $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\lambda)}$;

3. und zwar gehören, wenn $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\lambda)}$ den unendlich entfernten Punkt von g_π nicht enthält, diese Punkte entweder sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ oder sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an. Wenn aber die Strecke $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\lambda)}$ den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{g}_\pi^\infty$ einmal enthält, also g_π zu einer der Tangenten von $S^{(o\,\lambda)}$ s_γ parallel ist, so gehören (No. 35e) die den Tangenten $s_o s_1 \ldots$ bis s_γ entsprechenden Punkte, das sind die Punkte des Halbstrahles $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\infty)}$, wenn einer derselben in dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ $(\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)})$ der perspectivischen Lage von s_ϱ liegt, sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ $(\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)})$, und die den Tangenten von s_γ bis s_λ entsprechenden Punkte das sind die Punkte des Halbstrahles $\mathfrak{g}_\pi^{(\infty|\lambda)}$ sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ $(\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)})$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an (vgl. No. 52f).

b) 1. Enthält die Gerade g_π einen der Punkte $\mathfrak{z}$ von $S^{(o\,\lambda)}$ $\mathfrak{z}^\beta$ und fällt sie mit keiner der Tangenten von $S^{(o\,\lambda)}$ zusammen, so liegen die beiden Halbstrahlen $\mathfrak{z}_\alpha^{(\beta|\infty)}$ und $\mathfrak{z}_\beta^{(\beta|\infty)}$ der beiden aufeinanderfolgenden Tangenten s_α und s_β, welche sich im Punkte $\mathfrak{z}^\beta$ schneiden, nach No. 37b (für $n=2$) auf derselben Halbebene in Bezug auf g_π, also nach No. 34b^1 die Halbstrahlen $\mathfrak{z}_\alpha^{(\beta-\infty)} = \mathfrak{z}_\alpha^{(\beta\,\alpha\,\infty)}$ und $\mathfrak{z}_\beta^{(\beta|\infty)} = \mathfrak{z}_\beta^{(\beta\,\gamma\,\infty)}$ und demnach auch die Punkte $\mathfrak{z}^\alpha$ und $\mathfrak{z}^\gamma$ auf entgegengesetzten Halbebenen in Bezug auf g_π. Es liegen folglich, wenn $\mathfrak{z}^\beta$ der einzige Punkt von

$S^{(o\lambda)}$ ist, welchen g_π enthält, die Punkte $\mathfrak{s}^o$, $\mathfrak{s}^1$ bis $\mathfrak{s}^\alpha$ auf einer, die Punkte $\mathfrak{s}^\gamma$ bis $\mathfrak{s}^\lambda$ auf der anderen Halbebene in Bezug auf g_π.

2. Der Punkt $\mathfrak{s}^\beta$ gehört dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_\alpha^{(\alpha\beta\infty)} = \mathfrak{s}_\alpha^{(\alpha|\infty)}$ von s_α und dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_\beta^{(\gamma\beta\infty)} = \mathfrak{s}_\beta^{(\gamma-\infty)}$ von s_β an. Mithin folgen die mit den Tangenten s_o, s_1 bis s_α auf g_π perspectivischen Punkte in demselben Richtungssinne P_π aufeinander, bilden die Strecke $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\alpha)}$ ($\mathfrak{g}_\pi^\alpha = \mathfrak{s}^\beta$) und gehören, wenn diese den unendlich entfernten Punkt nicht enthält, sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an. Im Punkt $\mathfrak{g}_\pi^\alpha = \mathfrak{g}_\pi^\beta = \mathfrak{s}^\beta$ fallen die mit den beiden Tangenten s_α und s_β perspectivischen Punkte zusammen (vgl. No. 30c, 31d, 45e)*). Die mit den Tangenten s_β bis s_λ auf g_π perspectivischen Punkte folgen ebenfalls stetig in unter sich gleichem, aber dem ersteren entgegengesetzten Richtungssinne $\overline{P}_\pi$ auf einander, bilden die Strecke $\mathfrak{g}_\pi^{(\beta|\lambda)}$ bezogen auf den Richtungssinn $\overline{P}_\pi$, $\mathfrak{g}_\pi^{(\beta-\lambda)}$ bezogen auf den Sinn P_π (vgl. No. 16c), und gehören, wenn diese den unendlich entfernten Punkt nicht enthält, sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an. Es geht also der dem Strahl s_ϱ auf einer Geraden g_π entsprechende Punkt, wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ diese überschreitet, stets von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ über auf den Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$, nie umgekehrt.

3. Enthält nun aber auch eine der Strecken oder jede derselben einmal den unendlich entfernten Punkt, so gehören die sämmtlichen Punkte des Theiles $\mathfrak{g}_\pi^{(\infty|\beta)}$ der ersten Strecke dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$, die des Theiles $\mathfrak{g}_\pi^{(\beta-\infty)}$ (die Bezeichnung bezogen auf den Richtungssinn P_π) der zweiten Strecke dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$, folglich (No. 35$e$, 50$a^3$) die sämmtlichen Punkte des Theiles $\mathfrak{g}_\pi^{(o|\infty)}$ der ersten Strecke dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$

*) Wie dies die Annahme in No. 16c begründet, so ist andererseits die Beobachtung von No. 16c bei der Erzeugung von Curven auf die in No. 46 angegebene Weise als Bedingung für die Stetigkeit derselben aufzustellen. Vgl. No. 51b^2 und No. 60.

und die des Theiles $\mathfrak{g}_\pi^{(\infty - \lambda)}$ der zweiten Strecke dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho | \infty)}$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an (vgl. No. 52*f*).

4. Geht aber die Gerade g_π nicht blos durch den Punkt $\mathfrak{s}^\beta$ von $S^{(o\,\lambda)}$, sondern noch durch einen anderen, $\mathfrak{s}^\zeta$, ohne aber mit einer der Tangenten s zusammenzufallen, so muss der der Tangente s_ϱ auf g_π entsprechende Punkt von $\mathfrak{s}^\beta$ aus den unendlich entfernten Punkt von g_π überschreiten, um so auf den Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho | \infty)}$ von s_ϱ zu gelangen, ehe er nach $\mathfrak{g}_\pi^\varepsilon = \mathfrak{g}_\pi^\zeta = \mathfrak{s}^\zeta$ kommt; die Strecke $\mathfrak{g}_\pi^{(\beta - \varepsilon)}$, welche die im Sinne $\overline{P}_\pi$ aufeinanderfolgenden den im Sinne Σ geordneten Tangenten s_β bis s_ε entsprechenden Punkte umfasst, muss daher den unendlich entfernten Punkt enthalten, d. i. e i n e d e r T a n g e n t e n v o n s_β b i s s_ε m u s s z u g_π p a r a l l e l s e i n. Die den Tangenten s_ζ bis s_λ entsprechenden Punkte folgen dann von $\mathfrak{g}_\pi^\varepsilon = \mathfrak{s}^\zeta$ aus wieder im Sinne P_π aufeinander und gehören dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho - \infty)}$ der perspectivischen Lagen von s_ϱ an.

c) 1. Fällt die Gerade g_π mit einer der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ s_ζ zusammen, so enthält sie zwei aufeinanderfolgende Curvenpunkte, welche sie, den einen mit der vorhergehenden Tangente s_ε, den anderen mit der folgenden Tangente s_η gemeinschaftlich hat. Zufolge No. 39*b*, *c* und 45*a* liegen auf der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\zeta | \infty)}_{(\zeta | \zeta)}$ der Halbstrahl $\mathfrak{s}_\varepsilon^{(\zeta - \infty)} = \mathfrak{s}_\varepsilon^{(\zeta \varepsilon \infty)}$ von s_ε, also unter anderen der Punkt $\mathfrak{s}^\varepsilon$, und der Halbstrahl $\mathfrak{s}_\eta^{(\eta | \infty)} = \mathfrak{s}_\eta^{(\eta \vartheta \infty)}$ von s_η, also unter anderen der Punkt $\mathfrak{s}^\vartheta$. Hat $g_\pi = s_\zeta$ ausser den beiden Punkten $\mathfrak{s}^\zeta$ und $\mathfrak{s}^\eta$ keine weiteren mit dem Curvenstück $S^{(o\,\lambda)}$ gemein, so m ü s s e n d a h e r d i e P u n k t e $\mathfrak{s}$ s ä m m t l i c h a u f d e r s e l b e n H a l b e b e n e i n B e z u g a u f s_ζ, n ä m l i c h a u f d e r H a l b e b e n e $\mathfrak{s}^{(\zeta | \infty)}_{(\zeta | \zeta)}$ l i e g e n (vgl. No. 50*c*[4]).

2. Also müssen wegen No. 44*e* und 45*b* die mit den übrigen im Sinne Σ geordneten Tangenten auf s_ζ perspectivischen Punkte stetig in demselben Richtungssinne P_ζ aufeinanderfolgen, und zwar müssen (No. 49*c*), da $\mathfrak{s}^\zeta$ auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_\varepsilon^{(\varepsilon | \infty)}$, $\mathfrak{s}^\eta$ aber auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_\eta^{(\vartheta - \infty)}$ der entsprechenden Tangente resp. s_ε oder s_η liegt, die den Tangenten von s_o bis s_ε entsprechenden Punkte sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho | \infty)}$, die den Tangenten von s_η bis s_λ entsprechenden aber sämmtlich dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho - \infty)}$

der perspectivischen Lagen von s_ϱ angehören. Da der Halbstrahl $\mathfrak{s}_\delta^{(\varepsilon|\infty}$ von s_δ der der Tangente s_ε im Sinne Σ vorhergehenden, und der Halbstrahl $\mathfrak{s}_\zeta^{(\zeta-\infty)}$ von s_ζ, der auf s_ε im Sinne Σ folgenden Tangente, nach No. 15e und 39b, c, 45a auf der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\varepsilon-\varepsilon)}^{(\varepsilon|\infty)}$ liegen, so kann der der Tangente s_δ auf s_ζ entsprechende, dem Punkt $\mathfrak{s}_\zeta^\varepsilon = \mathfrak{s}^\zeta$ im Sinne P_ζ vorhergehende Punkt $\mathfrak{s}_\zeta^\delta$ nur dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_\zeta^{(\zeta-\infty)} = \mathfrak{s}_\zeta^{\eta(\zeta\infty)}$ angehören; das heisst, die Punkte $\mathfrak{s}_\zeta^\delta$, $\mathfrak{s}^\zeta$, $\mathfrak{s}^\eta$ und somit die mit den sämmtlichen Tangenten s von $S^{(o\lambda)}$ ausser s_ζ auf s_ζ perspectivischen Punkte folgen stetig in demselben Richtungssinne P aufeinander, welcher durch die beiden in ihr befindlichen Curvenpunkte und den Bewegungssinn Σ schon bestimmt ist.

3. Ferner folgt hieraus:

Jeder Schnittpunkt zweier Tangenten gehört dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ der einen, der im Sinne Σ vorangehenden und dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ der anderen an, der zweiten im Sinne Σ.

Der der laufenden Tangente s_ϱ auf einer festen Tangente s_ζ entsprechende Punkt geht, sobald s_ϱ die Lage von s_ζ überschreitet, stets von dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ über auf den Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$.

4. Sollte nun das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ mit s_ζ ausser den Punkten $\mathfrak{s}_\varepsilon$ und $\mathfrak{s}^\eta$ noch einen Punkt gemeinschaftlich haben, in welchem $\mathfrak{s}^\varrho$ die Gerade s_ζ überschritte oder s_ϱ zum zweiten Male mit s_ζ zusammenfiele, so müsste nach No. 50$b^{2\,1}$ und 50c^3 der dem Strahl s_ϱ auf s_ζ entsprechende Punkt den unendlich entfernten Punkt überschreiten, was gegen Voraussetzung No. 49a^1 ist.

C. Ein nur gewöhnliche endliche Elemente enthaltendes Curvenstück und ein ebener Strahlbüschel.

51. Aus No. 49c und 45e oder 37b (für $n=2$) und 45d folgt weiter:

a) 1. Beschreibt $\mathfrak{s}^\varrho$ von $\mathfrak{s}^o$ an stetig im Sinne Σ das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ bis $\mathfrak{s}^\lambda$, so folgen die mit den aufeinanderfolgenden Lagen von $\mathfrak{s}^\varrho$, d. i. mit den im Sinne Σ sich stetig aneinander-

reihenden Punkten von $S^{(o\,\lambda)}$ in einem Strahlbüschel $\mathfrak{p}^{\varphi}$ der Ebene, durch dessen Mittelpunkt keine der Tangenten s von $S^{(o\,\lambda)}$ geht, perspectivischen Strahlen stetig in demselben Drehsinne Δ_{φ} aufeinander und bilden in demselben den Winkel $p^{\varphi}_{(o|\lambda)}$.

2. Der Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ liegt entweder in Bezug auf die sämmtlichen Lagen von s_{ϱ} auf der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ oder in Bezug auf die sämmtlichen Tangenten auf der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho|\varrho)} = \mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho-\varrho)}$; im ersten Falle ist nach No. 45f der Drehsinn Δ_{φ} gleich dem dem Bewegungssinn Σ entsprechenden Drehsinne Δ von s_{ϱ}, im zweiten Falle gleich dem dem Drehsinn Δ von s_{ϱ} entgegengesetzten Drehsinn.

b) 1. Liegt der Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ auf einer der Tangenten von $S^{(o\,\lambda)}$, etwa s_{β}, und fällt er mit keinem der Curvenpunkte von $S^{(o\,\lambda)}$ zusammen und befindet er sich auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\beta-\infty)}_{\beta}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\beta|\infty)}_{\beta}\right)$, also auch auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\gamma-\infty)}_{\beta}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\gamma|\infty)}_{\beta}\right)$, so gehört er der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}\right)$ in Bezug auf die der Lage s_{β} im Sinne Σ vorhergehende Lage s_{α} von s_{ϱ} und der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho-\varrho)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho-\varrho)}\right)$ in Bezug auf die im Sinne Σ auf s_{β} folgende Lage s_{γ} von s_{ϱ} an (No. 15c, 39b). Ist nun s_{β} die einzige Tangente von $S^{(o\,\lambda)}$, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ geht, so gehört $\mathfrak{p}^{\varphi}$ in Bezug auf alle Lagen von s_{ϱ} von s_{o} bis s_{α} derselben Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}\right)$, in Bezug auf alle Lagen von s_{γ} bis s_{λ} der Halbebene $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho-\varrho)}$ $\left(\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho-\varrho)}\right)$ an.

2. Es folgen demnach die mit den Punkten $\mathfrak{s}^{0}$, $\mathfrak{s}^{1}$ bis $\mathfrak{s}^{\beta}$ perspectivischen Strahlen des Büschels $\mathfrak{p}^{\varphi}$ in demselben Drehsinne Δ_{φ} stetig aufeinander und bilden einen Winkel $p^{\varphi}_{(o|\beta)}$, die mit den Punkten $\mathfrak{s}^{\beta}$ und $\mathfrak{s}^{\gamma}$ perspectivischen Strahlen p_{β}, p_{γ} fallen in dem Strahl s_{β} zusammen; die mit den Punkten $\mathfrak{s}^{\gamma}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda}$ perspectivischen Strahlen folgen ebenfalls in gleichem Drehsinne aufeinander, aber in dem dem ersteren

entgegengesetzten $\bar{\Delta}_{\varphi}$ und bilden den Winkel $p^{\varphi}_{(\beta|\lambda)}$, bezogen auf den Drehsinn $\bar{\Delta}_{\varphi}$, d. i. $p^{\varphi}_{(\beta-\lambda)}$ bezogen auf den Drehsinn Δ_{φ} (vergl. No. 16c, sowie die Anmerkung zu No. 50b^2); dies gilt zufolge No. 45d, $\mathfrak{p}^{\varphi}$ mag ein endlicher oder der unendlich entfernte Punkt von s_{β} sein. Liegt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\beta}^{(\beta-\infty)}$, so ist der Drehsinn Δ_{φ} nach No. 45f dem Drehsinn Δ von s_{ϱ} stets entgegengesetzt, also gleich $\bar{\Delta}$; liegt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ aber auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\beta}^{(\beta|\infty)}$, so ist der Drehsinn Δ_{φ} dem Drehsinn Δ von s_{ϱ} stets gleich, also $\bar{\Delta}_{\varphi} = \bar{\Delta}$. Ist $\mathfrak{p}_{\varphi}$ ein unendlich entfernter Punkt, so lässt sich der Bewegungssinn Δ_{φ} nicht mit Δ vergleichen.

3. Ist daher s_{β} nicht die einzige Tangente von $S^{(o\lambda)}$, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ geht, sondern geht von den Tangenten s_{γ} bis s_{λ} noch eine s_{ζ} durch $\mathfrak{p}^{\varphi}$ und liegt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ auf dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\beta}^{(\beta-\infty)}$ $\left(\mathfrak{s}_{\beta}^{(\beta|\infty)}\right)$, so folgen die mit den Punkten $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{s}^{o}$ bis $\mathfrak{s}^{\beta}$ perspectivischen Strahlen von $\mathfrak{p}^{\varphi}$ im Sinne $\bar{\Delta}$ (Δ) aufeinander, die den Punkten von $\mathfrak{s}^{\gamma}$ bis $\mathfrak{s}^{\zeta}$ entsprechenden im Sinne Δ $(\bar{\Delta})$ und die den Punkten $\mathfrak{s}^{\eta}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda}$ entsprechenden im Sinne $\bar{\Delta}$ (Δ). Der Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ muss also, wie hieraus folgt, auf der Tangente s_{ζ} dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta|\infty)}$ $\left(\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta-\infty)}\right)$ angehören (vgl. No. 50c^3).

c) Fällt der Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ mit einem der Curvenpunkte, $\mathfrak{s}^{\eta}$, zusammen, so gehen durch ihn die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten s_{ζ} und s_{η}, welche ausser ihm noch die ihm benachbarten Punkte resp. $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ enthalten. Der Punkt $\mathfrak{s}^{\eta}$ gehört dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\zeta|\infty)}$ an, liegt also in Bezug auf die im Sinne Σ vorhergehende Tangente s_{ε} auf der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\varepsilon|\varepsilon)}^{(\varepsilon|\infty)}$; er gehört ferner dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\eta}^{(\vartheta\eta\infty)} = \mathfrak{s}_{\eta}^{(\vartheta-\infty)}$ an, liegt also nach No. 39b in Bezug auf die im Sinne Σ folgende Tangente auf der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\vartheta|\vartheta)}^{(\vartheta|\infty)}$. Ist also $\mathfrak{s}^{\eta}$ der einzige Curvenpunkt von $S^{(o\lambda)}$, welcher mit $\mathfrak{p}^{\varphi}$ zusammenfällt und sind die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten s_{ζ} und s_{η} die einzigen von $S^{(o\lambda)}$, welche mit $\mathfrak{p}^{\varphi}$ perspectivisch sind, so liegt $\mathfrak{p}^{\varphi} = \mathfrak{s}^{\eta}$ in Bezug auf alle Tangenten ausser s_{ζ} und s_{η} auf der Halbebene $\mathfrak{s}_{(\varrho|\varrho)}^{(\varrho|\infty)}$. Die den Punkten $\mathfrak{s}^{o}$ bis $\mathfrak{s}^{\zeta}$ im Büschel $\mathfrak{p}^{\varphi}$ entsprechenden Strahlen

folgen daher nach No. 45*f* im Sinne Δ stetig aufeinander und ebenso folgen die den Punkten $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda}$ entsprechenden in demselben Sinne Δ stetig aufeinander. Nun sind aber die den Punkten $\mathfrak{s}^{\zeta}$ und $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ entsprechenden Strahlen die im Sinne Σ der Curve also im Drehsinne Δ des Büschels $\mathfrak{p}^{\varphi} = \mathfrak{s}^{\eta}$ aufeinanderfolgenden Tangenten s_{ζ} und s_{η}, der Punkt $\mathfrak{s}^{\zeta}$ dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\zeta}^{(\eta-\infty)}$, $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ dem Halbstrahl $\mathfrak{s}_{\eta}^{(\eta|\infty)}$ angehörend; es folgen daher die den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{s}$ von $S^{(o\,\lambda)}$ im Sinne Σ entsprechenden Strahlen des Büschels $\mathfrak{p}^{\varphi} = \mathfrak{s}^{\eta}$ stetig im Sinne Δ aufeinander, und ein das Büschel $\mathfrak{s}^{\eta}$ von der mit $\mathfrak{s}^{o}$ perspectivischen Lage an im Sinne Δ durchlaufender Strahl s^{η} trifft die Punkte $\mathfrak{s}^{o}$ bis $\mathfrak{s}^{\zeta}$ mit demselben, die Punkte $\mathfrak{s}^{\vartheta}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda}$ mit dem anderen Halbstrahl.

Geht durch den Punkt $\mathfrak{s}^{\eta}$ ausser s_{ζ} und s_{η} von den Tangenten s_{o} bis s_{ζ} noch die Tangente s_{α}, aber keine der Tangenten von s_{α} bis s_{ζ} und geht durch denselben von den Tangenten s_{η} bis s_{λ} noch die Tangente s_{ι}, aber keine der Tangenten s_{η} bis s_{ι}, so gilt das von den sämmtlichen Tangenten und Punkten von $S^{(o\,\lambda)}$ in No. 51*c* Gesagte nur von den Tangenten und Punkten resp. s_{α} bis s_{ι} und $\mathfrak{s}^{\alpha}$ bis $\mathfrak{s}^{\iota}$. Das die Tangenten von s_{o} bis s_{α} und von s_{ι} bis s_{λ}, sowie die Punkte $\mathfrak{s}^{o}$ bis $\mathfrak{s}^{\alpha}$ und von $\mathfrak{s}^{\iota}$ bis $\mathfrak{s}^{\lambda}$ Betreffende folgt theils aus No. 51*b*, theils durch wiederholte Anwendung von No. 51*c*, je nachdem $\mathfrak{p}^{\varphi} = \mathfrak{s}^{\eta}$ ein von $\mathfrak{s}^{\alpha}$, $\mathfrak{s}^{\beta}$ und von $\mathfrak{s}^{\iota}$, $\mathfrak{s}^{\varkappa}$ verschiedener Punkt der Tangenten s_{α} und s_{ι} ist oder mit einem derselben zusammenfällt.

D. Beschaffenheit eines nur gewöhnliche endliche Elemente enthaltenden Curvenstückes.

52. *a*) Aus No. 50*c*[3 4] folgt:

Ein Curvenstück $S^{(o\lambda)}$, welches den in No. 49*a* angegebenen Bedingungen genügt, hat die Eigenschaft,

1. dass alle seine Punkte in Bezug auf jede seiner Tangenten auf derselben Halbebene, nämlich $\mathfrak{s}_{(\varrho|\varrho)}^{(\varrho|\infty)}$ (bezogen auf den Drehsinn Δ) liegen;
2. dass sich in einem Punkte nicht mehr als zwei Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ schneiden;

3. dass die mit irgend einer Tangente von $S^{(o\lambda)}$, s_ζ perspectivischen Punkte der übrigen eine endliche Strecke $\mathfrak{s}_\zeta^{(o|\lambda)}$ bilden, welche zugleich die beiden dieser Tangente s_ζ angehörigen Curvenpunkte $\mathfrak{s}^\zeta$ und $\mathfrak{s}^\eta$ enthält.

b) 1. Die Gerade s_o liegt mit den Anfangspunkten dieser sämmtlichen Strecken $\mathfrak{s}_\varrho^{(o|\lambda)}$, die Gerade s_λ mit den Endpunkten derselben perspectivisch. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von s_o und s_λ mit $\mathfrak{s}^\chi$, so kann mit jeder dieser Strecken, da sie endlich sind, nur ein Theil der Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\chi$ perspectivisch liegen; und da jede derselben zwei Punkte von $S^{(o\lambda)}$ enthält, so müssen dieselben, wie die Punkte $\mathfrak{s}$ von $S^{(o\lambda)}$, sämmtlich in demjenigen der von s_o und s_λ begrenzten einfachen Winkel liegen, welcher den beiden Halbebenen $\mathfrak{s}_{(o|o)}^{(o|\infty)}$ und $\mathfrak{s}_{(\lambda|\lambda)}^{(\lambda|\infty)}$ gemeinschaftlich ist (No. 39*a*) und welchen wir mit $\mathfrak{s}_{(o\zeta\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ bezeichnen wollen.

2. Da durch $\mathfrak{s}^\chi$ keine der Tangenten von s_1 bis $s_{\lambda-1}$ geht (No. 52a^2), so hat der Punkt $\mathfrak{s}^\chi$ in Bezug auf diese die Lage von $\mathfrak{p}^\varphi$ in No. 51*a*. Jeder von s_o und s_λ verschiedene Strahl s^χ des Winkels $s^\chi_{(o\zeta\lambda)}$, welchem der einfache Winkel $\mathfrak{s}_{(o\zeta\lambda)}^{(\varrho|\infty)}$ angehört, muss daher einen und nur einen der Punkte von $S^{(o\lambda)}$ und von jeder von s_o und s_λ verschiedenen Tangente von $S^{(o\lambda)}$ einen Punkt der endlichen Strecke $\mathfrak{s}_\varrho^{(o|\lambda)}$ enthalten. Daraus folgt

einerseits, dass der den Punkten von $S^{(o\lambda)}$ im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ entsprechende Winkel $S^\zeta_{(o\zeta\lambda)}$ (No. 51*c*) nur einen Theil des Büschels $\mathfrak{s}^\zeta$ ausmachen kann, da der mit dem Büschel $\mathfrak{s}^\chi$ gemeinschaftliche Strahl $s^\zeta_\chi = s^\chi_\zeta$ ausser $\mathfrak{s}^\zeta$ keinen Punkt von $S^{(o\lambda)}$ enthält, dass also auf einer Geraden nicht mehr als zwei Curvenpunkte von $S^{(o\lambda)}$ liegen können,

andererseits, dass die mit den Tangenten von s_o bis s_ζ perspectivischen Punkte von $s^\chi_\zeta = s^\zeta_\chi$ die endliche Strecke $\mathfrak{s}_\zeta^{(\chi\zeta)\infty}$ in der Reihenfolge von $\mathfrak{s}^\chi$ bis $\mathfrak{s}^\zeta$ erfüllen (No. 50b^2) und die mit den Tangenten von s_η bis s_λ perspectivischen Punkte dieselbe Strecke in der Reihenfolge von $\mathfrak{s}^\zeta$ bis $\mathfrak{s}^\chi$; folglich:

3. Die Schnittpunkte der Tangenten mit einander erfüllen das von den Strecken $\mathfrak{s}_o^{(o\chi)\infty}$ von s_o, $\mathfrak{s}_\lambda^{(\chi\lambda)\infty}$ von s_λ und dem Cur-

venstück $S^{(\lambda o)}$ begrenzte, dem einfachen Winkel $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(o\,\xi\,\lambda)}$ angehörige Gebiet der Ebene vollständig, und ausserhalb desselben giebt es keinen. Von jedem Punkt dieses Gebietes gilt das in No. 51 b^3 Gesagte. Wir bezeichnen dies Gebiet durch das Symbol $\mathfrak{S}^2_{(o\lambda)}$ (vgl. No. 52 *e*).

c) 1. Die Strecken $\mathfrak{s}^{(\xi\,\infty\,\chi)}$ der Strahlen s^χ des Winkels $s^\chi_{(o\,\xi\,\lambda)}$ enthalten keinen einzigen Schnittpunkt einer Tangente, daher enthält das von den Strecken $\mathfrak{s}^{(o\,\infty\,\chi)}_o$, $\mathfrak{s}^{(\chi\,\infty\,\lambda)}_\lambda$ und dem Curvenstück $S^{(\lambda o)}$ begrenzte dem Winkel $s^\chi_{(o\,\xi\,\lambda)}$ angehörige Gebiet der Ebene nur Punkte, welche mit keiner der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ perspectivisch liegen, also die Lage von $\mathfrak{p}^\varphi$ in No. 51 *a* haben, und wir bezeichnen dasselbe mit $\mathfrak{S}^0_{(o\lambda)}$.

2. Durch die unendlich entfernte Gerade wird das Gebiet $\mathfrak{S}^0_{(o\lambda)}$ in zwei Theile getheilt, deren einer dem den beiden Halbebenen $\mathfrak{s}^{(o|\infty)}_{(o|o)}$ und $\mathfrak{s}^{(\lambda|\infty)}_{(\lambda|\lambda)}$ gemeinschaftlichen einfachen Winkel $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(o\,\xi\,\lambda)}$, deren anderer dem den beiden Halbebenen $\mathfrak{s}^{(o-\infty)}_{(o|o)}$ und $\mathfrak{s}^{(\lambda-\infty)}_{(\lambda|\lambda)}$ gemeinschaftlichen einfachen Winkel $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(o\,\xi\,\lambda)}$ angehört; es folgt mit Rücksicht auf No. 51 a^2, dass der erstere Theil alle Punkte der Ebene enthält, welche den Halbebenen $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ in Bezug auf die sämmtlichen Tangenten *s* von $S^{(o\lambda)}$ gemeinsam sind und nur solche, der andere alle Punkte der Ebene, welche den Halbebenen $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ in Bezug auf die sämmtlichen Tangenten *s* von $S^{(o\lambda)}$ gemeinsam sind und nur solche, was auch aus No. 39 *a* und 45 *a* abgeleitet werden kann; wir bezeichnen den ersteren Theil mit $\mathfrak{S}^0_{(o|\lambda)}$, den zweiten mit $\mathfrak{S}^0_{(o-\lambda)}$.

3. Jeder Punkt von $\mathfrak{S}^0_{(o|\lambda)}$ befindet sich mit jedem Curvenpunkt von $S^{(o\lambda)}$ in Bezug auf jede der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$, mit Ausnahme der beiden, welche sich in letzterem schneiden, auf derselben Halbebene; jeder Punkt von $\mathfrak{S}^0_{(o-\lambda)}$ befindet sich mit jedem Curvenpunkt von $S^{(o\lambda)}$ in Bezug auf jede Tangente von $S^{(o\lambda)}$ mit Ausnahme der beiden, welche sich in letzterem schneiden, auf entgegengesetzten Halbebenen (No. 36 *c*). Jedem Punkt von $\mathfrak{S}^0_{(o|\lambda)}$ kehrt daher das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ in seiner

ganzen Ausdehnung seine concave, jedem Punkt von $\mathfrak{S}^{o}_{(o-\lambda)}$ seine convexe Seite zu. Also:

4. Bewegt sich, während die Elemente $\mathfrak{z}^{\varrho}$ und s_{ϱ} in einem gewissen Sinne Σ das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ beschreiben, welches den in No. 49a angegebenen Bedingungen genügt, der mit $\mathfrak{z}^{\varrho}$ perspectivische Strahl p^{φ} eines Strahlbüschels $\mathfrak{p}^{\varphi}$, dessen Mittelpunkt ein endlicher Punkt der Ebene ist, durch welchen keine der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ geht, von p^{φ}_{o} an bis p^{φ}_{λ} in dem Drehsinne Δ, welchen s_{ϱ} beim Uebergange aus jeder Lage in die im Sinne Σ folgende hat, so kehrt das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ dem Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ seine concave Seite zu, und umgekehrt; bewegt sich aber der mit $\mathfrak{z}^{\varrho}$ perspectivische Strahl des Büschels $\mathfrak{p}^{\varphi}$ von p^{φ}_{o} bis p^{φ}_{λ} in dem dem Sinne Δ von s_{ϱ} entgegengesetzten Sinne $\overline{\Delta}$, so kehrt das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ dem Punkte $\mathfrak{p}^{\varphi}$ seine convexe Seite zu, und umgekehrt. Im ersteren Falle gehört der Punkt $\mathfrak{p}^{\varphi}$ dem Gebiet $\mathfrak{S}^{o}_{(o|\lambda)}$, im zweiten dem Gebiet $\mathfrak{S}^{o}_{(o-\lambda)}$ an.

d) 1. Der andere Winkel $s^{\chi}_{\xi(o\lambda)}$ enthält (No. 18 und 52b^{1}) die Ergänzungsstrecken $\mathfrak{z}^{(\lambda\infty o)}_{\varrho}$ sämmtlicher Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ zu den Strecken $\mathfrak{z}^{(o|\lambda)}_{\varrho}$. Jeder Strahl s^{χ} dieses Winkels hat (No. 10) die Lage der Geraden g_{π} in No. 50a; die mit den Tangenten s von $S^{(o\lambda)}$ auf einem solchen Strahl perspectivische Strecke enthält folglich, da die Grenzpunkte in den Punkt $\mathfrak{z}^{\chi}$ zusammenfallen und nach No. 52b^{3} jeder ihrer übrigen Punkte höchstens von einer der Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ getroffen werden kann, alle Punkte desselben ausser $\mathfrak{z}^{\chi}$ einmal, diesen aber zweimal; also wird der Winkel $s^{\chi}_{\xi(o\lambda)}$ von den Strecken $\mathfrak{z}^{(\lambda\infty o)}_{\varrho}$ der Tangenten s von $S^{(o\lambda)}$ derart stetig erfüllt, dass durch jeden in seinem Gebiet gelegenen Punkt eine und nur eine der Tangenten s von $S^{(o\lambda)}$ geht. Wir bezeichnen ihn deshalb mit $\mathfrak{S}^{1}_{(o\lambda)}$; jeder in seinem Gebiet befindliche Punkt hat die Lage von $\mathfrak{p}^{\varphi}$ in No. 51$b^{1,2}$.

2. Dieser Winkel $s^{\chi}_{\xi(o\lambda)} = \mathfrak{S}^{1}_{(o\lambda)}$ enthält in dem mit der Halbebene $\mathfrak{z}^{(o-\infty)}_{(o|o)} = \mathfrak{z}^{(\chi o\infty)}_{(o|o)}$ (der Punkt $\mathfrak{z}^{\chi}$ gehört nach No. 50c^{3} dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(o|\infty)}_{o}$ von s_{o} und dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\lambda-\infty)}_{\lambda}$ von s_{λ} an) gemeinschaftlichen einfachen

Winkel (No. 38*a* und 45*a*) von jeder Tangente denjenigen Theil der Strecke $\mathfrak{s}_{\varrho}^{(o\infty\lambda)}$, welcher dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ angehört, in dem der Halbebene $\mathfrak{s}_{(o|o)}^{(o|\infty)} = \mathfrak{s}_{(o|o)}^{o(\chi\infty)}$ gemeinschaftlichen einfachen Winkel (No. 37*a*) den anderen Theil, welcher dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ angehört; den ersteren bezeichnen wir hiernach mit $\mathfrak{S}^1_{(o-\lambda)}$, den anderen mit $\mathfrak{S}^1_{(o|\lambda)}$.

3. Aus No. 51b^2 und 52c^4 folgt:

Jedem Punkt von $\mathfrak{S}^1_{(o-\lambda)}$ kehrt, wenn wir allgemein mit s_ζ die Tangente bezeichnen, mit welcher er perspectivisch liegt, nämlich dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\zeta-\infty)}$ angehörend, das Curvenstück $S^{(o\varepsilon)}$, welches die der Tangente s_ζ im Sinne Σ vorhergehenden Lagen von s_ϱ enthält, seine convexe, das Curvenstück $S^{(\eta\lambda)}$, welches die auf s_ζ im Sinne Σ folgenden Lagen von s_ϱ enthält, seine concave Seite zu; jedem Punkt des Gebietes $\mathfrak{S}^1_{(o|\lambda)}$ aber, der auf der Tangente s_ζ liegt und also dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\zeta|\infty)}$ angehört, kehrt das Curvenstück $S^{(o\varepsilon)}$ die concave und $S^{(\eta\lambda)}$ die convexe Seite zu.

e) In gleicher Weise folgt aus No. 51b^3, 52b^3, c^4:

Jedem Punkt des Gebietes $\mathfrak{S}^2_{(o\lambda)}$ kehrt, wenn wir mit s_β und s_ζ allgemein die beiden Tangenten von $S^{(o\lambda)}$ bezeichnen, welche sich in demselben schneiden, das Curvenstück $S^{(o\alpha)}$ seine concave, $S^{(\gamma\varepsilon)}$ die convexe und $S^{(\eta\lambda)}$ wieder die concave Seite zu.

f) Beschreiben s_ϱ und $\mathfrak{s}^\varrho$ im Sinne Σ das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$, so ist, so lange der mit irgend einer endlichen Geraden g_π der Ebene perspectivische Punkt $\mathfrak{s}^\pi$ von s_ϱ dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ angehört, der Bewegungssinn P von $\mathfrak{s}^\varrho$ gleich $\mathfrak{s}^{\pi\varrho\infty}$, das heisst, der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ entfernt sich (No. 8*c*) von dem ihm auf g_π entsprechenden Punkte, also auch von g_π; so lange der mit g_π perspectivische Punkt von s_ϱ dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ angehört, ist der Bewegungssinn P gleich $\mathfrak{s}^{\varrho\pi\infty}$, das heisst, der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ nähert sich dem ihm auf g_π entsprechenden Punkte, also auch der Geraden g_π (vgl. No. 50).

53. Dies ist das Bild, welches ein den Bedingungen in No. 49a unterworfenes Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ einer Curve S der Anschauung bietet, sowie die Art und Weise, in welcher sich die mit den Elementen eines solchen Curvenstückes in irgend einem Strahlbüschel oder einer geraden Punktreihe der Ebene perspectivischen Strahlen, resp. Punkte an einander reihen; diese Art und Weise wird, da über den Werth von λ nichts bestimmt ist und wie aus No. 50 und 51 hervorgeht, nicht geändert, wenn wir uns das Curvenstück $S^{(o\lambda)}$ fortgesetzt denken durch andere $S^{(\lambda\xi)}$, $S^{(\xi\tau)}$ etc., welche denselben Bedingungen genügen und bei deren Beschreibung im Sinne $\Sigma\, s_\varrho$ und $\mathfrak{s}^\varrho$ denselben Dreh- resp. Richtungssinn Δ und P haben, als bei Beschreibung von $S^{(o\lambda)}$. Der mit der laufenden Tangente s_ϱ auf s_o perspectivische Punkt durchläuft zunächst (No. 50c^5) den Halbstrahl $\mathfrak{s}_o^{(\varrho|\infty)}$, dem Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ von s_ϱ angehörend; wenn derselbe in die Lage $\mathfrak{s}_o^\infty$, entsprechend der Lage s_μ von s_ϱ gelangt, so gilt auch von der unendlich entfernten Geraden, was von jedem Strahl s^χ des Winkels $s^\chi_{\xi(o\lambda)}$ in No. 52d^1 gesagt ist; der eine Theil des Gebietes $\mathfrak{S}^o_{(o\mu)}$ (No. 52c^3) wird Null, nämlich der nicht von den Curvenpunkten von $S^{(o\mu)}$ begrenzte. Bis hierher entfernt sich $\mathfrak{s}^\varrho$ von s_o; im weiteren Verlauf der Curve geht der der Tangente s_ϱ auf s_o entsprechende Punkt auf den Halbstrahl $\mathfrak{s}_o^{(o-\infty)}$ von s_o und $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ von s^ϱ über, nähert sich also der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ der Tangente s_o. Erst in den auf $\mathfrak{s}^\mu$ resp. s_μ folgenden Lagen kann nach No. 50b^2, c^2 $\mathfrak{s}^\varrho$ die Gerade s_o überschreiten oder s_ϱ mit s_o zusammenfallen. Das Gebiet $\mathfrak{S}^2_{(o\tau)}$ ist, wenn bis zu den Lagen $\mathfrak{s}^\tau$ resp. s_τ keine dieser beiden Möglichkeiten eingetreten, durch die Strecken $\mathfrak{s}_o^{(o\infty\tau)}$, $\mathfrak{s}_\tau^{(o\infty\tau)}$ ($\mathfrak{s}_\tau^o = \mathfrak{s}_o^\tau$ ist der Schnittpunkt von s_o und s_τ) und das Curvenstück $S^{(\tau o)}$, das Gebiet $\mathfrak{S}^o_{(o\tau)} = \mathfrak{S}^o_{(o|\tau)}$ durch die endlichen Strecken $\mathfrak{s}_o^{(o\tau)\infty}$, $\mathfrak{s}_\tau^{(o\tau)\infty}$ und $S^{(\tau o)}$ begrenzt, und also, wenn $\mathfrak{s}^\tau$ mit $\mathfrak{s}^o$ zusammenfällt, rings von dem Curvenstück $S^{(o\tau)}$ eingeschlossen.

§. 12. Ausgezeichnete Curvenelemente.

A. Allgemeine Bestimmungen.

54. a) Um nun alle möglichen Weisen, in denen ein nach No. 46 eine Curve beschreibender Punkt oder Tangente in die folgende Lage übergehen kann, ihren Einfluss auf die Beschaffenheit der Curve und die Bewegung

der mit denselben in den Strahlbüscheln und geraden Punktreihen der Ebene perspectivischen Strahlen resp. Punkte zu erkennen, stellen wir uns ein Curvenstück $S^{(o\zeta)}$ vor, welches die Curvenpunkte $\mathfrak{s}^0, \mathfrak{s}^1 \dots \mathfrak{s}^\delta, \mathfrak{s}^\varepsilon, \mathfrak{s}^\zeta$ und die Tangenten $s_0, s_1 \dots s_\delta, s_\varepsilon$ (No. 46), wo $s_\delta = \mathfrak{s}^\delta \mathfrak{s}^\varepsilon, s_\varepsilon = \mathfrak{s}^\varepsilon \mathfrak{s}^\zeta$, umfasst und welches der Bedingung (1) in No. 49a in allen Elementen von s_0 bis s_δ, den Bedingungen (2) und (3) aber in allen Elementen von s_0 bis s_ε resp. $\mathfrak{s}^0$ bis $\mathfrak{s}^\zeta$ genügt; dies Curvenstück $S^{(o\zeta)}$ denken wir uns fortgesetzt (nach No. 46) durch ein zweites $S^{(\zeta\nu)}$, welches, die Punkte $\mathfrak{s}^\zeta, \mathfrak{s}^\eta, \mathfrak{s}^\vartheta \dots \mathfrak{s}^\nu$ und die Tangenten $s_\varepsilon, s_\zeta = \mathfrak{s}^\zeta \mathfrak{s}^\eta, s_\eta = \mathfrak{s}^\eta \mathfrak{s}^\vartheta, s_\vartheta \dots s_\nu$ umfassend, für sich den Bedingungen (2) und (3) in No. 49a in allen Elementen von s_ε bis s_ν resp. $\mathfrak{s}^\zeta$ bis $\mathfrak{s}^\nu$, der Bedingung (1) in den Elementen von s_ϑ bis s_ν genügt; so jedoch denken wir uns $S^{(o\zeta)}$ durch $S^{(\zeta\nu)}$ fortgesetzt, dass die das ganze Curvenstück $S^{(o\nu)}$ in dem durch die Wahl der Elemente s_0 und $\mathfrak{s}^0$ zu Anfangselementen eindeutig bestimmten (No. 47c, 14a^2) Bewegungssinne Σ durchlaufenden Elemente s_ϱ und $\mathfrak{s}^\varrho$ beim Uebergang von den Elementen resp. s_ε und $\mathfrak{s}^\zeta$, welche eine ganz beliebige endliche oder unendlich entfernte Lage in der Ebene haben können, in die Lagen s_ζ und $\mathfrak{s}^\eta$ beliebig den Bewegungssinn beibehalten oder ändern können, den sie beim Uebergang von jedem Element von $S^{(o\zeta)}$ in die Lage des im Sinne Σ folgenden haben. Dem Bewegungssinne Σ entspreche in dem Theil $S^{(o\zeta)}$ der Drehsinn Δ von s_ϱ und der Richtungssinn P von $\mathfrak{s}^\varrho$ auf s_ϱ.

b) Wir bezeichnen

die Summe aller der Strahlbüschel der Ebene, deren Mittelpunkte ausserhalb der Tangente s_ζ liegen, durch das Symbol $(\mathfrak{z})$, jeden derselben durch $\mathfrak{z}$;

die Summe aller der Geraden der Ebene, welche nicht durch den Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ gehen, durch das Symbol (z), jede derselben durch z;

die Summe aller der Strahlbüschel, deren Mittelpunkte die von den Curvenpunkten auf s_ζ $(\mathfrak{s}_\zeta^\sigma)$ verschiedenen Punkte von s_ζ sind, mit $[\mathfrak{z}^\sigma]$, jeden derselben durch $\mathfrak{z}^\sigma$.

die Summe der geraden Punktreihen der Ebene, deren Träger die von den Tangenten, welche sich in $\mathfrak{s}^\zeta$ schneiden (s_σ^ζ), verschiedenen Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^\zeta$ sind, mit $[z_\sigma]$, jede derselben durch z_σ.

Der in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ mit $\mathfrak{z}^\zeta$ perspectivische Strahl ist stets s_ζ, der in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ mit $\mathfrak{z}^\zeta$ perspectivische Strahl kann nie s_ζ, wohl aber eine andere der Geraden (s_σ^ζ) sein, und ist, wenn dies nicht der Fall, stets eine der Geraden $[z_\sigma]$. Jede der Geraden $[z_\sigma]$ muss daher mit einem Strahl z_ζ identisch sein.

Der auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ mit s_ε perspectivische Punkt ist stets $\mathfrak{z}^\zeta$, der auf einer der Geraden (z) mit s_ε perspectivische Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ kann mit einem der Punkte $[\mathfrak{z}^\sigma]$ nur zusammenfallen, wenn s_ζ mit s_ε zusammenfällt, also alle Punkte $\mathfrak{z}^\varepsilon$ mit allen Punkten $[\mathfrak{z}^\sigma]$ identisch sind.

c) Jede der Geraden $[z_\sigma]$ kann mit der Punktreihe $S^{(o\nu)}$ ausser $\mathfrak{z}^\zeta$ höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich haben, einen mit $S^{(o\zeta)}$, den wir mit $\mathfrak{z}^\gamma$, und einen mit $S^{(\zeta\nu)}$, den wir mit $\mathfrak{z}^\lambda$ bezeichnen (No. 52 b^2).

Jeder der Strahlbüschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ kann mit der Tangentenfolge $S^{(o\nu)}$ ausser s_ζ höchstens zwei Strahlen gemeinschaftlich haben, einen mit $S^{(o\zeta)}$, den wir mit s_α, und einen mit $S^{(\zeta\nu)}$, den wir mit s_ι bezeichnen (No. 52 a^2).

Jede der Geraden (z) kann mit $S^{(o\nu)}$ höchstens vier Punkte gemeinschaftlich haben; wir bezeichnen von den beiden dem Theil $S^{(o\zeta)}$ angehörigen immer denjenigen, welcher $\mathfrak{z}^\zeta$ am nächsten ist, mit $\mathfrak{z}^\gamma$, von den beiden dem Theil $S^{(\zeta\nu)}$ angehörigen denjenigen, welcher $\mathfrak{z}^\zeta$ am nächsten ist, mit $\mathfrak{z}^\lambda$.

Jeder der Strahlbüschel $(\mathfrak{z})$ kann mit $S^{(o\nu)}$ höchstens vier Tangenten gemeinschaftlich haben; wir bezeichnen von den beiden dem Theil $S^{(o\zeta)}$ angehörigen immer diejenige, welche s_ε am nächsten ist, mit s_α, von den beiden dem Theil $S^{(\zeta\nu)}$ angehörigen diejenige, welche s_ε am nächsten ist, mit s_ι.

d) 1. Während die Elemente s_ϱ und $\mathfrak{z}^\varrho$ das Curvenstück $S^{(o\nu)}$ von resp. s_o, $\mathfrak{z}^o$ an, also im Sinne Σ stetig beschreiben, bilden die auf allen Geraden der Ebene $\{(z), [z_\sigma], (s_\sigma^\zeta)\,(s_\zeta)\}$ und in allen Strahlbüscheln der Ebene $\{(\mathfrak{z}), [\mathfrak{z}^\sigma], (\mathfrak{z}_\zeta^\sigma)\,(\mathfrak{z}^\zeta)\}$ perspectivischen Punkte und Strahlen eine stetige Punktenfolge $\left(\mathfrak{z}^{(o\nu)}, \mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}, \mathfrak{z}_\sigma^{\zeta(o\nu)}\,(\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu)})\right)$ resp. Strahlenfolge $\left(z_{(o\nu)}, z_{(o\nu)}^\sigma, s_{\zeta(o\nu)}^\sigma\,(s_{(o\nu)}^\zeta)\right)$ (No. 48 *b*, 50, 51).

2. Nach den Bestimmungen in *c*

folgen in den Strahlbüscheln $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ die den Punkten $S^{(o\,\zeta)}$ von $\mathfrak{z}^{\alpha}$ bis $\mathfrak{z}^{\zeta}$ entsprechenden Strahlen stetig in einem und demselben Drehsinne auf einander, und ein die Strahlenfolge $z_{(\alpha\,\zeta)}$ resp. $z^{\sigma}_{(\alpha\,\zeta)}$ durchlaufender Strahl trifft die Punkte von $S^{(\alpha\,\zeta)}$ mit demselben Halbstrahl. Analoges gilt von den Punkten von $S^{(\zeta\iota)}$ und den entsprechenden Strahlen. Im Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ folgen die den sämmtlichen Punkten von $S^{(o\,\zeta)}$ entsprechenden Strahlen in demselben Sinne (Δ) auf einander, bilden nur einen Theil des Büschels $\mathfrak{z}^{\zeta}$ und der die Strahlenfolge $s^{\zeta}_{(o\,\zeta)}$ durchlaufende Strahl s^{ζ} trifft die Punkte von $S^{(o\,\zeta)}$ alle mit demselben Halbstrahl. Analoges gilt von den sämmtlichen Punkten von $S^{(\zeta\,\nu)}$ und den in $\mathfrak{z}^{\zeta}$ entsprechenden Strahlen (No. 51 *c*).

folgen auf den Geraden (z), $[z_{\sigma}]$ die den Tangenten von $S^{(o\,\zeta)}$ von s_{γ} bis s_{ε} entsprechenden Punkte stetig in einem und demselben Richtungssinne auf einander, und in Bezug auf jede der Geraden (z), $[z_{\sigma}]$ liegen die Punkte von $S^{(\gamma\,\zeta)}$ auf derselben Halbebene. Analoges gilt von den Tangenten von $S^{(\zeta\,\lambda)}$ und den auf denselben befindlichen Curvenpunkten. Auf der Geraden s_{ζ} folgen die den sämmtlichen Tangenten von $S^{(o\,\zeta)}$ entsprechenden Punkte in demselben Sinne auf einander, bilden nur einen Theil der Punktreihe s_{ζ} und die Punkte von $S^{(o\,\zeta)}$ liegen sämmtlich auf derselben Halbebene in Bezug auf s_{ζ}. Analoges gilt von den sämmtlichen Tangenten von $S^{(\zeta\,\nu)}$ und den auf denselben befindlichen Curvenpunkten (No. 50 *c*).

55. *a*) Da keiner der Punkte $(\mathfrak{z})$ oder $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ mit einem Punkte des ihm nach No. 53 *c* zugehörigen Curvenstückes $S^{(\alpha\,\zeta\,\iota)}$ zusammenfällt (höchstens die Punkte $\mathfrak{z}^{\alpha}$, $\mathfrak{z}^{\beta}$ auf s_{α} und $\mathfrak{z}^{\iota}$, $\mathfrak{z}^{\varkappa}$ auf s_{ι} ausgenommen), so können nach No. 35 *e* und 25 $\left(a^{\lambda}_{\psi} = g_{\infty}\right)$ die Punkte von $S^{(\zeta\,\iota)}$ von dem anderen Halbstrahl des die Strahlenfolge $z_{(\alpha\,\iota)}$, $z^{\sigma}_{(\alpha\,\iota)}$ in den Büscheln $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ durchlaufenden Strahles als die Punkte von $S^{(\alpha\,\zeta)}$ nur, wenn $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ein unendlich entfernter Punkt, getroffen werden und auch dann nicht immer.

b) Jeder der Punkte $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ kann als auf einer Geraden z liegend angesehen werden, und es folgt aus No. 35 *a*, dass in allen Büscheln $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$, deren Mittelpunkte in einer und derselben Geraden z liegen, die Punkte von $S^{(\zeta\,\iota)}$ von dem anderen oder demselben Halbstrahl des die Strahlenfolge $z_{(\alpha\,\iota)}$ resp. $z^{\sigma}_{(\alpha\,\iota)}$ durchlaufenden Strahles getroffen

werden, als die Punkte von $S^{(\alpha\,\xi)}$, je nachdem der den Curvenstücken $S^{(\xi\,\iota)}$ und $S^{(\xi\,\lambda)}$ (bezogen auf diese Gerade z) gemeinschaftliche Theil von $S^{(\xi\,\nu)}$ auf der anderen oder derselben Halbebene liegt in Bezug auf diese Gerade, als der den Curvenstücken $S^{(\alpha\xi)}$ und $S^{(\gamma\,\xi)}$ gemeinschaftliche Theil von $S^{(o\,\xi)}$; und dass in Bezug auf alle Geraden z, welche durch einen und denselben der Punkte $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ gehen, die Punkte von $S^{(\xi\,\lambda)}$ auf der anderen oder derselben Halbebene liegen, als die Punkte von $S^{(\gamma\,\xi)}$, je nachdem die $S^{(\xi\,\lambda)}$ und $S^{(\xi\,\iota)}$ (bezogen auf diesen Punkt $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}^{\sigma}$) gemeinschaftlichen Curvenpunkte von dem anderen oder demselben Halbstrahl des die Strahlenfolge $z_{(\alpha\,\iota)}$ resp. $z^{\sigma}_{(\alpha\,\iota)}$ in diesem Büschel durchlaufenden Strahles getroffen werden, als die $S^{(\gamma\,\xi)}$ und $S^{(\alpha\,\xi)}$ gemeinschaftlichen Punkte. Daraus folgt ferner:

c) Liegen die Punkte $S^{(\xi\,\lambda)}$ in Bezug auf eine der Geraden (z) auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\,\xi)}$, so liegen sie in Bezug auf alle Gerade (z) resp. auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\,\xi)}$.

d) Werden die Punkte $S^{(\xi\,\iota)}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ von demselben oder dem entgegengesetzten Halbstrahl getroffen, als die Punkte $S^{(\alpha\,\xi)}$, so werden sie in allen Büscheln $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ von dem die Strahlenfolge $z_{(\alpha\,\iota)}$ resp. $z^{\sigma}_{(\alpha\,\iota)}$ durchlaufenden Strahl resp. mit demselben oder dem entgegengesetzten Halbstrahl getroffen, als die Punkte $S^{(\alpha\xi)}$.

e) Liegen die Punkte $S^{(\xi\,\lambda)}$ in Bezug auf eine der Geraden (z) auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\,\xi)}$, so werden die Punkte $S^{(\xi\,\iota)}$ in jedem der Büschel $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ von dem die Strahlenfolge $z_{(\alpha\iota)}$ resp. $z^{\sigma}_{(\alpha\iota)}$ durchlaufenden Strahl mit demselben resp. dem entgegengesetzten Halbstrahl getroffen, als die Punkte $S^{(\alpha\,\xi)}$ und umgekehrt.

f) Die Tangenten (s^{ξ}_{σ}), welche die dem Punkt $\mathfrak{s}^{\xi}$ benachbarten Curvenpunkte enthalten, sind unmittelbar aufeinanderfolgende Strahlen des Büschels $\mathfrak{s}^{\xi}$; daher folgt aus No. 37*d* und 54*d**: Liegen die Punkte $S^{(\xi\,\lambda)}$ in Bezug auf den mit $\mathfrak{s}^{\xi}$ perspectivischen Strahl z_{ξ} eines der Büschel $(\mathfrak{z})$ (oder in Bezug auf eine der Geraden $[z_{\sigma}]$) auf derselben oder

auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, so liegen sie in Bezug auf den in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$), deren Mittelpunkte nicht auf einer der Geraden (s_σ^ζ) gelegen sind, dem Punkte $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechenden Strahl, also in Bezug auf alle Gerade [z_σ] resp. auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$.

Betreffs der Büschel ($\mathfrak{z}$), deren Mittelpunkte auf den Geraden (s_σ^ζ) (ausser s_ζ) gelegen sind, vergleiche No. 56*d*.

Gleichfalls liegen die Punkte $S^{(\zeta\iota)}$ in Bezug auf den in jedem der Büschel [$\mathfrak{z}^\sigma$] dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechenden Strahl $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$ (No. 54*b*) auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene als die Punkte $S^{(\alpha\zeta)}$, je nachdem das Eine oder das Andere in Bezug auf eines der Büschel [$\mathfrak{z}^\sigma$] gilt.

g) Je nachdem die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ in Bezug auf den in einem der Büschel ($\mathfrak{z}$) dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechenden Strahl z_ζ (oder in Bezug auf eine der Geraden [z_σ]), auf derselben oder auf der entgegengesetzten Halbebene liegen als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, werden die Punkte $S^{(\zeta\nu)}$ von dem im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ die Strahlenfolge $s_{(o\nu)}^\zeta$ durchlaufenden Strahl resp. mit demselben oder dem entgegengesetzten Halbstrahl getroffen, als die Punkte von $S^{(o\zeta)}$ (No. 35*a*, 54*d*[*]) und umgekehrt.

B. Einfluss der ausgezeichneten Elemente eines Curvenstückes auf die mit demselben perspectivischen Strahlen- und Punktenfolgen; Classificirung der ersteren.

56. *a*) 1. Jedesmal, wenn in den Büscheln ($\mathfrak{z}$), [$\mathfrak{z}^\sigma$], $\mathfrak{z}^\zeta$ die den Punkten von $S^{(\zeta\iota)}$ im Sinne Σ entsprechenden Strahlen in demselben Bewegungssinne aufeinanderfolgen, als die den Punkten $S^{(\alpha\zeta)}$ im Sinne Σ entsprechenden, also resp. der Strahl z_ζ, $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$, s_ε in diesen Büscheln für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$, $z_{(o\nu)}^\sigma$, $s_{(o\nu)}^\zeta$ ein gewöhnlicher Strahl ist, müssen von den nicht in diesem Strahl befindlichen Curvenpunkten nach No. 34*b*[*], 39*b* die auf den Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ im Sinne Σ folgenden, das sind die von $S^{(\zeta\iota)}$

entweder auf der anderen Halbebene in Bezug auf resp. z_ζ, $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$, s_ε liegen und von demselben Halbstrahl,

oder auf derselben Halbebene in Bezug auf resp. z_ζ, $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$, s_ε liegen und von dem anderen Halbstrahl

des eines der Büschel resp. $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^\sigma]$, $\mathfrak{s}^\zeta$ durchlaufenden Strahles getroffen werden, als die dem Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ in demselben Sinne Σ vorhergehenden Curvenpunkte, nämlich als die von $S^{(\alpha\,\zeta)}$, und umgekehrt.

2. Jedesmal, wenn der Strahl z_ζ, $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$, s_ε für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$, $z_{(o\nu)}^\sigma$, $s_{(o\nu)}^\zeta$ ein Rückkehrstrahl ist, müssen von den nicht in diesem Strahl befindlichen Curvenpunkten die von $S^{(\zeta\iota)}$

entweder auf derselben Halbebene in Bezug auf resp. z_ζ, $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$, s_ε liegen und von demselben Halbstrahl,

oder auf der anderen Halbebene in Bezug auf resp. z_ζ, s_ζ, s_ε liegen und von dem anderen Halbstrahl

des eines der Büschel $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^\sigma]$, $\mathfrak{s}^\zeta$ durchlaufenden Strahles getroffen werden, als die Punkte von $S^{(\alpha\,\zeta)}$, und umgekehrt.

b) 1. Jedesmal, wenn auf einer der Geraden (z), $[z_\sigma]$, s_ζ die den Tangenten von $S^{(\zeta\lambda)}$ im Sinne Σ entsprechenden Punkte in demselben Bewegungssinne aufeinander folgen, als die den Tangenten von $S^{(\gamma\,\zeta)}$ im Sinn Σ entsprechenden Punkte, also resp. der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{z}_\sigma^\varepsilon = \mathfrak{s}^\zeta$, $\mathfrak{s}^\zeta$ auf diesen Geraden für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$, $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Punkt ist, muss nach No. 36c^2 und 45a,b die Tangente s_ϱ beim Uebergang aus der Lage s_ε in die im Sinne $\dot{\Sigma}$ folgende, s_ζ, und somit aus jeder Lage im Curvenstück $S^{(\zeta\nu)}$ in die im Sinne Σ folgende (No. 54a), sich in demselben Sinne Δ bewegen, den sie hat beim Uebergange aus jeder Lage im Curvenstück $S^{(o\,\zeta)}$ in die im Sinne Σ folgende, oder in dem entgegengesetzten $\overline{\Delta}$, je nachdem die Punkte von $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben Halbebene in Bezug auf diese Gerade resp. z, z_σ, s_ζ liegen, als die Punkte von $S^{(\gamma\,\zeta)}$, oder auf der entgegengesetzten.

2. Jedesmal aber, wenn der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{z}_\sigma^\varepsilon = \mathfrak{s}^\zeta$, $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$, $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ ein Rückkehrpunkt ist, muss s_ϱ beim Ueber-

gang aus der Lage s_ε in die im Sinne Σ folgende, s_ζ, in dem entgegengesetzten Sinne $\bar{\Delta}$ oder demselben Sinne Δ sich bewegen, je nachdem die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ sich auf derselben Halbebene in Bezug auf diese Gerade resp. z, z_σ oder s_ζ befinden, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, oder auf der entgegengesetzten.

c) Durch Vergleichung hiermit und mit No. 45*b*, *d* folgt aus No. 55*c*, *d*, *e* und 6, wenn wir

betreffs der Strahlbüschel $\mathfrak{z}$, deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen Punkte der von s_ζ verschiedenen Tangenten (s_σ^ζ) sind, für welche, indem s_α oder s_ι mit z_ζ zusammenfällt, einer der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ gleich Null wird, und

betreffs der Geraden z, welche die Tangente s_ε in einem der auf derselben befindlichen von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen Curvenpunkte schneiden, ohne mit ihr zusammenzufallen, für welche, indem $\mathfrak{z}^\gamma$ oder $\mathfrak{z}^\lambda$ mit $\mathfrak{z}^\varepsilon$ zusammenfällt einer der beiden Theile $S^{(\gamma\zeta)}$, $S^{(\zeta\lambda)}$ gleich Null wird,

No. 25*a* berücksichtigen:

1. dass in allen Büscheln $(\mathfrak{z})$ der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl z_ζ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist, wenn er in einem derselben ein gewöhnlicher resp. Rückkehr-Strahl ist;

dass auf allen Geraden (z) der der Tangente s_ε entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist, wenn er auf einer derselben ein gewöhnlicher resp. Rückkehr-Punkt ist;

2. dass in allen Büscheln $[\mathfrak{z}^\sigma]$ der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl s_ζ für die Strahlenfolge $z^\sigma_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist, wenn er in einem derselben ein gewöhnlicher resp Rückkehr-Strahl ist.

dass auf allen Geraden $[z_\sigma]$ der der Tangente s_ε entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist, wenn er auf einer derselben ein gewöhnlicher resp. Rückkehr-Punkt ist.

d) 1. Nach No. 51*b*, *c* ist die Tangente s_α in den Strahlbüscheln $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}^\sigma$, deren Mittelpunkte die von den

Nach No. 50*b*, *c* ist der Punkt $\mathfrak{z}^\gamma$ auf den Punktreihen z und z_σ, deren Träger die von den sich in

Curvenpunkten auf s_α, $\mathfrak{z}^\alpha$, $\mathfrak{z}^\beta$ verschiedenen Punkte von s_α sind, ein Rückkehrstrahl für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ resp. $z^\sigma_{(o\nu)}$, in den Strahlbüscheln, deren Mittelpunkte die Curvenpunkte $\mathfrak{z}^\alpha$, $\mathfrak{z}^\beta$ sind, aber ein gewöhnlicher Strahl. Gleiches gilt für s_ι.

$\mathfrak{z}^\gamma$ schneidenden Tangenten s_β und s_γ verschiedenen Strahlen des Büschels $\mathfrak{z}^\gamma$ sind, ein Rückkehrpunkt für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\sigma$, auf den Geraden s_β und s_γ jedoch ein gewöhnlicher Punkt. Gleiches gilt von $\mathfrak{z}^\lambda$.

2. Daher erscheint der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl z_ζ, wenn er in den Strahlbüscheln $(\mathfrak{z})$, deren Mittelpunkte mit keiner der Geraden (s^ζ_σ) perspectivisch liegen, ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$,

in den Strahlbüscheln $\mathfrak{z}$, deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen, auf den von s_ζ verschiedenen Tangenten (s^ζ_σ) befindlichen Curvenpunkte sind, ebenfalls resp. als ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl,

in den Büscheln $\mathfrak{z}$, deren Mittelpunkte die übrigen von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen Punkte der von s_ζ verschiedenen Tangenten (s^ζ_σ) sind, resp. als ein Rückkehr- oder gewöhnlicher Strahl.

Daher erscheint der der Tangente s_ε entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$, wenn er auf den Geraden (z), welche mit keinem der auf s_ε befindlichen Curvenpunkte perspectivisch liegen, ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$,

auf den Geraden z, welche mit den von s_ε verschiedenen, diese Gerade s_ε in den von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen auf derselben befindlichen Curvenpunkten schneidenden Tangenten identisch sind, ebenfalls resp. als ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt,

auf den übrigen Geraden z, welche die Tangente s_ε in einem der auf ihr befindlichen von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen Curvenpunkte schneiden, resp. als ein Rückkehr- oder gewöhnlicher Punkt.

3. Dies hier in No. 56*d* Gesagte würde zunächst nur gelten, wenn s_ε eine endliche Gerade und $\mathfrak{z}^\zeta$ ein endlicher Punkt derselben ist, da die Untersuchungen in No. 50 und 51 sich nur auf endliche Curvenelemente beziehen; da aber die hier in Betracht kommenden Eigenschaften nach No. 58*c*, 25 für solche Curvenelemente, die wir gewöhnliche nennen, auch gelten, wenn sie eine unendlich entfernte Lage haben, so gilt dasselbe allgemein. Wir können hiernach, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, des leichteren Ausdruckes wegen

diejenigen Strahlbüschel $\mathfrak{z}$, deren Mittelpunkte den Geraden (s_σ^ζ) angehören, | diejenigen Geraden z, welche s_ε in einem der von $\mathfrak{s}^\zeta$ verschiedenen Curvenpunkte schneiden,

ausschliessen, da dieselben Gesetze, welche für die übrigen Punkte $(\mathfrak{z})$ resp. Geraden (z) gelten, auch auf diese Anwendung finden, aber die angegebene Modification erleiden.

57. *a*) 1. Sind der der Tangente s_ε auf einer der Geraden (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und der ihr auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ entsprechende $\mathfrak{z}_\sigma^\varepsilon = \mathfrak{s}^\zeta$ beide auf ihren Geraden entweder gewöhnliche oder beide Rückkehr-Punkte für die Punktenfolgen $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ resp. $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$, so befinden sich $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{s}^\zeta$ stets in demselben der von einer der Tangenten von $S^{(\gamma\zeta)}$ und einer der Tangenten von $S^{(\zeta\lambda)}$ gebildeten Winkel*); die Schnittpunkte je einer Tangente von $S^{(\gamma\zeta)}$ und einer von $S^{(\zeta\lambda)}$ mit s_ε bilden daher stets ein Punktepaar zweiter Art in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{s}^\zeta$ (No. 31, 12), gehören also derselben von den beiden durch $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{s}^\zeta$ begrenzten Strecken an; das heisst (No. 16): der Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ ist für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\varepsilon^{(o\nu)}$ auf s_ε und somit auch für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ auf s_ζ ein Rückkehrpunkt (No. 42$b\alpha^2$, 37)**).

2. Ist der eine der Punkte $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{s}^\zeta$ auf seiner Geraden für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher, der andere ein Rückkehrpunkt, so gehört stets der eine dem einen, der andere dem anderen der durch eine Tangente von $S^{(\gamma\zeta)}$ und eine von $S^{(\zeta\lambda)}$ gebildeten Winkel an; die Schnittpunkte zweier solcher Tangenten mit s_ε bilden daher ein Punkte-

*) Unter $S^{(\gamma\zeta)}$ und $S^{(\zeta\lambda)}$ sind hier die Theile von $S^{(o\nu)}$ zu verstehen, welche resp. den durch die gewählte Gerade z nach No. 54c bestimmten Curvenstücken $S^{(\gamma\zeta)}$ und $S^{(\zeta\lambda)}$ mit den durch die gewählte Gerade z_σ bestimmten gemeinschaftlich sind.

**) Dass der Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$, je nachdem er für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\varepsilon^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder ein Rückkehr-Punkt, auch für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ resp. ein gewöhnlicher oder ein Rückkehr-Punkt ist, ist, wenn $\mathfrak{z}^\varepsilon$ ein Rückkehr-Punkt für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, also $\mathfrak{z}^\varepsilon = \mathfrak{z}^\zeta$ (No. 16c) folglich $s_\varepsilon = s_\zeta$ (No. 2), selbstverständlich; wenn aber $\mathfrak{z}^\varepsilon$ ein gewöhnlicher Punkt für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, so lässt sich dieselbe Schlussfolge, welche in No. 57a auf s_ε angewandt ist, ebenso für s_ζ durchführen.

paar der ersten Art in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{z}^{\varepsilon}$ und $\mathfrak{z}^{\zeta}$, das heisst (No. 16): der Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ist für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_{\varepsilon}^{(o\nu)}$ und somit auch für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_{\zeta}^{(o\nu)}$ auf s_{ζ} ein gewöhnlicher Punkt*).

b) 1. Aus No. 55*g* und 56a^2 folgt, dass die Tangente s_{ε} in dem Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die Strahlenfolge $s_{(o\nu)}^{\prime\zeta}$ ein Rückkehrstrahl ist, wenn

entweder sowohl in Bezug auf $s_{\zeta}=z_{\zeta}^{\sigma}$ als in Bezug auf z_{ζ}, dem in einem der Büschel ($\mathfrak{z}$) mit $\mathfrak{z}^{\zeta}$ perspectivischen Strahl, die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben Halbebene liegen, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$,

oder wenn sowohl in Bezug auf eine der Geraden z_{ζ} als in Bezug auf $s_{\zeta}=z_{\zeta}^{\sigma}$ die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene liegen, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$.

Aus No. 39*a* geht nämlich hervor, dass, da s_{ε} und s_{ζ} zwei unmittelbar aufeinander folgende Strahlen des Büschels $\mathfrak{z}^{\zeta}$ sind, alle Punkte, welche in Bezug auf s_{ζ} auf derselben Halbebene sich befinden und weder mit s_{ε} noch mit s_{ζ} perspectivisch liegen, auch in Bezug auf s_{ε} ein und derselben Halbebene angehören, und dass je zwei weder mit s_{ε} noch mit s_{ζ} perspectivische Punkte, welche in Bezug auf eine dieser Geraden auf entgegengesetzten Halbebenen liegen, auch in Bezug auf die andere entgegengesetzten Halbebenen angehören.

Da aber $z_{\zeta}^{\sigma}=s_{\zeta}$ der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ in einem der Büschel [$\mathfrak{z}^{\sigma}$] entsprechende Strahl ist, so können wir mit Rücksicht auf No. 55*c*, *d*, *e* auch sagen: Die Tangente s_{ε} ist in dem Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die Strahlenfolge $s_{(o\nu)}^{\zeta}$ ein Rückkehrstrahl, wenn sowohl in einem der Büschel ($\mathfrak{z}$) als in einem der Büschel [$\mathfrak{z}^{\sigma}$] der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ entsprechende Strahl für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ resp. $z_{(o\nu)}^{\sigma}$ ein gewöhnlicher Strahl oder in beiden ein Rückkehrstrahl ist.

2. Die Tangente s_{ε} aber ist in dem Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die Strahlenfolge $s_{(o\nu)}^{\zeta}$ ein gewöhnlicher Strahl, wenn die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$

in Bezug auf $s_{\zeta}=z_{\zeta}^{\sigma}$ auf derselben und in Bezug auf eine der Geraden z_{ζ}, d. i. eine der Geraden [z_{σ}], auf der entgegengesetzten, oder

*) Siehe vorhergende Anmerkung.

in Bezug auf $s_\zeta = z_\zeta^\sigma$ auf der entgegengesetzten und in Bezug auf eine Gerade z_ζ oder z_σ auf derselben

Halbebene sich befinden, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, also nach No. 55*c*, *d*, *e* und 56*a* jedesmal, wenn der dem Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ entsprechende Strahl resp. für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ oder $z^\sigma_{(o\nu)}$

in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ ein gewöhnlicher und in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein Rückkehr-Strahl, oder

in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein gewöhnlicher und in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ ein Rückkehr-Strahl ist.

c) Mit Hilfe von No. 56*b* folgern wir weiter aus No. 57*b*:

1. Die Tangente s_ε kann im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ nur dann ein gewöhnlicher Strahl sein,

wenn $\mathfrak{s}^\zeta$ auf s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher und auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$ ein Rückkehr-Punkt ist,

oder wenn $\mathfrak{s}^\zeta$ auf s_ζ ein Rückkehr- und auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein gewöhnlicher Punkt ist,

das heisst, nach No. 57*a*², jedesmal, wenn der der Tangente s_ε auf einer der Geraden (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Punkt ist.

2. Die Tangente s_ε kann im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ nur dann ein Rückkehrstrahl sein,

wenn $\mathfrak{s}^\zeta$ auf s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ und auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Punkt ist, oder

wenn $\mathfrak{s}^\zeta$ auf s_ζ und einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein Rückkehrpunkt ist,

das heisst nach No. 57*a*¹, jedesmal, wenn der der Tangente s_ε auf einer der Geraden (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ ein Rückkehrpunkt ist.

d) Zufolge No. 6, 28, 37*b*, 45*d* muss jedesmal, wenn der dem Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ entsprechende Strahl z_ζ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Strahl ist, der Punkt $\mathfrak{s}^\varrho$ auf s_ϱ in der Lage s_ζ von $\mathfrak{s}^\zeta$ aus sich in demselben Richtungssinne P weiter bewegen, mit welchem

er auf s_ϱ in der vorhergehenden Lage s_ε nach $\mathfrak{z}^\zeta$ gelangt war; jedesmal aber, wenn der Strahl z_ζ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl ist, muss $\mathfrak{z}^\varrho$ den Richtungssinn auf s_ϱ in der Lage s_ζ ändern in den entgegengesetzten $\overline{P}$.

Daraus folgt, dass der Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ auf s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu)}$ jedesmal ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist, wenn der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ resp. ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist.

58. *a*) Wir stellen hier die in No. 57 gefundenen Sätze zusammen; diese sind:

1. Sind die dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ und einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ entsprechenden Strahlen resp. z_ζ, s_ζ für die Strahlenfolgen resp. $z_{(o\nu)}$ und $z^\sigma_{(o\nu)}$ beide gewöhnliche oder beide Rückkehr-Strahlen, so ist s_ε im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, und umgekehrt.

Sind die der Tangente s_ε auf einer der Geraden (z) und einer der Geraden $[z_\sigma]$ entsprechenden Elemente resp. $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ und $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$ beide gewöhnliche oder beide Rückkehr-Punkte, so ist $\mathfrak{z}^\zeta$ auf der Tangente s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu)}$ ein Rückkehrpunkt, und umgekehrt.

Ist eines der Elemente z_ζ, $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$ ein gewöhnlicher, das andere ein Rückkehr-Strahl für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$ oder $z^\sigma_{(o\nu)}$, so ist s_ε für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Strahl, und umgekehrt.

Ist eines der Elemente $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{z}_\sigma^\varepsilon = \mathfrak{z}^\zeta$ ein gewöhnlicher, das andere ein Rückkehr-Punkt für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\nu)}$, so ist $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Punkt, und umgekehrt.

2. Jedesmal, wenn s_ε im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Strahlen-

Jedesmal, wenn $\mathfrak{z}^\zeta$ auf der Tangente s_ζ für die Punkten-

folge $s^{\zeta}_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist, ist der der Tangente s_{ε} auf einer der Geraden (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^{\varepsilon}$ resp. ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt für die Punktenfolge ${}^{(o\nu)}$, und umgekehrt.

folge $\mathfrak{s}^{(o\nu)}_{\zeta}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist, ist der dem Punkt $\mathfrak{s}^{\zeta}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ entsprechende Strahl z_{ζ} resp. ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$, und umgekehrt.

b) Diese Sätze im Verein mit No. 56*c* zeigen die Abhängigkeit der Bewegungssinne der den laufenden Curvenelementen $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} in den Strahlbüscheln $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$, $\mathfrak{s}^{\zeta}$, resp. den Punktreihen (z), $[z_{\sigma}]$, s_{ζ} entsprechenden Elemente von einander; sie lassen erkennen, dass, sobald wir den Bewegungssinn des den laufenden Curvenelementen $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} in einer gleichzeitigen Lage in irgend zwei ungleichartigen der erwähnten Gebilde kennen, dadurch der Bewegungssinn des in jedem der anderen Gebilde entsprechenden Elementes und somit auch der Charakter der Curvenelemente, welche gerade von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} gedeckt werden, in der Hinsicht bestimmt ist, ob $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} beim Uebergang in die nächstfolgende Lage ihren Bewegungssinn ändern müssen oder nicht.

c) Wir stellen darnach folgende Definitionen auf:*)

Lassen wir die Elemente $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} das Curvenstück $S^{(o\nu)}$ stetig im Sinne Σ durchlaufen, und ist die Lage der Theile $S^{(o\zeta)}$, $S^{(\zeta\nu)}$ gegen einander eine derartige,

---

*) Haben $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} den Theil $S^{(o\zeta)}$ von $S^{(o\nu)}$ im Sinne Σ durchlaufen, so dass s_{ϱ} die Lage s_{ε}, $\mathfrak{s}^{\varrho}$ die von $\mathfrak{s}^{\zeta}$ hat, so beginnt nach No. 46 die Beschreibung des Theiles $S^{(\zeta\nu)}$ mit einer Bewegung von s_{ϱ}, für welche $\mathfrak{s}^{\zeta}$ als Drehungscentrum gegeben ist, und darauf erst kann eine Bewegung von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ von der Lage $\mathfrak{s}^{\zeta}$ aus erfolgen. Ausserdem ist nun ein zweiter Fall möglich und ebenso berechtigt, demzufolge wir das Curvenstück $S^{(o\nu)}$ uns so in zwei Theile zerlegt denken, dass der durch den Bewegungssinn von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ und s_{ϱ} bestimmte erste Theil mit einer Bewegung von s_{ϱ} schliesst, also der zweite mit einer Bewegung von $\mathfrak{s}^{\varrho}$ beginnen muss, für welche die Bahn, nämlich die zuletzt erlangte Lage der Geraden s_{ϱ} gegeben ist.

Wir haben willkürlich für die Durchführung den ersten Fall gewählt; der andere führt zu demselben Resultat, d. i. zu denselben Formen für das Curven-

1. dass der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ in der Lage $\mathfrak{z}^{\zeta}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ entsprechende Strahl z_{ζ} ein gewöhnlicher, der in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ entsprechende $z_{\zeta}^{\sigma} = s_{\zeta}$ ein Rückkehr-Strahl ist resp. für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ oder $z^{\sigma}_{(o\nu)}$,

so ist s_{ε} im Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die Strahlenfolge $s^{\zeta}_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Strahl, und wir nennen $\mathfrak{z}^{\zeta}$ **einen gewöhnlichen Curvenpunkt**;

dass der der Tangente s_{ϱ} in der Lage s_{ε} auf einer der Punktreihen (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^{\varepsilon}$ ein gewöhnlicher, der auf einer der Geraden $[z_{\sigma}]$ entsprechende $\mathfrak{z}^{\varepsilon}_{\sigma} = \mathfrak{z}^{\zeta}$ ein Rückkehr-Punkt ist resp. für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_{\sigma}$,

so ist $\mathfrak{z}^{\zeta}$ auf der Geraden s_{ζ} für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_{\zeta}$ ein gewöhnlicher Punkt, und wir nennen s_{ε} **eine gewöhnliche Tangente**;

---

stück $S^{(o\nu)}$, denn wir erhalten den einen stets aus dem anderen, wenn wir den Bewegungssinn Σ für die Elemente $\mathfrak{z}^{\varrho}$ und s_{ϱ} in den entgegengesetzten $\overline{\Sigma}$ umkehren; diese Umkehrung des Bewegungssinnes ist aber unabhängig von der Gestaltung des Curvenstückes, also ohne Einfluss auf dieselbe. Denken wir uns nämlich das Curvenstück $S^{(\nu o)}$ so in zwei Theile getheilt, dass der erste im Sinne $\overline{\Sigma}$, $S^{(\nu\zeta)}$, die Tangenten $s_{\nu}, s_{\nu-1}, \ldots s_{\eta}, s_{\zeta}$ und die Punkte $\mathfrak{z}^{\nu}, \mathfrak{z}^{\nu-1}, \ldots \mathfrak{z}^{\vartheta}\, \mathfrak{z}^{\eta}$, der zweite, $S^{(\zeta o)}$, also die Tangenten $s_{\zeta}, s_{\varepsilon}, s_{\delta} \ldots s_{1}, s_{0}$ und die Punkte $\mathfrak{z}^{\eta}, \mathfrak{z}^{\zeta}, \mathfrak{z}^{\varepsilon} \ldots \mathfrak{z}^{1}, \mathfrak{z}^{0}$ umfasst, so erhalten wir für die möglichen Formen von $S^{(\nu o)}$ folgende, den in No. 58*c* angegebenen ganz analoge Definitionen, in denen die Symbole $(\mathfrak{z})$ $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$, (z), $[z_{\sigma}]$ die in No. 54*b* bestimmte Bedeutung haben:

Lassen wir die Elemente $\mathfrak{z}^{\varrho}$ und s_{ϱ} das Curvenstück $S^{(\nu o)}$ stetig im Sinne $\overline{\Sigma}$ durchlaufen und ist die Lage der Theile $S^{(\nu\zeta)}$, $S^{(\zeta o)}$ gegen einander eine derartige,

dass der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ in der Lage $\mathfrak{z}^{\eta}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ entsprechende Strahl z_{η} ein gewöhnlicher, der in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ entsprechende z^{σ}_{η} ein Rückkehr-Strahl ist resp. für die Strahlenfolge $z_{(\nu o)}$ oder $z^{\sigma}_{(\nu o)}$,

so ist s_{ζ} im Büschel $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die

dass der der Tangente s_{ϱ} in der Lage s_{ζ} auf einer der Punktreihen (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ein gewöhnlicher, der auf einer der Geraden (z_{σ}) entsprechende $\mathfrak{z}^{\zeta}_{\sigma}$ ein Rückkehr-Punkt ist resp. für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(\nu o)}$ oder $\mathfrak{z}^{(\nu o)}_{\sigma}$,

so ist $\mathfrak{z}^{\eta}$ auf der Geraden s_{ζ} für die

2. dass sowohl der Strahl z_ζ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ als der Strahl $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein gewöhnlicher Strahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$ oder $z^\sigma_{(o\nu)}$,

dass der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ auf einer der Geraden (z) ein Rückkehr-, der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein gewöhnlicher Punkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\sigma$,

so ist s_ε im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, und wir nennen $\mathfrak{s}^\zeta$ **einen einfachen Wendepunkt;**

so ist $\mathfrak{s}^\zeta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(o\nu)}_\zeta$ ein gewöhnlicher Punkt und wir nennen s_ε **eine einfache Wendetangente;**

3. dass der Strahl z_ζ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ ein Rückkehr-, der Strahl $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein gewöhnlicher Strahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$ oder $z^\sigma_{(o\nu)}$,

dass sowohl der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ auf einer der Geraden (z) als auch der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein gewöhnlicher Punkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\sigma$,

---

Strahlenfolge $s^\zeta_{(\nu o)}$ ein gewöhnlicher Strahl, $\mathfrak{s}^\eta$ ein gewöhnlicher Curvenpunkt;

Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(\nu o)}_\zeta$ ein gewöhnlicher Punkt, s_ζ eine gewöhnliche Tangente;

dass sowohl z_η in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ als $z^\sigma_\eta = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein gewöhnlicher Strahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(\nu o)}$ oder $z^\sigma_{(\nu o)}$,

dass $\mathfrak{z}^\zeta$ auf einer der Geraden (z) ein Rückkehr-, $\mathfrak{z}^\zeta_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein gewöhnlicher Punkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(\nu o)}$ oder $\mathfrak{z}^{(\nu o)}_\sigma$,

so ist s_ζ im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(\nu o)}$ ein Rückkehrstrahl, $\mathfrak{s}^\zeta$ ein einfacher Wendepunkt;

so ist $\mathfrak{s}^\eta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(\nu o)}_\zeta$ ein gewöhnlicher Punkt, s_ζ eine einfache Wendetangente;

so ist s_ε im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Strahl, und wir nennen $\mathfrak{s}^\zeta$ **einen einfachen Rückkehrpunkt;**

so ist $\mathfrak{s}^\zeta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(o\nu)}_\zeta$ ein Rückkehrpunkt, und wir nennen s_ζ **eine einfache Rückkehrtangente;**

4. dass sowohl der Strahl z_ζ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$, als auch der Strahl $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein Rückkehrstrahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$ oder $z^\sigma_{(o\nu)}$,

dass sowohl der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ auf einer der Geraden (z), als auch der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein Rückkehrpunkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ oder $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\sigma$,

---

dass z_η in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ ein Rückkehr-, $z^\sigma_\eta = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein gewöhnlicher Strahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(\nu o)}$ oder $z^o_{(\nu o)}$,

so ist s_ζ im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(\nu o)}$ ein gewöhnlicher Strahl, $\mathfrak{s}^\eta$ ein einfacher Rückkehrpunkt;

dass sowohl z_η in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ als auch $z^\sigma_\eta = s_\zeta$ in einem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ ein Rückkehrstrahl ist für die Strahlenfolge resp. $z_{(\nu o)}$ oder $z^\zeta_{(\nu o)}$,

so ist s_ζ im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(\nu o)}$ ein Rückkehrstrahl, $\mathfrak{s}^\eta$ ein Rückkehr-Wendepunkt.

dass $\mathfrak{z}^\zeta$ auf einer der Geraden (z) sowohl, als auch $\mathfrak{z}^\zeta_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein gewöhnlicher Punkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(\nu o)}$ oder $\mathfrak{z}^{(\nu o)}_\sigma$,

so ist $\mathfrak{s}^\eta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(\nu o)}_\zeta$ ein Rückkehrpunkt, s_ζ eine einfache Rückkehrtangente;

dass sowohl $\mathfrak{z}^\zeta$ auf einer der Geraden (z) als auch $\mathfrak{z}^\zeta_\sigma = \mathfrak{s}^\zeta$ auf einer der Geraden $[z_\sigma]$ ein Rückkehrpunkt ist für die Punktenfolge resp. $\mathfrak{z}^{(\nu o)}$ oder $\mathfrak{z}^{(\nu o)}_\sigma$,

so ist $\mathfrak{s}^\eta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{s}^{(\nu o)}_\zeta$ ein Rückkehrpunkt, s_ζ eine Rückkehr-Wendetangente.

• Diese Definitionen bestimmen ganz dieselbe Gestaltung von $S^{(o\nu)}$ in den einzelnen Fällen als die in No. 58*c*, da es beispielweis gleich ist (No. 16*c*), ob z_ζ für $z_{(o\nu)}$ oder z_η für $z_{(\nu o)}$ ein gewöhnlicher, ein Rückkehr-Strahl, ob für $S^{(o\nu)}$ im Sinne $\Sigma\, s_t$ oder für $S^{(\nu o)}$ im Sinne $\bar{\Sigma}\, s_\zeta$ eine Wendetangente ist.

so ist s_ε im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, und wir nennen $\mathfrak{z}^\zeta$ **einen Wende-Rückkehrpunkt.**

so ist $\mathfrak{z}^\zeta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\zeta$ ein Rückkehrpunkt, und wir nennen s_ε **eine Wende-Rückkehrtangente.***)

Von den in gleicher Höhe stehenden Sätzen ist der eine die Folge des anderen.

Andere als diese vier Möglichkeiten für die Beschaffenheit der den Elementen $\mathfrak{z}^\varrho$ und s_ϱ in irgend einer Lage in den Strahlbüscheln und Punktreihen der Ebene entsprechenden Strahlen resp. Punkte sind nicht vorhanden.

d) Noch haben wir bis jetzt die Strahlbüschel, deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen auf s^ζ gelegenen Curvenpunkte $\mathfrak{z}^\sigma_\zeta$ sind, und die Geraden der Ebene, welche mit den durch $\mathfrak{z}^\zeta$ gehenden von s_ζ verschiedenen Tangenten s^ζ_σ identisch sind, nicht berücksichtigt.

1. Erstere gehören in die Klasse der Strahlbüschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$; für sie sind aber s_ζ und s_ι oder, wenn s_ζ mit s_ε zusammenfällt, auch s_α und $s_\varepsilon = s_\zeta$ aufeinanderfolgende Strahlen ihrer Büschel, und zwar zufolge der Voraussetzungen in No. 54a, nach No. 51c oder 58c^1 in demselben Sinne aufeinanderfolgende, in welchem die den Punkten von $S^{(\iota\nu)}$ resp. $S^{(o\alpha)}$ im Sinne Σ entsprechenden Strahlen aufeinanderfolgen. Daher ist in diesen Büscheln $\mathfrak{z}^\sigma$ ($= \mathfrak{z}^\sigma_\zeta$ ausser $\mathfrak{z}^\zeta$) der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl s_ζ für die Strahlenfolge $z^\sigma_{(o\nu)}$ ein Rückkehr- oder gewöhnlicher Strahl, wenn er in allen übrigen Büscheln $[\mathfrak{z}^\sigma]$ resp. ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist (No. 56d^1, 58c^1).

2. Die von s_ζ verschiedenen Geraden s^ζ_σ sind Gerade der Art $[z_\sigma]$, in denen $\mathfrak{z}^\gamma$ und $\mathfrak{z}^\zeta$ oder, wenn $\mathfrak{z}^\eta$ und $\mathfrak{z}^\zeta$ zusammenfallen, auch $\mathfrak{z}^\zeta = \mathfrak{z}^\eta$ und $\mathfrak{z}^\lambda$ aufeinanderfolgende Punkte ihrer Geraden sind, und zwar in demselben Sinn aufeinanderfolgende, in welchem die den Tangenten von $S^{(\sigma\gamma)}$ resp. $S^{(\lambda\nu)}$ im Sinne Σ entsprechenden Punkte aufeinanderfolgen. Daher ist auf diesen Geraden z_σ ($= s^\zeta_\sigma$ ausser s_ζ) der der Tangente s_ε ent-

*) Vergl. v. Staudt, Geometrie der Lage No. 197—204.

sprechende Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_{\sigma}^{(o\nu)}$ ein Rückkehr- oder gewöhnlicher Punkt, wenn er auf allen übrigen Geraden $[z_{\sigma}]$ resp. ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist (No. 56d^1, 58c^1).

3. Da das Verhalten des dem Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ resp. der Tangente s_{ε} entsprechenden Elementes in der mit $S^{(o\nu)}$ perspectivischen Elementenfolge in diesen Gebilden in dieser einfachen Weise durch das Verhalten in den übrigen Gebilden $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ oder $[z_{\sigma}]$ bestimmt und erkennbar ist, so mögen dieselben nach wie vor von der Bezeichnung $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$, $[z_{\sigma}]$ ausgeschlossen bleiben (No. 54b, 56d^3).

§. 18. Einfluss der ausgezeichneten Elemente auf die relative Lage und Anordnung der übrigen Elemente des Curvenstückes, d. i. auf die Gestalt desselben.

59. Im Folgenden wollen wir aus diesen Definitionen und Eigenschaften das diesen in den einzelnen Fällen entsprechende Bild des Curvenstückes $S^{(o\nu)}$ ableiten. Wir haben da gemäss der schon früher erkannten ausgezeichneten Eigenschaften der unendlich entfernten Punkte und der unendlich entfernten Geraden (No. 44) folgende drei Fälle zu unterscheiden:

I. s_{ε} ist eine endliche Gerade und $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ein endlicher Punkt derselben,

II. s_{ε} ist eine endliche Gerade und $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ihr unendlich entfernter Punkt,

III. s_{ε} ist die unendlich entfernte Gerade g_{∞}, also auch $\mathfrak{z}^{\zeta}$ ein unendlich entfernter Punkt.

a) In dem ersten dieser Fälle sind die sämmtlichen Punkte und Tangenten von $S^{(o\nu)}$ endliche Punkte und Gerade; in Bezug auf jede der Geraden (z) liegen die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben Halbebene mit den Punkten $S^{(\gamma\zeta)}$.

1. Es werden daher nach No. 55e in jedem der Büschel $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ die Punkte $S^{(\zeta\iota)}$ von demselben Halbstrahl des die Strahlenfolge resp. $z_{(o\nu)}$ oder $z^{\sigma}_{(o\nu)}$ durchlaufenden Strahles getroffen, als die Punkte $S^{(\alpha\zeta)}$.

2. Es liegen mithin jedesmal wenn der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$, $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ entsprechende Strahl z_{ζ} oder z^{σ}_{ζ} ein gewöhnlicher oder

Rückkehr-Strahl ist, die Punkte $S^{(\zeta\iota)}$ resp. auf der entgegengesetzten oder derselben Halbebene in Bezug auf den Strahl z_ζ oder $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$.

3. Jedesmal wenn der der Tangente s_ε auf einer der Geraden (z) entsprechende Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ ein gewöhnlicher oder Rück-kehr-Punkt, muss s_ϱ in der Lage s_ε den Drehsinn $\varDelta$ resp. beibehalten oder in den entgegengesetzten $\overline{\varDelta}$ ändern.

4. Jedesmal wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ auf s_ϱ in der Lage $\mathfrak{s}^\zeta$ den Richtungssinn ändert, fällt der Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho|\infty)}$ in Bezug auf die zweite der in $\mathfrak{s}^\zeta$ (No. 16c) zusammenfallenden Lagen von $\mathfrak{s}^\varrho$ auf den Halbstrahl $\mathfrak{s}^{(\varrho-\infty)}$ in Bezug auf die erste dieser Lagen; jedem Punkt dieses Halbstrahles kehren daher sowohl $S^{(\zeta\iota)}$ als $S^{(\alpha\zeta)}$ die convexe Seite zu (No. 52d^3), jedem Punkt des anderen Halbstrahls beide die concave Seite. Wenn $\mathfrak{s}^\varrho$ auf s_ϱ in der Lage $\mathfrak{s}^\zeta$ den Richtungssinn nicht ändert, kehrt jedem Punkt des Halbstrahls $\mathfrak{s}^{(\zeta-\infty)}$ $S^{(\alpha\zeta)}$ die convexe, $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, jedem Punkt des Halbstrahls $\mathfrak{s}^{(\zeta|\infty)}$ $S^{(\alpha\zeta)}$ die concave und $S^{(\zeta\iota)}$ die convexe Seite zu.

b) 1. Im zweiten Falle werden stets die Punkte $S^{(\zeta\nu)}$ von dem im Büschel $\mathfrak{s}^\zeta = \mathfrak{s}^\infty_\varepsilon$ die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ durchlaufenden Strahl s^ζ mit demselben Halbstrahl getroffen als die Punkte $S^{(o\zeta)}$, da der andere Halbstrahl gleich Null ist (No. 25)

2. Jedesmal also wenn s_ε für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl, d. i. (No. 58a^2) wenn $\mathfrak{z}^\varepsilon$ auf einer der Geraden (z) für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt ist, liegen die Punkte $S^{(\zeta\nu)}$ und $S^{(o\zeta)}$ resp. auf verschiedener oder derselben Halbebene in Bezug auf s_ε und s_ζ.

3. Gemäss No. 55g liegen daher in Bezug auf jede der Geraden z_ζ oder [z_σ] die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ und $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben Halbebene, so dass, je nachdem z_ζ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ in den Büscheln ($\mathfrak{z}$) ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl ist, die Punkte $S^{(\zeta\iota)}$ von dem anderen oder demselben Halbstrahl (No. 56a) des die entsprechende Strahlenfolge durchlaufenden Strahles getroffen werden, als die Punkte $S^{(\alpha\zeta)}$, und nach No. 55d, e in Bezug auf jede der Geraden (z) die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ resp. auf der entgegengesetzten oder derselben Halbebene liegen, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$.

4. Wenn $\mathfrak{z}^\varrho$ in $\mathfrak{z}^\zeta$, dem unendlich entfernten Punkt von s_ε, angelangt, so gehören alle endlichen Punkte von s_ε dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ an (No. 15, 49c); sobald aber $\mathfrak{z}^\varrho$ auf dem Strahl s_ζ in die auf $\mathfrak{z}^\zeta$ folgende Lage übergeht in demselben oder dem entgegengesetzten Richtungssinne, so gehören alle Punkte von s_ζ dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ an; daher kehren allen Punkten $[\mathfrak{z}^\sigma]$ nach No. 52d^{234} stets beide Theile von $S^{(\alpha\iota)}$, sowohl $S^{(\alpha\zeta)}$, welcher die im Sinne Σ der s_ε vorhergehenden Lagen von s_ϱ, als $S^{(\zeta\iota)}$ welcher die im Sinne Σ auf s_ζ folgenden Lagen von s_ϱ enthält, die convexe Seite zu.

c) 1. Im dritten Falle muss nach No. 44a jedesmal wenn der Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ auf s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Punkt, das heisst, jedesmal wenn der Strahl z_ζ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher oder Rückkehr-Strahl (No. 57d) ist, s_ϱ in der Lage s_ε den Drehsinn Δ resp. beibehalten oder in den entgegengesetzten $\overline{\Delta}$ ändern und umgekehrt.*)

2. Jedesmal wenn die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ in Bezug auf eine der Geraden (z) auf derselben oder der entgegengesetzten Halbebene liegen, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, liegen die Punkte $S^{(o\zeta)}$ und $S^{(\zeta\nu)}$ in Bezug auf die unendlich

*) Die Frage, ob $\mathfrak{z}^\varrho$ auf s_ϱ in der Lage s_ζ den Richtungssinn beibehält oder ändert, scheint bei Untersuchung einer Form von $S^{(o\nu)}$, in welcher $s_\varepsilon = g_\infty$, mit der Frage zusammenzufallen, ob s_ϱ seinen Drehsinn in der Lage s_ε beibehält oder ändert. Wollen wir jedoch die Verschiedenheit der Formen, welche den Bedingungen in No. 58$c^{1,2}$ (No. 60a^4, b^4), sowie der Formen, welche No. 58$c^{3,4}$ (No. 60c^4, d^4) entsprechen, auf die Bewegung von $\mathfrak{z}^\varrho$ zurückführen, und was in den Fällen I und II (No. 59) evident und bewiesen ist (No. 50c, 60) auch für den Fall III annehmen (No. 25b, $a_\psi^\lambda = g_\infty$), nämlich

dass die Punkte $S^{(o\zeta)}$ und $S^{(\zeta\nu)}$ sich auf derselben Halbebene in Bezug auf s_ε oder s_ζ befinden müssen, wenn $\mathfrak{z}^\varrho$ auf der Geraden s_ϱ in der Lage s_ζ und s_ϱ im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ ihren Bewegungssinn entweder beide beibehalten oder beide ändern, und

dass die Punkte $S^{(\zeta o)}$ und $S^{(\zeta\nu)}$ sich auf entgegengesetzten Halbebenen in Bezug auf s_ε oder s befinden, also $\mathfrak{z}^\varrho$ die Gerade s_ζ überschreitet, wenn von den Elementen $\mathfrak{z}^\varrho$ auf der Geraden s_ϱ beim Durchgang durch die Lage s_ζ und s_ϱ im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ eines den Bewegungssinn beibehält, das andere aber ändert,

entfernte Gerade resp. auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten (das heisst: $\mathfrak{z}^{\varrho}$ überschreitet in der auf $\mathfrak{z}^{\zeta}$ folgenden Lage die Gerade g_∞).

3. Da stets der dem Punkt $\mathfrak{z}^{\varrho}$ in einem der Büschel $(\mathfrak{z})$ entsprechende Strahl in der Lage z_ζ den Drehsinn beibehält oder ändert, je nachdem s_ϱ seinen Drehsinn Δ in der Lage s_ε beibehält oder ändert, so müssen irgend einem der Punkte $(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{z}^{\chi}$ entweder beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ die concave oder beide die convexe Seite zukehren. Durch den Punkt $\mathfrak{z}^{\chi}$ geht entweder keine der Tangenten von $S^{(o\zeta)}$, dann liegt $\mathfrak{z}^{\chi}$ in dem Gebiet $\mathfrak{S}^{o}_{(o|\zeta)}$, denn das Gebiet $\mathfrak{S}^{o}_{(o-\zeta)}$ ist Null (No. $52c^2$); oder durch $\mathfrak{z}^{\chi}$ gehen zwei der Tangenten von $S^{(o\zeta)}$, dann gehört $\mathfrak{z}^{\chi}$ auf der s_δ oder s_ε zunächst liegenden dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ an (No. $50c^3$, $54a$); oder durch $\mathfrak{z}^{\chi}$ geht nur einer der Tangenten von $S^{(o\zeta)}$, dann gehört $\mathfrak{z}^{\chi}$ dem Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}$ derselben an, weil der ganze Halbstrahl $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{S}^{2}_{(o\varepsilon)}$ (No. $52b$) liegt; also gehört der beliebige Punkt $\mathfrak{z}^{\chi}$ entweder in Bezug auf alle Tangenten von $S^{(o\zeta)}$ oder wenigstens in Bezug auf die von s_α bis s_ε der Halbebene $\mathfrak{z}^{(\varrho-\infty)}_{(\varrho-\varrho)} = \mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ an. (Gleiches gilt bezüglich des Curvenstückes $S^{(\zeta\iota)}$ und jeden beliebiges Punktes $\mathfrak{z}$). Daher kehren beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ ihre concave Seite zu.

4. Jede Bestimmung, dass einer der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ einem der Punkte $(\mathfrak{z})$ oder $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ die concave oder convexe Seite zukehre, kann sich nur auf endliche Punkte $(\mathfrak{z})$ oder $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ beziehen und hat nur für solche Bedeutung, da die unendlich entfernten Punkte sowohl der Halbebene $\mathfrak{z}^{\varrho|\infty)}_{(\varrho|\varrho)}$ als $\mathfrak{z}^{(\varrho|\infty)}_{(\varrho-\varrho)}$ in Bezug auf jede Lage von s_ϱ angehören (vgl. No. $45f$, $52\ c^{3\,4}$).

d) Der in No. $59c^3$ bewiesene Satz ist nur ein specieller Fall von folgendem allgemeineren: Jedem Punkt $\mathfrak{z}$, welcher mit den Punkten $S^{(o\zeta)}$ in Bezug auf s_ε auf derselben Halbebene liegt, kehrt das

---

, so würde daraus folgen, dass $\mathfrak{z}^{\varrho}$ auf s_ϱ beim Durchgang durch die Lage s_ζ seinen Richtungssinn

beibehält, wenn $s_\varepsilon = g_\infty$ eine gewöhnliche, oder $s_\zeta = g_\infty$ eine einfache Rückkehrtangente ist, und

ändert, wenn $s_\varepsilon = g_\infty$ eine einfache Wende- oder Wende-Rückkehrtangente ist (vgl. No. $58c$ und 60).

Curvenstück $S^{(\alpha\zeta)}$ die concave Seite zu. Nach No. 52a^1 gehören nämlich, wenn s_ε eine endliche Gerade, alle Punkte $\mathfrak{z}$, welche mit den Punkten $S^{(o\zeta)}$ auf derselben Halbebene in Bezug auf s_ε liegen, der Halbebene $\mathfrak{z}^{(\zeta|\infty)}_{(\varepsilon|\varepsilon)}$ an, welche nach No. 52b, c, d die Gebiete $\mathfrak{S}^2_{(o\zeta)}$, $\mathfrak{S}^0_{(o;\zeta)}$, $\mathfrak{S}^1_{(o-\zeta)}$ enthält. Der angegebene Satz ist mithin die Folge von No. 52c^3, d^3, e. Ebenso folgt daraus, dass jedem Punkt $\mathfrak{z}$, welcher mit den Punkten $S^{(\zeta\nu)}$ in Bezug auf s_ε auf derselben Halbebene liegt, das Curvenstück $S^{(\zeta\iota)}$ seine concave Seite zukehrt, denn alle diese Punkte $\mathfrak{z}$ gehören der Halbebene $\mathfrak{z}^{(\zeta|\infty)}_{(\varepsilon|\varepsilon)}$ (bezogen auf den dem Sinne Σ in $S^{(\zeta\nu)}$ entsprechenden Richtungssinn von $\mathfrak{z}^\varrho$ und Drehsinn von s_ϱ) an, welche die Gebiete $\mathfrak{S}^2_{(\zeta\nu)}$, $\mathfrak{S}^0_{(\zeta|\nu)}$, $\mathfrak{S}^1_{(\zeta|\nu)}$ enthält. Die Sätze in No. 52 lassen sich leicht so weit ausdehnen, dass sie auch für den Fall $s_\varepsilon = g_\infty$ anwendbar sind. (No. 25).

In gleicher Weise ergiebt sich aus No. 52, dass jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$), welcher in Bezug auf s_ε auf der entgegengeseten Halbebene sich befindet als die Punkte $S^{(o\zeta)}$ oder $S^{(\zeta\nu)}$, das Curvenstück $S^{(\alpha\zeta)}$ resp. $S^{(\zeta\iota)}$ seine convexe Seite zukehrt. Daraus folgt: Wenn die beiden Theile $S^{(o\zeta)}$ und $S^{(\zeta\nu)}$ von $S^{(o\nu)}$ sich auf derselben Halbebene in Bezug auf s_ε befinden, dann kehren jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$) entweder beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ ihre concave oder beide ihre convexe Seite zu; wenn die Punkte $S^{(o\zeta)}$ und $S^{(\zeta\nu)}$ auf entgegengesetzten Halbenen in Bezug auf s_ε liegen, so kehrt jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$) einer der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, der andere die convexe Seite zu.

60. a) Wenn $\mathfrak{z}^\zeta$ ein gewöhnlicher Curvenpunkt, also s_ε eine gewöhnliche Tangente ist, so liegen in der Tangente s_ζ zwei Curvenpunkte, welche nicht zusammenfallen, sondern von einander verschieden sind, da z_ζ in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$) für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein gewöhnlicher Strahl; ebenso sind, da $\mathfrak{z}^\varepsilon$ auf jeder der Geraden (z) ein gewöhnlicher Punkt für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, die beiden sich in $\mathfrak{z}^\zeta$ schneidenden aufeinanderfolgenden Tangenten von $S^{(o\nu)}$ von einander verschieden. Also giebt es nur eine von s_ζ verschiedene Tangente s^ζ_σ nämlich s_ε, und nur einen von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschiedenen Curvenpunkt auf jeder der Tangenten s_ε und s_ζ,

nämlich resp. $\mathfrak{s}^\varepsilon$ und $\mathfrak{s}^\eta$; die in No. 56d^2, 58d angegebenen Fälle bieten keine Besonderheiten, da von jeder der Tangenten und jedem der Curvenpunkte von $S^{(o\,\nu)}$ das Gleiche gilt, als von s_ε resp. $\mathfrak{s}^\zeta$.

In dem auf jeder der Geraden $[z_0]$ der Tangente s_ε entsprechenden Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ fallen zwei aufeinanderfolgende Punkte der Punktenfolge $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\,\nu)}$, in dem in jedem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ dem Punkt $\mathfrak{s}^\zeta$ entsprechenden Strahl s_ζ zwei aufeinanderfolgende Strahlen der Strahlenfolge $z^\sigma_{(o\,\nu)}$ zusammen. (No. 16c, 50b^2, 51b^2). In den Punktenfolgen $\mathfrak{z}^{(\gamma\lambda)}$, $\mathfrak{s}_\zeta^{(o\nu)}$ jeder der Geraden (z) und von s_ζ, sowie in den Strahlenfolgen $z_{(\alpha\iota)}$, $s^\zeta_{(o\nu)}$ jedes der Büschel $(\mathfrak{z})$ und von $\mathfrak{s}^\zeta$ fallen ausser in den Grenzelementen $\mathfrak{z}^\gamma$, $\mathfrak{z}^\lambda$ resp. z_α, z_ι an keiner Stelle zwei aufeinanderfolgende Elemente in eines zusammen.

1. Im Falle I liegen in Bezug auf jede Gerade $z_\zeta = z_\sigma$ die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$; in Bezug auf jede der Geraden $s_\sigma^\zeta\,(s_\zeta)$ liegen mit Ausnahme der auf diesen selbst gelegenen die sämmtlichen Curvenpunkte $S^{(o\,\nu)}$ auf derselben Halbebene (No. 58c^1, 59a); die Elemente s_ϱ und $\mathfrak{s}^\varrho$ behalten daher in den Lagen s_ε resp. $\mathfrak{s}^\zeta$ den Drehsinn resp. Richtungssinn, der ihnen im Theil $S^{(o\,\zeta)}$ zugehört, auch für den Theil $S^{(\zeta\nu)}$ bei.

Da auch in jedem der Büschel $(\mathfrak{z})$ der entsprechende Strahl in der Lage z_ζ den Drehsinn nicht ändert, so kehrt nach No. 45f, 52$c^{3,4}$ das Curvenstück $S^{(\zeta\iota)}$ jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$, welchem $S^{(\alpha\zeta)}$ die concave oder convexe Seite zukehrt, auch seinerseits resp. die concave oder convexe Seite zu. In beiden Theilen $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ entspricht dem Sinne Σ derselbe Drehsinn Δ von s_ϱ; in jedem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ aber entspricht, da $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$ für die Strahlenfolge $z^\sigma_{(o\,\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, dem Sinne Σ von $\mathfrak{s}^\varrho$ in dem einen der Theile $z^\sigma_{(\alpha\zeta)}$, $z^\sigma_{(\zeta\iota)}$ der entgegengesetzte Drehsinn als in dem anderen; der eine der beiden Theile $S^{(\zeta\alpha)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ kehrt daher jedem der Punkte $[\mathfrak{z}^\sigma]$ die concave, der andere die convexe Seite zu (vgl. No. 50, 51, 52).

2. Im Falle II liegen in Bezug auf jede Gerade $z_\zeta = z_\sigma$ die $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$, in Bezug auf jede der Geraden (s_σ^ζ) aber mit Ausnahme der in diesen Geraden selbst liegenden Curvenpunkte die $S^{(\zeta\nu)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte

$S^{(o\zeta)}$, und in Bezug auf jede Gerade (z) die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 58 c^1, 59 b). Der Punkt $\mathfrak{z}^\varrho$ behält in der Lage $\mathfrak{z}^\zeta$ den Richtungssinn auf s_ϱ für das Curvenstück $S^{(\zeta\nu)}$ bei (No. 57 d), s_ϱ aber ändert seinen Drehsinn in der Lage s_ε in den entgegengesetzten $\bar{\Delta}$ (No. 44 d, 45 b). Da nun der dem Punkt $\mathfrak{z}^\varrho$ entsprechende Strahl in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$) in der Lage z_ζ den Drehsinn beibehält, in jedem der Büschel [$\mathfrak{z}^\sigma$) aber in der Lage $z^\sigma_\zeta = s_\zeta$ ändert, so kehrt jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$) stets einer der Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, der andere die convexe Seite zu; einem der Punkte [$\mathfrak{z}^\sigma$] aber kehren stets beide Theile die convexe Seite zu (No. 59 b^4).

3. Im Falle III behält die Gerade s_ϱ für den Theil $S^{(\zeta\nu)}$ den Drehsinn bei, den sie bei Beschreibung des Theiles $S^{(o\zeta)}$ im Sinne Σ hatte. (No. 58 c^1, 44 a, siehe die Anmerkung zu No. 59 c^1). Die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ liegen in Bezug auf jede der Geraden (z) auf derselben, in Bezug auf jede der Geraden [z_σ] auf der entgegengesetzten und in Bezug auf jede der Geraden s^ζ_σ (g_∞) auf derselben Halbebene, als die Punkte von $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 44 d, 45 b, c). Jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$) kehren beide Theile ihre concave Seite zu (No. 59 c^{34}).

b) Wenn $\mathfrak{z}^\zeta$ ein **einfacher Wendepunkt**, also s_ε eine **einfache Wendetangente**, so ist die Tangente s_ε im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl; es fällt daher die folgende Lage von s^ζ, d. i. der dem Punkt $\mathfrak{z}^\eta$ entsprechende Strahl mit s_ε, der mit $\mathfrak{z}^\varepsilon$ perspectivischen Lage nach No. 16 c zusammen, so dass in s_ε drei aufeinanderfolgende Curvenpunkte liegen*), von denen keine zwei zusammenfallen, weil sie mit in demselben Drehsinn aufeinanderfolgenden Strahlen in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$) perspectivisch sind; oder was dasselbe ist, die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten s_ε und s fallen zusammen; auch jeder der übrigen den Winkeln $s^\zeta_{(o\zeta)}$ und $s^\zeta_{(\zeta\nu)}$ gemeinschaftlichen Strahlen des Büschels $\mathfrak{z}^\zeta$ enthält ausser $\mathfrak{z}^\zeta$ einen Punkt von $S^{(o\zeta)}$ und einen von $S^{(\zeta\nu)}$, also drei Curvenpunkte von $S^{(o\nu)}$. Damit steht im Einklange, dass der der Tangente s_ε auf jeder der Geraden (z) entsprechende Punkt ein Rückkehrpunkt ist für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$, also zwei aufeinanderfolgende Punkte, welche zwei aufeinan-

*) *Cremona*, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Art.* 5, 28.

derfolgenden Lagen von s_ϱ entsprechen, vereinigt enthält. Ebenso fallen auf jeder der Geraden $[z_\sigma]$ in den der Tangente s_ε entsprechenden Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ zwei aufeinanderfolgende,

auf jeder der von s_δ und s_η verschiedenen Geraden (z), welche durch die Punkte $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{z}^\eta$ gehen (No. 56d^2), drei aufeinanderfolgende Punkte, entsprechend den Tangenten s_ε, s_ζ und resp. s_δ oder s_η (der Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ resp. gleich $\mathfrak{z}^\varepsilon$ oder $\mathfrak{z}^\eta$ erscheint als gewöhnlicher Punkt für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$),

auf jeder der Geraden s_δ und s_η nur zwei entsprechend den Tangenten s_ε, s_ζ ($\mathfrak{z}^\varepsilon$ resp. gleich $\mathfrak{z}^\varepsilon$ oder $\mathfrak{z}^\eta$ erscheint als Rückkehrpunkt für $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$) zusammen. In jedem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ fallen in den mit $\mathfrak{z}^\zeta$ perspectivischen Strahl s_ζ drei aufeinanderfolgende Strahlen, entsprechend den Punkten $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{z}^\zeta$, $\mathfrak{z}^\eta$,

in jedem der Büschel $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{z}^\eta$ (No. 58d^1) aber nur zwei, entsprechend den Punkten $\mathfrak{z}^\zeta$ und resp. $\mathfrak{z}^\eta$ oder $\mathfrak{z}^\varepsilon$ ($z^\sigma_\zeta = s_\zeta = s_\varepsilon$ erscheint als Rückkehrstrahl für $z^\sigma_{(o\nu)}$) zusammen.

Von s_ε oder s_ζ verschiedene Gerade s^ζ_σ sind nicht vorhanden.

In der Strahlenfolge $z_{(\alpha\iota)}$ jedes der Büschel $(\mathfrak{z})$ fallen ausser in den Strahlen z_α, z_ι nirgends zwei aufeinanderfolgende Strahlen zusammen.

1. Im Falle I liegen in Bezug auf jede der Geraden $z_\zeta = [z_\sigma]$, so wie in Bezug auf jede der Geraden (s^ζ_σ) die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten, in Bezug auf jede der Geraden (z) aber auf derselben Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 58c^2, 59a). s_ϱ ändert in der Lage s_ε den Drehsinn, $\mathfrak{z}^\varrho$ aber behält seinen Richtungssinn auf s_ϱ bei (No. 45b, 57d). Jedem der Punkte$(\mathfrak{z})$ und $[\mathfrak{z}^\sigma]$ kehrt einer der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, der andere die convexe Seite zu (No. 52c^4).

2. Im Falle II liegen in Bezug auf jede der Geraden (z) die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten, in Bezug auf jede der Geraden $[z_\sigma] = z_\zeta$ und in Bezug auf jede der Geraden (s^ζ_σ) auf derselben Halbebene als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 59b). Weder $\mathfrak{z}^\varrho$ noch s_ϱ ändern in der Lage $\mathfrak{z}^\zeta$ resp. s_ε den Richtungs- resp. Drehsinn (No. 57d, 45c). Irgend einem der Punkte $(\mathfrak{z})$ und $[\mathfrak{z}^\sigma]$ kehren daher entweder beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\iota\zeta)}$ die concave oder beide die convexe Seite zu (No. 52c^4).

3. Im Falle III behält s_ϱ seinen Drehsinn bei (No. 58c^2, 44a, siehe die Anmerkung zu No. 59c^1). In Bezug auf jede der Geraden (z) liegen die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 58c^2, 45c), also überschreitet der Punkt $\mathfrak{z}^\varrho$ in den auf $\mathfrak{z}^\zeta$ folgenden Lagen die unendlich entfernte Gerade $g_\infty = s_\varepsilon = s_\zeta$; in Bezug auf jede der Geraden $[z_\sigma] = z_\zeta$ liegen jedoch die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ und $S^{(\gamma\zeta)}$ auf derselben Halbebene (No. 44d, 45b). Jedem der Punkte ($\mathfrak{z}$) kehren daher beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ die concave Seite zu (No. 52c^4, 59c^{34}).

c) Wenn $\mathfrak{z}^\zeta$ ein einfacher Rückkehrpunkt, also s_ζ eine einfache Rückkehrtangente, so ist der Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\nu}$ auf s_ζ ein Rückkehrpunkt; es fällt daher die folgende Lage von $\mathfrak{z}_\zeta$, d. i. der Punkt $\mathfrak{z}^\eta$, in welchem s_ζ von der folgenden Tangente s_η geschnitten wird, mit $\mathfrak{z}^\zeta$ zusammen, so dass in $\mathfrak{z}^\zeta$ sich drei aufeinanderfolgende Tangenten s_ε, s_ζ, s_η von $S^{(o\nu)}$ schneiden *), von denen keine zwei zusammenfallen, weil mit ihnen auf jeder Geraden z drei in demselben Richtungssinne aufeinanderfolgende Punkte perspectivisch liegen; auch durch jeden der übrigen den Strecken $\mathfrak{z}_\zeta^{(o\zeta)}$ und $\mathfrak{z}_\zeta^{(\zeta\nu)}$ auf s_ζ gemeinschaftlichen Punkte gehen ausser s_ζ eine der Tangenten von $S^{(o\zeta)}$ und eine von $S^{(\zeta\nu)}$, also drei der Tangenten von $S^{(o\nu)}$. Damit steht im Einklange, dass der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$) entsprechende Strahl für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl ist, also zwei aufeinanderfolgende Strahlen, welche zwei aufeinanderfolgenden Lagen von $\mathfrak{z}^\varrho$ entsprechen, enthält.

In jedem der Strahlbüschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ fallen in den dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechenden Strahl $z_\zeta^\sigma = s_\zeta$ zwei aufeinanderfolgende,

in jedem der Büschel ($\mathfrak{z}$), deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{z}^\varepsilon$ und $\mathfrak{z}^\vartheta$ verschiedenen Punkte der Geraden s_ε und s_η sind (No. 56d^2), drei aufeinanderfolgende Strahlen, entsprechend den Punkten $\mathfrak{z}^\zeta$, $\mathfrak{z}^\eta$ und resp. $\mathfrak{z}^\varepsilon$ oder $\mathfrak{z}^\vartheta$ (der Strahl z_ζ resp. gleich s_ε oder s_η erscheint als gewöhnlicher Strahl für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$),

---

*) *Cremona*, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* Art. 5, 30.

in jedem der Büschel $\mathfrak{z}^{\varepsilon}$, $\mathfrak{z}^{\vartheta}$ aber nur zwei entsprechend den Punkten $\mathfrak{z}^{\zeta}$ und $\mathfrak{z}^{\eta}$ (z_{ζ} resp. gleich s_{ε} oder s_{η} erscheint als Rückkehrstrahl für $z_{(o\nu)}$) zusammen.

In den der Tangente s_{ε} auf jeder der Geraden $[z_{\sigma}]$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{z}^{\zeta}$ fallen drei aufeinanderfolgende Punkte der Punktenfolge $z_{\sigma}^{(o\nu)}$, entsprechend den Tangenten s_{ε}, s_{ζ}, s_{η} zusammen,

auf jeder der Geraden s_{ε}, s_{η} nur zwei entsprechend den Tangenten s_{ζ} und resp. s_{η} oder s_{ε} ($\mathfrak{z}_{\sigma}^{\varepsilon} = \mathfrak{z}_{\zeta}$ erscheint als Rückkehrpunkt für $z_{\sigma}^{(o\nu)}$, No. 58*d*).

Von $\mathfrak{z}^{\zeta}$ verschiedene Curvenpunkte $\mathfrak{z}_{\zeta}^{\sigma}$ sind nicht vorhanden (No. 58*d*). In der Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(\gamma\lambda)}$ jeder der Geraden (z) fallen ausser in $\mathfrak{z}^{\gamma}$, $\mathfrak{z}^{\lambda}$ nirgend zwei aufeinanderfolgende Punkte in einen zusammen.

1. Im Falle I liegen in Bezug auf jede der Geraden $[z_{\sigma}] = z_{\zeta}$ die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf derselben und in Bezug auf jede der Geraden (z) ebenfalls auf derselben Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 59*a*). $\mathfrak{z}^{\varrho}$ ändert in der Lage $\mathfrak{z}^{\zeta}$ auf der Geraden s_{ϱ} den Richtungssinn, s_{ϱ} behält seinen Drehsinn bei. In Bezug auf jede der Geraden (s_{σ}^{ζ}), die in diesen befindlichen Curvenpunkte ausgenommen, liegen also nach No. 44*e* die Punkte $S^{(\zeta\nu)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte $S^{(o\zeta)}$. Jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ kehrt daher der eine der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, der andere die convexe Seite zu (No. 52c^4, 59*d*); irgend einem der Punkte $[\mathfrak{z}^{\sigma}]$ aber kehren entweder beide dieser Theile die concave oder beide die convexe Seite zu, jedem Punkt des Halbstrahles der Tangenten (s_{σ}^{ζ}), welcher die Schnittpunkte mit den anderen Tangenten enthält, die convexe, jedem Punkt des anderen Halbstrahles die concave Seite (vergl. No. 59a^4).

2. Im Falle II liegen die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene in Bezug auf jede der Geraden (s_{σ}^{ζ}) und auf derselben Halbebene in Bezug auf jede der Geraden $[z_{\sigma}]$, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$ (No. 59$b^{2,3}$) $\mathfrak{z}^{\varrho}$ ändert den Richtungssinn auf s_{ϱ}, s_{ϱ} aber behält seinen Drehsinn Δ bei (No. 58c^3, 44*d*, 45*c*). Daher liegen auch in Bezug auf jede der Geraden (z) die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ und $S^{(\gamma\zeta)}$ auf derselben Halbebene. Jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ kehrt daher einer der beiden Theile $S^{(\alpha\zeta)}$, $S^{(\zeta\iota)}$ die concave, der

andere die convexe, irgend einem der Punkte $[\mathfrak{z}^\sigma]$ aber kehren beide Theile die convexe Seite zu (No. $52 c^4$, $59 b^4$, $59 d$).

3. Im Falle III ändert s_ϱ den Drehsinn in den entgegengesetzten $\varDelta$ (siehe die Anmerkung zu No. $59 c^1$). In Bezug auf jede der Geraden (z) und $[z_\sigma]$ liegen die Punkte $S^{(\zeta\lambda)}$ auf der entgegengesetzten Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\zeta)}$; der Punkt $\mathfrak{z}^\varrho$ überschreitet daher in den auf $\mathfrak{z}^\zeta$ folgenden Lagen die Gerade g_∞. Jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ kehren beide Theile $S^{(\alpha\zeta)}$ und $S^{(\zeta\iota)}$ die concave Seite zu (No. $52 c^4$, $59 c^{34}$).

d) Wenn $\mathfrak{z}^\zeta$ ein Wenderückkehrpunkt, also s_ε eine Wenderückkehrtangente, so ist s_ε im Büschel $\mathfrak{z}^\zeta$ für die Strahlenfolge $s^\zeta_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl und $\mathfrak{z}^\zeta$ auf der Geraden s_ζ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}_\zeta$ ein Rückkehrpunkt; es sind deshalb in s_ε die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten s_ε und s_ζ und in $\mathfrak{z}^\zeta$ die beiden aufeinanderfolgenden Punkte $\mathfrak{z}^\zeta$ und $\mathfrak{z}^\eta$ vereinigt. Die Tangente $s_\varepsilon = s_\zeta$ enthält daher drei aufeinanderfolgende Curvenpunkte $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{z}^\zeta$, $\mathfrak{z}^\eta$, darunter einen $\mathfrak{z}^\varepsilon$, welcher von $\mathfrak{z}^\zeta$ verschieden ist, und durch $\mathfrak{z}^\zeta = \mathfrak{z}^\eta$ gehen drei aufeinanderfolgende Tangenten s_ε, s_ζ, s_η, darunter eine s_η, welche von s_ε und s_ζ verschieden ist (No. $56 d^2$, $58 d$). Daher ist der dem Punkt $\mathfrak{z}^\zeta$ entsprechende Strahl

im Büschel $\mathfrak{z}^\vartheta$ und von den übrigen Büscheln $(\mathfrak{z})$ auf allen, deren Mittelpunkte ausserhalb s_η liegen, für die Strahlenfolge $z_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, zwei aufeinanderfolgende Strahlen enthaltend,

in jedem der Büschel $(\mathfrak{z})$, deren Mittelpunkte die von $\mathfrak{z}^\eta$ und $\mathfrak{z}^\vartheta$ verschiedenen Punkte von s_η sind, ein gewöhnlicher Strahl, drei aufeinanderfolgende Strahlen enthaltend, welche den Punkten $\mathfrak{z}^\zeta$, $\mathfrak{z}^\eta$, $\mathfrak{z}^\vartheta$ entsprechen,

in jedem der Büschel $[\mathfrak{z}^\sigma]$ für die Strahlenfolge $z^\sigma_{(o\nu)}$ ein Rückkehrstrahl, drei aufeinanderfolgende Strahlen enthaltend, welche den Punkten $\mathfrak{z}^\varepsilon$, $\mathfrak{z}^\zeta$, $\mathfrak{z}^\eta$ entsprechen, im Büschel $\mathfrak{z}^\varepsilon$ ein gewöhnlicher Strahl, zwei aufeinanderfolgende Strahlen enthaltend, welche den Punkten $\mathfrak{z}^\zeta$ und $\mathfrak{z}^\eta$ entsprechen. Der der Tangente s_ε entsprechende Punkt ist

auf der Geraden s_δ und von den übrigen Geraden (z) auf allen, welche nicht durch $\mathfrak{z}^\varepsilon$ gehen, für die Punktenfolge $\mathfrak{z}^{(o\nu)}$ ein Rückkehrpunkt, zwei aufeinanderfolgende Punkte enthaltend,

auf allen von s_δ verschiedenen Geraden (z), welche durch den Punkt $\mathfrak{z}^\varepsilon$ gehen, ein gewöhnlicher Punkt, drei aufeinanderfolgende enthaltend, welche den Tangenten s_δ, s_ε, s_ζ entsprechen,

auf allen Geraden $[z_\sigma]$ für die Punktenfolge $\mathfrak{z}_\sigma^{(o\,\nu)}$ ein Rückkehrpunkt, drei aufeinanderfolgende enthaltend, welche den Tangenten s_ε, s_ζ, s_η entsprechen,

auf der Geraden s_η ein gewöhnlicher Punkt, zwei aufeinanderfolgende enthaltend, welche den Tangenten $s_\varepsilon = s_\zeta$ entsprechen.

In jedem der Fälle I, II, III liegen in Bezug auf jede der Geraden (z), $[z_\sigma]$, (s_σ^ζ) die Punkte $S^{(\zeta\,\lambda)}$ auf derselben Halbebene, als die Punkte $S^{(\gamma\,\zeta)}$ (No. 58c^4, 59); in jedem der drei Fälle ändern sowohl s_ϱ als $\mathfrak{z}^\varrho$ auf s^ϱ ihren Dreh- resp. Richtungssinn. Demnach kehrt jedesmal jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ und $[\mathfrak{z}^\sigma]$, welchem einer der beiden Theile $S^{(\alpha\,\zeta)}$, $S^{(\zeta\,\iota)}$ seine concave oder convexe Seite zukehrt, auch der andere resp. seine concave oder convexe Seite zu; und zwar kehren $S^{(\alpha\,\zeta)}$ und $S^{(\iota\,\zeta)}$

im Falle III jedem der Punkte $(\mathfrak{z})$ die concave Seite,

im Falle II jedem der Punkte $[\mathfrak{z}^\sigma]$ die convexe,

im Falle I jedem der $[\mathfrak{z}^\sigma]$, welcher auf dem Halbstrahl von s_ζ liegt, welcher die Schnittpunkte mit den übrigen Tangenten enthält, die convexe, jedem Punkt $\mathfrak{z}^\sigma$, welcher dem anderen Halbstrahl angehört, die concave Seite zu; ferner jedem der mit $S^{(o\,\nu)}$ auf derselben Halbebene in Bezug auf s_ζ liegenden Punkt $(\mathfrak{z})$ die concave, jedem der auf der anderen Halbebene liegenden Punkte $(\mathfrak{z})$ die convexe Seite. (Letzteres gilt auch für den Fall II, No. 59*d*).

61. *a*) Wegen der in No. 46*a* angegebenen Bedingung lässt sich die Untersuchung nach der Beschaffenheit einer ebenen stetigen, nicht gebrochenen Curve in irgend einem ihrer Elemente und die Beurtheilung, ob das mit irgend einem Curvenelement in irgend einem der Strahlbüschel resp. einer der geraden Punktreihen der Ebene perspectivische Element für die den sämmtlichen Curvenelementen perspectivische Strahlen- resp. Punktenfolge ein gewöhnliches oder Rückkehrelement ist, auf die hier durchgeführte Untersuchung zurückführen. Jedem Curvenelement $\mathfrak{z}^\zeta$ resp. s_θ, in welchem eines der laufenden Elemente $\mathfrak{z}^\varrho$ und s_ϱ oder beide den Bewegungssinn ändern, geht ein Curvenstück $S^{(o\,\zeta)}$ vorher und folgt ein

Curvenstück $S^{(\zeta\nu)}$, welche den Bedingungen in No. 49*a* in der in No. 54*a* geforderten Weise genügen; jedes dieser Curvenstücke besteht einschliesslich der Elemente $\mathfrak{s}^\zeta$, s_ε mindestens aus drei aufeinanderfolgenden Elementen (drei Punkten und drei Geraden). Curvenstücke aber, welche den in No. 49*a* gestellten Bedingungen genügen, sind in No. 49 bis 53 behandelt worden (vergl. No. 58c^1).

b) Zugleich erkennen wir, dass die Antwort auf die Frage, ob das mit einem Curvenelement $\mathfrak{s}^\zeta$ oder s_ε in einem der Strahlbüschel resp. einer Geraden der Ebene perspectivische Element für die den sämmtlichen Curvenelementen perspectivische Strahlen-, resp. Punktenfolge ein gewöhnliches oder Rückkehrelement ist, nicht blos davon abhängt, ob die laufenden Elemente $\mathfrak{s}^\varrho$, s_ϱ in der Lage $\mathfrak{s}^\zeta$ resp. s_ε ihren Bewegungssinn P oder Δ ändern oder nicht, sondern auch von der Lage der Elemente $\mathfrak{s}^\zeta$ und s_ε, dass daher die Sätze in No. 201 der „Geometrie der Lage von v. Staudt", wie sie lediglich der Anschauung entnommen sind, auch nur für endliche Curvenelemente gelten. Eine allgemeine, alle Fälle umfassende Beantwortung obiger Frage konnte nur dadurch erzielt werden, dass wir, wie es in den vorhergehenden Paragraphen geschehen, den umgekehrten Weg einschlugen und aus der Beschaffenheit und Bedeutung der mit $\mathfrak{s}^\varrho$ und s_ϱ in den Strahlbüscheln und geraden Punktreihen der Ebene perspectivischen Elemente für die der Curve entsprechende Elementenfolge die Beschaffenheit von $\mathfrak{s}^\varrho$ und s_ϱ in irgend einer Lage in der Hinsicht, ob sie den Bewegungssinn ändern oder nicht, und die Bedeutung des einen oder des anderen für die Gestaltung der Curve in diesem Punkte abzuleiten versuchten.

Auf der beigefügten Figurentafel sind die verschiedenen Formen, welche das Curvenstück $S^{(o\zeta\nu)}$ haben kann und wie sie sich aus der Beschreibung in No. 60 ergeben, aufgezeichnet; den daselbst in No. 60a^1, a^2, a^3, b^1 etc. beschriebenen Fällen entsprechen resp. die Figuren a^1, a^2, a^3, b^1 etc.

XI.

Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung.

Von

Dr. Lüroth,

Docent an der Universität Heidelberg.

Bei Gelegenheit von Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes wurde ich auf eine Lücke aufmerksam, welche unsere ausgezeichnetsten Lehrbücher über diesen Gegenstand, wie die Werke der Herren Hesse und Salmon zeigen. Dieser Mangel betrifft die Eigenschaften der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung und ihren Zusammenhang mit den algebraischen Eigenschaften der Gleichung vierten Grades von der die Kegel abhängen, welche in dem durch jene Raumcurve bestimmten Flächenbüschel auftreten. Ich habe versucht, diese Lücke auf die unten angegebene Weise zu ergänzen. Es handelt sich hierbei wesentlich um die geometrische Bedeutung des Verschwindens von simultanen Invarianten, die zugleich auf eine eigentliche und eine uneigentliche Fläche zweiter Ordnung (Kegel, Ebenenpaar) sich beziehen. Ich habe zunächst diese Interpretation vorgenommen für zwei allgemeine Flächen zweiter Ordnung, weil die Methode ganz die gleiche ist, und weil in den oben angeführten Werken zwar gezeigt ist, dass jene Invarianten verschwinden, wenn gewisse geometrische Eigenschaften Statt haben, aber der Nachweis fehlt, das auch das Umgekehrte richtig ist.

§. 1.

Die Singularitäten der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung A und B, deren Gleichungen in homogenen Punktcoordinaten wir schreiben wollen

$$A \equiv \Sigma a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$
$$B \equiv \Sigma b_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$

hängen ab von dem Verhalten der Wurzeln einer Gleichung vierten Grades in λ, welche erhalten wird, wenn man die Hesse'sche Determinante H von $A+\lambda B$ gleich Null setzt. Schreibt man diese Gleichung

$$H \equiv \Delta + 4\Theta\lambda + 6\Phi\lambda^2 + 4\Theta'\lambda^3 + \Delta'\lambda^4 = 0,$$

so sind, wie bekannt, Δ, Θ, Φ, Θ', Δ' Invarianten und zwar mit Ausnahme der ersten und letzten simultane Invarianten beider Flächen.

Wir untersuchen jetzt die geometrische Bedeutung des Verschwindens dieser Invarianten. $\Delta=0$ und $\Delta'=0$ stellen, wie bekannt, die Bedingungen dar dafür, dass die Flächen A und B Kegel sind.

Um die Bedeutung der übrigen zu erkennen, benutzen wir ein Polartetraeder der Fläche A. Wir bemerken zu dem Zwecke, dass sich, wie auch die Fläche A beschaffen sein mag, stets vier nicht in einer Ebene liegende Punkte angeben lassen, von denen jeder der harmonische Pol der andern ist. Bezeichnen wir solche vier Punkte mit x, y, z, w und multipliciren H zweimal mit der Determinante

$$D = \Sigma \pm x_1 y_2 z_3 w_4,$$

die nach dem eben Bemerkten nicht verschwindet, so erhalten wir mit Rücksicht auf die zwischen den Coordinaten der vier Punkte bestehenden Gleichungen und indem wir abkürzende Bezeichnungen wie

$$\Sigma b_{ik}\, x_i y_k = b(xy)$$

einführen:

$$D^2 H = \begin{vmatrix} a(xx)+\lambda b(xx) & \lambda b(xy) & \lambda b(xz) & \lambda b(xw) \\ \lambda b(yx) & a(yy)+\lambda b(yy) & \lambda b(yz) & \lambda b(yw) \\ \lambda b(zx) & \lambda b(zy) & a(zz)+\lambda b(zz) & \lambda b(zw) \\ \lambda b(wx) & \lambda b(wy) & \lambda b(wz) & a(ww)+\lambda b(ww) \end{vmatrix}.$$

Aus dieser in λ identischen Gleichung folgen die Ausdrücke für $4\Theta D^2$, $6\Phi D^2$, $4\Theta' D^2$. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Determinante

$$\begin{vmatrix} b(xx) & b(xy) \\ b(yx) & b(yy) \end{vmatrix} \text{ mit } B(xy)$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} b(xx) & b(xy) & b(xz) \\ b(yx) & b(yy) & b(yz) \\ b(zx) & b(zy) & b(zz) \end{vmatrix} \text{ mit } B(xyz)$$

und führen für analoge Ausdrücke ähnliche Bezeichnungen ein, so finden wir

$$4\Theta D^2 = a(xx)\,a(yy)\,a(zz)\,a(ww)\left\{\frac{b(xx)}{a(xx)}+\frac{b(yy)}{a(yy)}+\frac{b(zz)}{a(zz)}+\frac{b(ww)}{a(ww)}\right\},$$

$$6\Phi . D^2 = a(xx)\,a(yy)\,B(zw) + a(xx)\,a(zz)\,B(yw) + a(xx)\,a(ww)\,B(yz)$$
$$+ a(yy)\,a(zz)\,B(xw) + a(yy)\,a(ww)\,B(xz) + a(zz)\,a(ww)\,B(xy)$$

$$4\Theta' D^2 = a(xx)\,B(yzw) + a(yy)\,B(xzw) + a(zz)\,B(xyw) + a(ww)\,B(xyz)$$

$B(xy)=0$ ist, wie man sofort sieht, die Bedingung, dass die Linie xy die Fläche B berührt und in ähnlicher Weise sagt $B(xyz)=0$ aus, dass die Ebene der drei Punkte xyz Tangentenebene der Fläche B ist.

§. 2.

Wir nehmen nun zuerst an, A sei eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung. Man kann dann, wie man geometrisch leicht einsieht, unendlich viele Polartetraeder von A so construiren, dass drei ihrer Ecken auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung B liegen. Sind dies etwa die Ecken xyz, so reducirt sich $\Theta = 0$ auf

$$b(ww) = 0$$

und sagt also aus, dass auch die durch jene drei bestimmte vierte Ecke auf B liegen muss.

> $\Theta = 0$ ist also nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Polartetraeder von A existiren, deren Ecken auf B liegen.

Θ' verschwindet, wenn es ein Polartetraeder von A giebt, dessen Seiten die Fläche B berühren. Da nun stets solche construirt werden können, die drei Tangentenebenen von B zu Seiten haben, so erkennt man wie vorhin, dass,

> wenn die Seiten eines Polartetraeders von A die Fläche B berühren sollen, es nothwendig und hinreichend ist, wenn Θ' verschwindet.

Was nun endlich Φ betrifft, so verschwindet es, wenn man ein Polartetraeder von A angeben kann, dessen Kanten B berühren. Es lässt sich nun stets ein Polartetraeder so construiren, dass fünf seiner Kanten Tangenten von B sind. Man kann dies folgendermassen zeigen. Nehmen wir irgend einen Punkt a an und schneiden mit seiner Polarebene in Bezug auf A die Flächen B, A und den von a an B gelegten Tangentenkegel. Die Schnittcurven mögen sein resp. B', A', B''. Wenn wir nun in besagter Ebene ein Polardreieck von A' beschreiben können, dessen Ecken in B'' liegen und von dem zwei Seiten Tangenten von B' sind, so berühren ausser diesen offenbar auch noch die Verbindungslinien von a mit den Ecken des Dreiecks die Fläche B und somit in der That fünf Kanten eines Polartetraeders. Man schliesst dann wie früher, dass

> die Existenz eines Polartetraeders von A, dessen Kanten B berühren, durch die Gleichung $\Phi = 0$ bedingt ist.

Die Forderung, ein Polartetraeder zu beschreiben, von dem fünf Kanten die Fläche B berühren, zieht zwei Bedingungen nach sich: erstens die, dass B'' ein Polardreieck von A' eingeschrieben werden kann und zweitens, dass ein Polardreieck möglich ist, das mit zwei Seiten B' berührt, während zwei seiner Ecken auf B'' liegen. Der Ort des Punktes a ist also eine Curve. Wenn die Bedingung $\Phi = 0$ erfüllt ist, so wird diese Curve beschrieben von den Ecken der Polartetraeder, welche obigem Satze gemäss construirt sind; ich behalte mir die Untersuchung dieser Curve auf eine andere Gelegenheit vor.

§. 3.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass die Fläche A ein Kegel ist. Es muss dann die Spitze des Kegels ein Eckpunkt des Polartetraeders sein und die drei andern sind nicht mehr vollständig bestimmt, sondern nur die geraden Linien, auf welchen sie beliebig angenommen werden können, so dass das Polartetraeder zu einem Polartrieder wird.

Legen wir die Ecke w in die Spitze des Kegels, so ist $a(ww)=0$ und die Gleichung $\Theta=0$ reducirt sich dann auf $b(ww)=0$, d.h. $\Theta=0$ zeigt an, dass die Spitze des Kegels auf B liegt.

Die Gleichungen $\Phi=0$ und $\Theta'=0$ sind ähnlich wie im vorigen Paragraphen die Bedingungen dafür, dass resp. die Kanten und Seiten eines Polartrieders von A die Fläche B berühren. Wenn die beiden Bedingungen $\Phi=0$ und $\Theta'=0$ zusammen bestehen, so giebt es Polartrieder, welche dem Tangentenkegel, den man von der Kegelspitze an B legen kann, eingeschrieben und andere, welche ihm umschrieben werden können.

Verschwinden aber Θ und Φ zu gleicher Zeit, so ziehe man durch die Spitze des Kegels A, die ja dann auf B liegt, eine Tangente an diese Fläche und nehme in dieser einen der Punkte xyz, etwa z an. Dann liefert $\Phi=0$ die Gleichung

$$a(yy)\,b(wx)^2+a(xx)\,b(wy)^2=0,$$

oder

$$\sqrt{a(yy)}\,b(wx)\pm i\sqrt{a(xx)}\,.\,b(wy)=0,$$

die aussagt, dass eine der Linien, die man von w nach den beiden Punkten $x\sqrt{a(yy)}\pm iy\sqrt{a(xx)}$ ziehen kann, Tangente an B ist. In diesen beiden Linien wird aber der Kegel A berührt von den Tangentenebenen, die durch die Linie wz zu legen sind, wie man leicht erkennt. Es fällt also eine dieser beiden Ebenen zusammen mit der Tangentenebene von B im Punkte w. Daher der Satz: Wenn mit Θ zugleich Φ verschwindet, so ist die Spitze von A ein Punkt von B. Der Kegel berührt in diesem Punkte die Fläche B, d.h. er wird von ihrer Tangentenebene in zwei zusammenfallenden Linien geschnitten. Θ und Θ' verschwinden gleichzeitig, wenn die Spitze des Kegels auf B liegt und die Seiten eines Polartrieders die Fläche berühren. Da nun alle Ebenen, welche durch einen Punkt einer Fläche gehen und diese berühren, sich in den beiden von dem Punkte ausgehenden Geraden der Fläche schneiden, so verschwindet Θ' wenn die Triederseiten durch diese Geraden gehen. Aber auch die Umkehrung ist richtig. Denn man kann zwei Ebenen, von welchen jede durch eine der genannten Geraden geht und von denen die eine die Polare der andern enthält, als zwei Seiten des Polartrieders betrachten. Die dritte Seite ist dadurch bestimmt und berührt, wie $\Theta'=0$ dann zeigt, ebenfalls die Fläche, d. h. geht durch eine der Geraden.

Wenn Θ, Φ und Θ' zusammen verschwinden, so liegt die Spitze des Kegels auf B. Nehmen wir die eine der durch sie gehenden Geraden von B

zur Schnittlinie zweier der Triederseiten, so sagt $\Theta'=0$ aus, dass die dritte durch die andere Gerade der Fläche geht und $\Phi=0$, dass sie den Kegel in zwei Linien schneidet, von welchen die eine in der Tangentenebene der Fläche B liegt, was zusammengefasst den Satz ergiebt: das Verschwinden von Θ, Φ und Θ' ist die Bedingung dafür, dass der Kegel seine Spitze auf der Fläche B hat, sie in diesem Punkte berührt und in einer geraden Linie schneidet.

§. 4.

Nimmt man für A ein Ebenenpaar und zwei der Punkte $xyzw$, etwa z und w auf der Schnittlinie der beiden Ebenen, so verschwindet Δ und Θ, Φ reducirt sich auf $a(xx)\,a(yy)\,B(zw)$, so dass $\Phi=0$ aussagt, dass die Schnittlinie des Ebenenpaares die Fläche B berührt. Θ' besteht dann nur noch aus zwei Gliedern. Nimmt man nun für die Ebene yzw eine Tangentenebene von B, so liefert $\Theta'=0$ die Gleichung $B(xzw)=0$, d. h. Θ' verschwindet, wenn die beiden Ebenen harmonische Polarebenen der Fläche B sind.

Wenn nun mit Θ' zugleich $\Phi=0$ ist, so kann man zunächst bemerken, dass wegen der letzteren Bedingung der Ausdruck

$$B(xzw) = -\left\{b(xz)\sqrt{b(ww)} - b(xw)\sqrt{b(zz)}\right\}^2$$

ist. Hiermit erhellt sofort, dass aus $\Theta'=0$ folgt

$$B\left[y\sqrt{a(xx)} \pm ix\sqrt{a(yy)},\ zw\right]=0,$$

welche Gleichung aussagt, dass eine der beiden Ebenen des Paares die Fläche B berührt. $\Theta'=0$ und $\Phi=0$ zeigt also an, dass eine der Ebenen des Paares zwei Gerade von B enthält, durch deren Schnittpunkt die andere Ebene hindurchgeht.

Wenn nun endlich die Fläche A in zwei zusammenfallende Ebenen ausgeartet ist, so kann man die drei Punkte yzw auf dieser Ebene und x ganz beliebig ausserhalb annehmen; es verschwinden dann Δ, Θ, Φ von selbst und Θ' wird $=a(xx)\,B(yzw)$. $\Theta'=0$ ist also die Bedingung, dass die doppelt zu rechnende Ebene, in welche A ausgeartet ist, die Fläche B berührt.

§. 5.

Alle die bis jetzt erlangten Resultate bezogen sich auf den Fall, dass die Fläche B eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung war. Wir müssen jetzt noch den Fall ins Auge fassen, dass B selbst eine uneigentliche Fläche zweiter Ordnung ist.

Es möge zunächst B ein Kegel sein, dann verschwindet Δ'. Ist nun A gleichfalls ein Kegel, so verschwindet auch Δ und es bleiben nur noch die Invarianten Φ, Θ und Θ' zu untersuchen.

Die Gleichungen $\Theta=0$ und $\Phi=0$ haben die nämlichen Bedeutungen, die wir im §. 4 für sie gefunden haben: die erste sagt aus, dass die Spitze

des Kegels A auf B liegt, und die zweite, dass man Polartrieder des Kegels A construiren kann, deren Kanten B berühren und umgekehrt. Die Invariante Θ' hat in Bezug auf die Flächen B, A dieselbe Bedeutung, die Θ in Bezug auf die Flächen A, B hat; diese entsteht aus jener durch Vertauschung der a mit den b; $\Theta'=0$ ist somit die Bedingung dafür, dass die Spitze des Kegels B auf A liegt.

Das Zusammenbestehen der Gleichungen $\Theta=0$ und $\Phi=0$ zeigt, wie im §. 4, an, dass die Spitze des Kegels A auf B liegt, und dass dieser letztere Kegel vom ersteren berührt wird, während dem gleichzeitigen Verschwinden von Θ' und Φ der umgekehrte Fall entspricht.

Da beim Verschwinden von Θ und Θ' jeder der Kegel durch die Spitze des anderen geht, so ist dies auch die Bedingung, dass sie eine gerade Linie gemein haben. Wenn dagegen die drei Gleichungen $\Theta=0$, $\Phi=0$, $\Theta'=0$ zusammenbestehen, so haben die beiden Kegel eine Erzeugende gemein und berühren sich längs derselben.

Ist B ein Kegel, A ein Ebenenpaar, so sind die Invarianten Δ, Δ' und Θ identisch Null. Die Bedeutung von Θ' wird nicht geändert und $\Theta'=0$ zeigt also an, dass die Spitze des Kegels auf einer der Ebenen des Paares liegt. Auch $\Phi=0$ bedeutet, seiner früheren Interpretation conform, dass die Schnittlinie der beiden Ebenen den Kegel berührt.

Das Zusammenbestehen der Gleichungen $\Theta'=0$, $\Phi=0$ bedingt somit, dass die eine Ebene des Paares den Kegel berührt.

Degenerirt endlich A in eine doppelt zu rechnende Ebene, so verschwindet auch noch Φ identisch, und die einzig übrigbleibende Invariante Θ' zeigt durch ihr Verschwinden an, dass die Spitze des Kegels auf dieser Ebene liegt.

§. 6.

Ist B ein Ebenenpaar, so sind die Bedingungen $\Delta'=0$ und $\Theta'=0$ an und für sich erfüllt. Wenn nun auch A ein Ebenenpaar ist, so bleibt nur noch die Invariante Φ als simultane übrig. Wenn auch diese Invariante noch verschwindet, so schneiden sich die Schnittlinien der beiden Ebenenpaare, d. h. die vier Ebenen beider Paare gehen durch einen Punkt.

Andere als die jetzt absolvirten Fälle brauchen wir nicht zu untersuchen, weil entweder sie sich aus diesen durch Vertauschung der Flächen A und B ergeben oder sämmtliche Invarianten verschwinden.

§. 7.

Wir wollen jetzt die Invarianten bilden für die beiden Flächen $A+\mu B$ und B. Indem wir die Zeichen Δ, Θ, Φ, Θ', Δ' in der nämlichen Bedeutung wie bisher anwenden, wollen wir die neuen Invarianten bezeichnen $\Delta_{A+\mu B}$, $\Theta_{A+\mu B,\, B}$ u. s. w. Wir finden so

$$\varDelta_{A+\mu B} = \varDelta + 4\Theta\mu + 6\Phi\mu^2 + 4\Theta'\mu^3 + \varDelta'\mu^4 = H(\mu)$$

$$\Theta_{A+\mu B,\,B} = \Theta + 3\mu\Phi + 3\mu^2\Theta' + \mu^3\varDelta' \qquad = \frac{1}{4}\frac{dH(\mu)}{d\mu}$$

$$\Phi_{A+\mu B,\,B} = \Phi + 2\mu\Theta' + \mu^2\varDelta' \qquad = \frac{1}{3.4}\cdot\frac{d^2H(\mu)}{d\mu^2}$$

$$\Theta'_{A+\mu B,\,B} = \Theta' + \mu\varDelta' \qquad = \frac{1}{2.3.4}\,\frac{d^3H(\mu)}{d\mu^3}.$$

Mit Hülfe dieser Resultate ist es nun leicht, die Eigenthümlichkeiten der Schnittcurve zweier Flächen A, B abzuleiten aus den algebraischen Eigenschaften der Gleichung des §. 1. Diese Curve ist ja der Schnitt von irgend zweien der Flächen des Büschels $A + \mu B$ und also z. B. der Schnitt eines der vier Kegel mit der Fläche B. Wir wollen uns dieser letzten Anschauungsweise bedienen.

Wenn nun die Gleichung $H = 0$ keine Doppelwurzeln besitzt, so hat auch die in Rede stehende Schnittcurve keine Singularitäten.

Soll die Gleichung $H = 0$ eine Doppelwurzel besitzen, so muss für diese neben H auch noch $\frac{dH}{d\lambda}$ verschwinden. Bezeichnen wir diese Wurzel mit λ, so muss also nach den obigen Gleichungen

$$\varDelta_{A+\lambda B} = 0, \qquad \Theta_{A+\lambda B,\,B} = 0$$

sein. Die erste Gleichung ist erfüllt. Die zweite sagt gemäss den in §. 4 enthaltenen Resultaten aus, dass die Spitze des Kegels, welcher der Doppelwurzel entspricht, auf der Fläche B liegt. Da diese Fläche in der Nähe eines ihrer Punkte von ihrer Tangentenebene unendlich wenig abweicht, so hat also die Schnittcurve einen Doppelpunkt, dessen Tangenten die Schnittlinie des Kegels mit der Tangentenebene der Fläche sind.

Hat aber die $H = 0$ eine dreifache Wurzel λ, so genügt diese den Gleichungen

$$\Theta_{A+\lambda B,\,B} = 0, \qquad \Phi_{A+\lambda B,\,B} = 0.$$

Der Kegel $A + \lambda B$ hat dann seine Spitze auf B und wird von der dort an B gelegten Tangentenebene in zwei zusammenfallenden Linien geschnitten; d. h. die beiden Tangenten der Curve in diesem Punkte fallen zusammen, die Curve hat einen Rückkehrpunkt.

Wenn endlich die 3 Invarianten

$$\Theta_{A+\lambda B,\,B}, \qquad \Phi_{A+\lambda B,\,B}, \qquad \Theta'_{A+\lambda B,\,B}$$

ür einen Werth von λ zusammen verschwinden, so hat die Gleichung $H=0$ vier gleiche Wurzeln. Unsere früheren Resultate zeigen, dass der Kegel, welcher dieser Wurzel entspricht, die Fläche berührt und in einer Geraden schneidet. Die Schnittcurve besteht folglich in einer Curve dritter Ordnung und einer ihrer Tangenten.

Wenn für eine Wurzel von $H = 0$ sämmtliche erste Unterdeterminanten von H verschwinden, so ist diese Wurzel natürlich Dop-

pelwurzel. Der entsprechende Kegel ist ein Ebenenpaar, die Raumcurve zerfällt in zwei Kegelschnitte.

Verschwinden aber für eine dreifache Wurzel alle ersten Unterdeterminanten von H, so ist für diese Wurzel λ auch noch

$$\Phi_{A+\lambda B, B}=0.$$

Nach §. 5 berührt die Schnittlinie des Ebenenpaares die Fläche B. Die Schnittcurve besteht somit aus zwei sich berührenden Kegelschnitten.

Ist die Wurzel λ, welche alle ersten Unterdeterminanten annullirt, vierfache Wurzel von $H=0$, so bestehen die beiden Gleichungen

$$\Phi_{A+\lambda B, B}=0, \qquad \Theta'_{A+\lambda B, B}=0,$$

welche bedingen, dass nicht nur die Schnittlinie der beiden Ebenen, sondern auch eine der Ebenen selbst die Fläche B berührt. Die Raumcurve besteht aus zwei sich schneidenden Geraden und einem Kegelschnitt, der durch ihren Schnittpunkt geht und von der Ebene der Geraden berührt wird.

Giebt es einen Werth von λ, für welchen die zweiten Unterdeterminanten von H alle verschwinden, so finden die Gleichungen

$$\Theta_{A+\lambda B, B}=0, \qquad \Phi_{A+\lambda B, B}=0$$

identisch statt. λ ist dann dreifache Wurzel von $H=0$. Der eine Kegel degenerirt in eine doppelt zu rechnende Ebene und die Schnittcurve besteht aus einem doppelt zu rechnenden Kegelschnitt, längs dessen sich beide Flächen berühren.

Soll eine derartige Wurzel vierfache Wurzel sein, so muss neben den beiden obigen noch die Gleichung

$$\Theta'_{A+\lambda B, B}=0$$

bestehen. Die doppelt zu rechnende Ebene berührt die Fläche und die Schnittcurve besteht aus zwei sich schneidenden Geraden, welche doppelt zu rechnen sind.

Wenn aber die Gleichung $H=0$ zweimal zwei gleiche Wurzeln λ und λ' hat, so finden die Gleichungen statt

$$\Theta_{A+\lambda B, B}=0, \qquad \Theta_{A+\lambda' B, B}=0;$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt aber, weil

$$\Theta_{A+\lambda B,\, A+\lambda B}=4\Delta_{A+\lambda B}=0,$$
$$\Theta_{A+\lambda' B, A+\lambda' B}=4\Delta_{A+\lambda' B}=0$$

ist:

$$\Theta_{A+\lambda B,\, A+\lambda' B}=0, \qquad \Theta'_{A+\lambda B,\, A+\lambda' B}=0.$$

Wie wir in §. 6 gesehen haben, haben also die beiden Kegel, welche zu den Wurzeln λ und λ' gehören, eine gerade Linie gemein. Die Schnittcurve besteht somit aus einer Curve dritter Ordnung und einer ihrer Sehnen.

Nun können aber für eine dieser Wurzeln λ die ersten Unterdeterminanten von H alle verschwinden. Dann ist $\Theta_{A+\lambda B, B}$ identisch Null und es bleibt als Bedingung nur $\Theta_{A+\lambda' B, B}=0$. Wie vorhin hat man aber auch hier die Gleichung

$$\Theta'_{A+\lambda B,\, A+\lambda' B}=0,$$

welche nach §. 6 anzeigt, dass die Spitze des Kegels, der λ' entspricht, auf dem Ebenenpaare liegt. Die Schnittcurve besteht dann also aus einem Kegelschnitt und zweien ihn und sich selbst schneidenden Geraden.

Wenn endlich für die beiden Wurzeln die ersten Unterdeterminanten sich sämmtlich annulliren, so liegt die Schnittcurve ganz auf zwei Ebenenpaaren und besteht folglich aus einem windschiefen Viereck.

§. 8.

Wie sich diese Untersuchungen auf Flächen zweiter Klasse und die Eigenthümlichkeiten der ihnen umschriebenen abwickelbaren Fläche übertragen lassen, ist klar.

Betrachten wir nun neben der Schnittcurve der beiden Flächen zweiter Ordnung A und B, die wir als allgemeine voraussetzen wollen, die ihnen umschriebene abwickelbare Fläche. Schreiben wir die Gleichungen dieser Flächen in Ebenencoordinaten resp.

$$\Sigma A_{ik}\, u_i u_k=0, \qquad \Sigma B'_{ik}\, u_i u_k=0,$$

wo A_{ik} und B'_{ik} die Unterdeterminanten der Determinanten Δ und Δ' bezeichnen, so hängen die Singularitäten der abwickelbaren Fläche ab von den Wurzeln der Gleichung

$$H' \equiv \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda B_{11} & A_{12}+\lambda B_{12} & A_{13}+\lambda B_{13} & A_{14}+\lambda B_{14} \\ A_{21}+\lambda B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{23}+\lambda B_{23} & A_{24}+\lambda B_{24} \\ A_{31}+\lambda B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{33}+\lambda B_{33} & A_{34}+\lambda B_{34} \\ A_{41}+\lambda B_{41} & A_{42}+\lambda B_{42} & A_{43}+\lambda B_{43} & A_{44}+\lambda B_{44} \end{vmatrix}=0.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit den Determinanten Δ und Δ', die der Voraussetzung gemäss nicht Null sind; man erhält dann

$$\begin{vmatrix} \Delta b_{11}+\lambda\Delta' a_{11} & \Delta b_{12}+\lambda\Delta' a_{12} & \Delta b_{13}+\lambda\Delta' a_{13} & \Delta b_{14}+\lambda\Delta' a_{14} \\ \Delta b_{21}+\lambda\Delta' a_{21} & \Delta b_{22}+\lambda\Delta' a_{22} & \Delta b_{23}+\lambda\Delta' a_{23} & \Delta b_{24}+\lambda\Delta' a_{24} \\ \Delta b_{31}+\lambda\Delta' a_{31} & \Delta b_{32}+\lambda\Delta' a_{32} & \Delta b_{33}+\lambda\Delta' a_{33} & \Delta b_{34}+\lambda\Delta' a_{34} \\ \Delta b_{41}+\lambda\Delta' a_{41} & \Delta b_{42}+\lambda\Delta' a_{42} & \Delta b_{43}+\lambda\Delta' a_{43} & \Delta b_{44}+\lambda\Delta' a_{44} \end{vmatrix},$$

so dass

$$H'.\Delta.\Delta'=\lambda^4.\Delta'^4 H\left(\frac{\Delta}{\lambda\Delta'}\right).$$

Wenn also λ eine Wurzel der Gleichung $H=0$ ist, so ist $\frac{\Delta}{\lambda\Delta'}$ eine Wurzel von $H'=0$.

Weil ferner die Unterdeterminanten von H' nach obiger Gleichung lineare Functionen sind der Unterdeterminanten von H, so verschwinden die ersten und zweiten Unterdeterminanten von H' für den Wurzelwerth $\frac{\Delta}{\lambda \Delta}$, wenn die von H für den Werth λ zu Null werden und umgekehrt. Die Singularitäten der Gleichung $H=0$ ziehen demnach ganz entsprechende der Gleichung $H'=0$ nach sich; zugleich mit jedem der in §. 7 aufgezählten Fälle, welche sich auf die Schnittcurve der beiden Flächen A und B beziehen, findet ein anderer statt, den man aus ihm durch dualistische Uebertragung erhält und der sich auf die denselben Flächen A und B umschriebene abwickelbare Fläche bezieht.

Heidelberg, im December 1867.

XVII.

Ueber magnetische Fernwirkung elektrischer Ströme und Stromringe.

Von

EMIL WEYR,

ord. Hörer am polytechnischen Institut zu Prag.

Dieselben Vortheile, welche das Massenpotential bei Betrachtung der Wechselwirkung materieller Systeme darbietet, ergeben sich bei der Verwendung des magnetischen Potentials für die Untersuchung der Fernwirkungsweise elektrischer Ströme und Stromsysteme.

Das magnetische Potential ist, wie das Potential der Massen, eine Function, deren Ableitung nach einer Richtung die Wirkungscomponente nach dieser Richtung hin angiebt; ausserdem stehen beide, nämlich das Massenpotential und das Strompotential, in mannichfachen gegenseitigen Beziehungen, so z. B. auch in der, dass beide die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 V = 0$$

erfüllen.

Das Strompotential wurde bisher gewöhnlich aus dem Massenpotential abgeleitet, indem man sich dabei auf das Ampère'sche Theorem von der Aequivalenz elektrischer Ströme und der von ihnen umgrenzten transversalmagnetischen Flächen stützte.

Wie ich nun in einem Aufsatze*) gezeigt habe, ist dieses Theorem, ausser in dem speciellen Falle, wenn sowohl der Strom, als auch die transversal-magnetische Fläche eben ist, nicht giltig, weshalb ich mir im Anfange dieser Arbeit eine, von der Betrachtung transversal-magnetischer Flächen unabhängige Entwickelungsweise des Strompotentials anzugeben erlaube.

---

*) Novemberheft der Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, 1867.

Um die Untersuchung so allgemein als möglich führen zu können, war es nöthig, den Begriff eines Elementarstromes dahin zu erweitern, dass derselbe nicht eben zu sein brauche, und seine Fernwirkungsweise zu bestimmen.

Ich könnte wohl ohne Weiteres von den bekannten Grundgleichungen für die drei Componenten der Fernwirkung eines elektrischen Stromes ausgehen; des Zusammenhanges und der Vollständigkeit wegen möge es mir jedoch erlaubt sein, dieselben aus dem Gesetze der elektromagnetischen Action in Kürze abzuleiten.

I.

Ist ds das Bogenelement einer geschlossenen Linie S, durch welche ein elektrischer Strom von der Intensität 1 geleitet wird und M ein Punkt, in welchem das nordmagnetische Quantum 1 concentrirt ist, so wirkt bekanntlich ds auf M mit der Kraft

$$\frac{ds \, . \sin\theta}{R^2},$$

wobei R die Entfernung des magnetischen Punktes von dem Stromelemente und θ den Winkel bedeutet, welchen R mit ds einschliesst.

Die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch M und ds gelegten Ebene und wird durch die Ampère'sche Regel näher bestimmt.

Würde die Stromintensität i und die in M vorhandene magnetische Quantität m sein, so hätte man den obigen Ausdruck noch mit mi zu multipliciren.

Bezeichnet man die Coordinaten von ds mit x, y, z, jene von M mit α, β, γ und die Projectionen von ds auf die drei Axen mit dx, dy, dz, so haben die Richtungscosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ der Kraft, weil die Richtung dieser Kraft auf der Ebene von R und ds senkrecht steht, die Werthe:

$$\cos\lambda = \pm \frac{\left(\frac{y-\beta}{R}\right)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{z-\gamma}{R}\right)\frac{dy}{ds}}{\sin\theta},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\left(\frac{z-\gamma}{R}\right)\frac{dx}{ds} - \left(\frac{x-\alpha}{R}\right)\frac{dz}{ds}}{\sin\theta},$$

$$\cos\nu = \pm \frac{\left(\frac{x-\alpha}{R}\right)\frac{dy}{ds} - \left(\frac{y-\beta}{R}\right)\frac{dx}{ds}}{\sin\theta}.$$

Das obere oder untere Zeichen der Cosinus ist zu nehmen, je nachdem die Kraft die eine oder die direct entgegengesetzte Richtung besitzt, was wieder von der Richtung des die Curve durchfliessenden Stromes abhängt.

Die drei Kraftcomponenten haben demzufolge die Werthe:

$$dX = \pm \frac{(y-\beta)\,dz - (z-\gamma)\,dy}{R^3},$$

$$dY = \pm \frac{(z-\gamma)\,dx - (x-\alpha)\,dz}{R^3},$$

$$dZ = \pm \frac{(x-\alpha)\,dy - (y-\beta)\,dx}{R^3}.$$

Die Kraftcomponenten des ganzen geschlossenen Stromes sind daher:

$$X = \pm \int \frac{(y-\beta)\,dz - (z-\gamma)\,dy}{R^3},$$

$$Y = \pm \int \frac{(z-\gamma)\,dx - (x-\alpha)\,dz}{R^3},$$

$$Z = \pm \int \frac{(x-\alpha)\,dy - (y-\beta)\,dx}{R^3},$$

wobei man

$$R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

zu setzen hat.

Ist der Strom eben, d. h. liegt er ganz in einer Ebene, und bringt man ihn, ohne seine Ebene umzuwenden, in die XY-Ebene, so ist dann das obere Zeichen zu nehmen, wenn eine im Strome schwimmende menschliche Figur, gegen die von ihm begrenzte Fläche blickend, die $+z$-Axe zur rechten Hand behält. Ist die Richtung des Stromes die entgegengesetzte, so gilt das untere Zeichen.

II.

Wenn man auf irgend einer Fläche um einen Punkt herum eine geschlossene Linie von verschwindender Länge beschreibt und sie als die Leitlinie eines Stromes betrachtet, so nennt man einen solchen Strom einen Elementarstrom, vorausgesetzt, dass in dem betrachteten Punkte der Fläche keine Singularität (etwa eine Spitze u. s. w.) vorkommt.

Um für einen solchen die Fernwirkungscomponenten zu bestimmen, verlegen wir den Coordinatenanfang bei parallel bleibenden Axen in den angegriffenen Punkt M. Demzufolge erhält man für die drei Componenten:

$$X = \pm \int \frac{y\,dz - z\,dy}{R^3},$$

$$Y = \pm \int \frac{z\,dx - x\,dz}{R^3},$$

$$Z = \pm \int \frac{x\,dy - y\,dx}{R^3},$$

wobei

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist.

Betrachten wir nun z. B. die Componente Z, so lässt sich das Integral

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{R^3}$$

leicht auf folgende Art entwickeln.

Bezeichnet man die xy-Projection von R mit r und den Winkel, welchen r mit der x-Axe einschliesst, durch φ, so ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 - z^2,$$

$$\varphi = arc\,tang\,\frac{y}{x},$$

somit

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\varphi$$

und folglich das, einem Stromelemente zugehörige

$$dZ = \pm\frac{r^2\,d\varphi}{R^3}.$$

Legt man durch die Endpunkte dieses Elementes und durch die z-Axe zwei Ebenen, so schliessen diese unter einander den Winkel $d\varphi$ ein und werden auf der Stromcurve ein zweites Element abschneiden, in welchem der Strom die entgegengesetzte Richtung hat, für welches also dZ negativ zu nehmen ist, und zwar in der Grösse

$$\mp\frac{(r+\delta r)^2 . d\varphi}{(R+\delta R)^3},$$

wenn δr und δR die diesem Uebergange entsprechenden Zuwächse von r und R sind. Der Theil des Integrales also, welcher von den beiden Elementen herrührt, welche durch die zwei die z-Axe enthaltenden Ebenen herausgeschnitten werden, ist:

$$dZ = \pm\left[\frac{r^2}{R^3} - \frac{(r+\delta r)^2}{(R+\delta R)^3}\right] . d\varphi,$$

oder wenn man bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung geht:

$$dZ = \pm\left[\frac{3r^2\,\delta R}{R^4} - \frac{2r\,\delta r}{R^3}\right] d\varphi.$$

Nun ist

$$R^2 = r^2 + z^2,$$

also

$$\delta R = \frac{r . \delta r + z . \delta z}{R}.$$

Sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher sich der Elementarstrom befindet, so ist

$$\delta z = p . \delta x + q . \delta y,$$

mit p und q die Ableitungen von z nach x und y bezeichnet.

Nun geschieht der Uebergang in einer durch die z-Axe gehenden Ebene, welche mit der x-Axe den Winkel φ einschliesst.

Es muss also

$$\delta x = \delta r . \cos\varphi = \delta r . \frac{x}{r},$$

$$\delta y = \delta r . \sin\varphi = \delta r . \frac{y}{r},$$

und somit

$$\delta z = \frac{\delta r}{r}(px + qy)$$

sein.

Denkt man sich im Punkte (x, y, z) an die Fläche die Tangentialebene gelegt und fällt von M auf dieselbe das Perpendikel t, so ist bekanntlich

$$t = \frac{-px - qy + z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

folglich

$$px + qy = z - t\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

oder, wenn man den Winkel, den t mit der z-Axe bildet, durch ν bezeichnet:

$$px + qy = z - \frac{t}{\cos\nu},$$

daher

$$\delta z = \frac{\delta r}{r}\left[z - \frac{t}{\cos\nu}\right].$$

Setzt man den Werth für δz in die Gleichung für δR, so erhält man

$$\delta R = \frac{\delta r}{r}\left[\frac{R^2 - \frac{zt}{\cos\nu}}{R}\right],$$

und somit, wenn man substituirt

$$dZ = \pm\left[\frac{1}{R^3} - \frac{3tz}{R^5\cos\nu}\right] r\,\delta r . d\varphi,$$

daher:

$$Z = \pm\int\int\left[\frac{1}{R^3} - \frac{3tz}{R^5\cos\nu}\right] r . \delta r . d\varphi.$$

Da die Ausdehnung eines Elementarstromes unendlich klein ist, so kann man für x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der von dem Strome umflossenen Fläche setzen und sie als constant betrachten; t ist dann das von M auf die diesem Punkte zugehörige Tangentialebene gefällte Perpendikel und ν der Winkel, welchen t mit der z-Axe bildet. Demzufolge wird:

$$Z = \pm\left[\frac{1}{R^3} - \frac{3tz}{R^5\cos\nu}\right]\int\int r . \delta r . d\varphi.$$

Das Integral

$$\iint r \,.\, \delta r \,.\, d\varphi$$

ist aber nichts Anderes, als die xy-Projection der von dem Strome umflossenen Fläche. Wenn wir also letztere mit f bezeichnen und beachten, dass sie unendlich klein ist:

$$\iint r \,.\, \delta r \,.\, d\varphi = f \cos\nu$$

und folglich

$$Z = \pm f\left[\frac{\cos\nu}{R^3} - \frac{3tz}{R^5}\right],$$

und ebenso

$$X = \pm f\left[\frac{\cos\lambda}{R^3} - \frac{3tx}{R^5}\right],$$

$$Y = \pm f\left[\frac{\cos\mu}{R^3} - \frac{3ty}{R^5}\right]^{*)},$$

wenn λ und μ die Winkel sind, welche t oder die in x, y, z auf die Fläche errichtete mit t gleichsinnige Normale mit der x- und y-Axe bildet.

Giebt man dem Coordinatensystem wieder die allgemeine Lage, so wird: —

$$X = \pm f\left[\frac{\cos\lambda}{R^3} - \frac{3t(x-\alpha)}{R^5}\right]^{**)},$$

$$Y = \pm f\left[\frac{\cos\mu}{R^3} - \frac{3t(y-\beta)}{R^5}\right],$$

$$Z = \pm f\left[\frac{\cos\nu}{R^3} - \frac{3t(z-\gamma)}{R^5}\right].$$

Das Perpendikel t ist bestimmt durch die Gleichung

$$t = (x-\alpha)\cos\lambda + (y-\beta)\cos\mu + (z-\gamma)\cos\nu.$$

Aus der letzteren ergiebt sich:

$$\cos\lambda = -\frac{\partial t}{\partial\alpha},$$

$$\cos\mu = -\frac{\partial t}{\partial\beta},$$

$$\cos\nu = -\frac{\partial t}{\partial\gamma}.$$

Es ist jedoch

$$\frac{3(x-\alpha)}{R^5} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R^3}\right),$$

---

*) Dieselben Ausdrücke findet man für einen ebenen Elementarstrom in ähnlicher Weise in Karsten's „Encyclopädie der Physik" XIX. Bd. entwickelt, pag. 235 und 281.

**) Ich glaube diesen allgemeineren Formeln vor den vorhergehenden deshalb einen Vorzug geben zu müssen, weil ihre Form sie sofort als Differentialquotienten des Potentiales zu erkennen giebt.

$$\frac{3(y-\beta)}{R^5}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R^3}\right),$$
$$\frac{3(z-\gamma)}{R^5}=\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Daraus folgt:

$$X=\mp\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{tf}{R^3}\right),$$
$$Y=\mp\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{tf}{R^3}\right),$$
$$Z=\mp\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{tf}{R^3}\right).$$

Man kann also die drei Componenten der magnetischen Fernwirkung eines Elementarstromes als partielle Ableitungen der Function:

$$W=\mp\frac{tf}{R^3}$$

nach den drei Coordinaten α, β, γ betrachten. Es wird daher diese Function W das magnetische Potential des Elementarstromes genannt. Diese Function genügt, so wie das Massenpotential der Laplace'schen Differentialgleichung:

$$\Delta^2 W=0,$$

wovon man sich durch wirkliches Differentiiren überzeugt.

Es lässt sich nun sehr leicht nachweisen, dass man einen Elementarstrom der Wirkung nach durch ein magnetisches Element ersetzen kann.

Denkt man sich nämlich im Punkte (x, y, z) einen Magnetpol von der Intensität $+m$ und in einem auf der mit t gleichsinnigen Normale im Abstande δn gelegenen Punkte den gleich intensiven entgegengesetzten Pol, so bilden beide zusammen ein magnetisches Element mit dem Momente

$$m\,.\,\delta n.$$

Das Potential des ersten Poles ist

$$\mp m\,.\,\frac{1}{R}$$

und jenes des zweiten

$$\pm m\left[\frac{1}{R}+\delta\left(\frac{1}{R}\right)\right]$$

und somit das Potential des magnetischen Elementes:

$$\mp\frac{\delta R}{R^2}.$$

Nun ist jedoch

$$\delta R=\frac{\delta n\,.\,t}{R},$$

folglich das Potential des magnetischen Elementes

$$\mp m\,.\,\delta n\,\frac{t}{R^3}.$$

Man sieht, dass dieses identisch wird mit dem des Elementarstromes von der Intensität i, wenn

$$if = m \,.\, \delta n$$

wird, d. h. wenn das magnetische Moment des Elementes gleich ist jenem des Elementarstromes.

Man kann demnach den Elementarstrom durch ein solches Element ersetzen und umgekehrt.

Wie man sich leicht überzeugt, ist hierbei die Lage der Pole des Elementes eine solche, dass eine im Strome schwimmende menschliche Figur, gegen das Element blickend, den Nordpol zur Linken hat.

Um das magnetische Feld eines Elementarstromes und des ihm äquivalenten magnetischen Elementes zu untersuchen, wollen wir die im Punkte (x, y, z) an die Fläche gezogene Tangentialebene zur Ebene der xy - und die Normale zur z - Axe nehmen. Dann wird:

$$t = -\gamma,$$
$$x = 0,$$
$$y = 0,$$
$$z = 0,$$

und folglich das Potential:

$$W = \pm f \frac{\gamma}{R^3},$$
$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Die Gleichung der Niveauflächen ist:

$$W = const.$$

und für unseren Fall, wenn wir den Factor $\pm f$ in die Constante hineinziehen,

$$\gamma c^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Aus dieser Gleichung der Niveauflächen sieht man, dass dieselben Rotationsflächen sind, deren Axe die Normale ist. Die Gleichung ihres Meridians ist:

$$\gamma c^2 = (\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder, wenn man Polarcoordinaten einführt:

$$r^2 = c^2 \sin \varphi.$$

Die Analysis der Gleichung der Niveauflächen lehrt, dass dieselben durch die Coordinatenebenen symmetrisch getheilt werden, dass alle im Punkte (x, y, z) die xy - Ebene (d. i. die Ebene des Elementarstromes) inflectorisch berühren und die z - Axe überdies zweimal unter rechten Winkeln durchschneiden. Ferner sind alle ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf den Punkt (x, y, z) als Aehnlichkeitscentrum. Ganz dasselbe gilt von den Meridianen der Niveauflächen, den Niveaulinien.

Dieselben bilden Achterlinien, deren Doppelpunkt der Coordinatenanfang ist und welche die Z-Axe zur Axe haben. Aus der Gleichung:

$$r^2 = c^2 \sin\varphi$$

ergiebt sich eine sehr einfache Construction für diese Meridiane.

Ist nämlich $\xi O \zeta$ die Ebene eines solchen Meridians (siehe d. Taf.), dessen Parameter c ist, und man will Punkte desselben bestimmen, so beschreibe man aus O den Kreis K mit dem Radius c und über $OB=c$ als Durchmesser den Kreis K'. Um nun die auf dem Leitstrahle OS liegenden Punkte des Meridians zu finden, mache man $OT \perp OS$ und beschreibe über MN als Durchmesser einen Kreis, welcher den Strahl OS in P_1 und P_2 schneidet; so sind P_1 und P_2 Punkte des Meridians.

Denn es ist:

$$\overline{OP_1}^2 = \overline{OP_2}^2 = r^2 = \overline{OM} \,.\, \overline{ON} = c \,.\, c \sin\varphi = c^2 \sin\varphi.$$

Da alle Meridiane in Bezug auf O ähnlich und ähnlich gelegen sind, so kann man aus einem Meridiane alle übrigen ableiten.

Weil die Niveauflächen Rotationsflächen sind, so sind die Kraftlinien ebene Curven, deren Ebenen durch die z-Axe gehen, und zwar sind sie deshalb die orthogonalen Trajectorien der Meridiane der Niveauflächen.

Die Gleichung der letzteren war:

$$r^2 = c^2 \sin\varphi,$$

daher ihre Differentialgleichung:

$$2\,dr - r \,.\, \cot\varphi \,.\, d\varphi = 0$$

und somit die Differentialgleichung der Kraftlinien

$$dr \,.\, \cot\varphi + 2r \,.\, d\varphi = 0,$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$r = c_1 \cos^2\varphi,$$

welches die Gleichung der Kraftlinien ist.

Aus derselben ergiebt sich folgende einfache Construction der Kraftlinien:

Man beschreibe aus O mit c_1 als Radius den Kreis K (siehe d. Taf.) und, um die dem Leitstrahle OS entsprechenden Punkte der Kraftlinie zu finden, mache man $M_1 O_1$ und $M_2 O_2$ parallel zu $O\zeta$ und $Q_1 P_1$ und $Q_2 P_2$ senkrecht auf OS, so sind P_1 und P_2 zwei Punkte der Kraftlinie.

Denn es ist:

$$OP_1 = OP_2 = r = \overline{OQ} \,.\, \cos\varphi = c_1 \cos\varphi \,.\, \cos\varphi = c_1 \cos^2\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ wird:

$$r = c_1,$$

also sind B_1 und B_2 auch Punkte der Kraftlinie.

Die Untersuchung der Gleichung der Kraftlinien zeigt, dass alle in einer und derselben durch die ζ-Axe gehenden Ebene liegenden Kraft-

linien durch $O\zeta$ und $O\xi$ symmetrisch getheilt werden und alle in O die ζ-Axe inflectorisch berühren und überdies noch zwei Mal die ξ-Axe unter rechten Winkeln durchschneiden. Sie bilden ein System von Achterlinien, welche in O ihren Doppelpunkt haben und deren Axe die ξ-Axe ist.

III.

Die Resultate, welche sich aus der Betrachtung eines Elementarstromes ergeben, lassen sich sofort auf einen endlichen Strom S übertragen.

Legt man nämlich durch S eine Fläche F, deren einzige Begrenzung S bildet, und zerlegt man nun F in unendlich kleine Flächenelemente, so kann man sich jedes derselben von einem mit S gleichgerichteten und gleich intensiven Strome umflossen denken. Die Gesammtwirkung dieser Elementarströme ist dann offenbar identisch mit jener des Stromes S, da sich die ausserhalb S liegenden Elementarströme ihrer entgegengesetzten Richtung wegen der Wirkung nach aufheben.

Das Potential eines dieser Elementarströme, welcher die Fläche df umfliesst, ist nach Früherem:

$$\mp \frac{df \,.\, t}{R^3}.$$

Das Potential des ganzen Stromes S ist also:

$$W = \int \mp \frac{df \,.\, t}{R^3}.$$

Das doppelte Zeichen ist zu dem df zu rechnen und richtet sich nach der Lage von df und der Richtung des df umkreisenden Elementarstromes. Denkt man sich jeden der Elementarströme durch das ihm äquivalente magnetische Element ersetzt, und rechnet man die Axenrichtung desselben vom Nordpole nach dem Südpole als positiv, so ist das obere Zeichen dann zu nehmen, wenn die Axenrichtung des magnetischen Elementes mit jener von t übereinstimmt, und das untere, wenn diese beiden Richtungen entgegengesetzt sind. Wenn wir also t als positiv oder negativ rechnen, je nachdem es mit der Axe des betreffenden Elementes dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat, so kann man

$$W = -\int \frac{df \,.\, t}{R^3}$$

schreiben.

Die drei Wirkungscomponenten sind dann:

$$X = \frac{\partial W}{\partial \alpha},$$

$$Y = \frac{\partial W}{\partial \beta},$$

$$Z = \frac{\partial W}{\partial \gamma}.$$

Es braucht nicht bemerkt zu werden, dass auch das Potential eines geschlossenen, endlichen Stromes der Gleichung

$$\Delta^2 W = 0$$

genügen muss.

Dem Integrale

$$\int \frac{df \, . \, t}{R^3}$$

kann man eine bemerkenswerthe Deutung geben.

Es ist nämlich $\frac{t}{R}$ der Cosinus des Winkels δ zwischen dem Leitstrahle R und der in df auf die Fläche errichteten Normale, letztere in der Richtung vom Nord- zum Südpole des äquivalenten magnetischen Elementes gezählt; somit ist das erwähnte Integral auch gleich

$$\int \frac{df \, . \cos\delta}{R^2}.$$

Nun ist $df . \cos\delta$ die centrale Projection von df auf die mit dem Radius R aus M beschriebene Kugel, und somit $\frac{df \, . \cos\delta}{R^2}$ die centrale Projection von df auf die aus M mit dem Radius 1 beschriebene Kugel.

Der Winkel δ ist entweder für alle Punkte der Fläche F spitz oder überall stumpf. Dies wird dann der Fall sein, wenn sich von M an F kein Berührungskegel legen lässt, oder wenn der aus M über S construirte Kegel die Fläche F (ausser in S) nicht schneidet.

Dann ist das Integral

$$\int \frac{df \, . \cos\delta}{R^2}$$

der Flächeninhalt der centralen Projection von S auf die aus M mit dem Radius 1 beschriebene Kugel.

Es kann aber auch δ theils spitz, theils stumpf sein.

Dies wird dann eintreten, wenn sich von M an F ein oder mehrere Berührungskegel legen lassen. Die Berührungscurven trennen dann jene Partien ab, in welchen der Winkel δ ausschliesslich spitz oder stumpf ist. Wenn man in diesem Falle aus M über S als Leitcurve einen Kegel construirt, so wird dieser die Fläche F (ausser in S noch) schneiden. Offenbar werden sich die Glieder des Integrales, welche sich auf die ausserhalb dieses Kegels liegenden Theile von F erstrecken, tilgen, und es bleibt nur das Integral über den Theil der Fläche, welcher innerhalb des Kegels liegt.

Dies giebt aber dem Integral

$$\int \frac{\cos\delta \, . \, df}{R^2}$$

wieder den Werth des Flächeninhaltes der Centralprojection von S auf die aus M mit 1 beschriebene Kugel. Nennen wir diese Fläche F, so hat man:

$$W = \mp F.$$

Aus diesem geht sofort klar hervor, dass, wenn man das Integral

$$\int \frac{df \, . \, t}{R^3}$$

über eine geschlossene Fläche ausdehnt, dasselbe verschwinden müsse.

Da man ferner durch S unendlich viele Flächen legen kann, so lässt sich W auf unendlich viele Arten darstellen, und man sieht, dass das über eine Fläche ausgedehnte Integral

$$\int \frac{df \, . \, t}{R^3}$$

nur von der Begrenzung der Fläche abhängt und mit dieser gleichzeitig verschwindet.

Die Niveauflächen des Stromes S werden durch die Gleichung

$$W = const.$$

charakterisirt.

Diese Gleichung kann man der angegebenen Auffassungsweise des Potentials gemäss folgendermaassen in Worte umsetzen:

> Eine Niveaufläche ist jene, von deren jedem Punkte aus man die Stromcurve denselben Flächeninhalt einschliessen sieht.

Um die Nützlichkeit der angeführten Auffassungsweise des Potentials an einem Beispiele zu zeigen, soll dasselbe für einen Strom bestimmt werden, dessen Leitlinie irgend ein Kegelschnitt in seiner ganzen Ausdehnung ist.

Um das Potential zu finden, verwenden wir die Gleichung:

$$W = \mp F,$$

wobei F die Fläche ist, welche die centrale Projection von S auf die aus M mit dem Radius 1 beschriebene Kugel einschliesst. Um diese Centralprojection zu finden, hat man jeden Punkt des Stromes mit M zu verbinden und den Schnitt mit der Kugel zu suchen. Die Gesammtheit der Projectionsstrahlen bildet einen Kegel zweiten Grades, dessen Schnitt mit der Kugel die Centralprojection von S ist. Dieser Schnitt ist nun ein sphärischer Kegelschnitt, und wir haben die Aufgabe aufzulösen: die Fläche zu finden, welche dieser sphärische Kegelschnitt auf der Kugel begrenzt. Zu dem Ende denke man sich das Coordinatensystem in eine solche Lage gebracht, dass die Hauptaxen der Kegelfläche zugleich Coordinatenaxen werden. Werden die zwei Parameter des Kegels mit λ und μ bezeichnet, so ist seine Gleichung:

$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 - z^2 = 0,$$

und die Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Es ist somit die Gleichung der xy-Projection des sphärischen Kegelschnittes:

$$x^2 (1 + \lambda^2) + y^2 (1 + \mu^2) = 1,$$

folglich diese eine Ellipse mit den Axen:

$$\frac{1}{1+\lambda^2} \text{ und } \frac{1}{1+\mu^2}.$$

Werden die Winkel, welche die Hauptschnitte des Kegels mit der z-Axe bilden, mit A und B bezeichnet, so hat man:

$$\lambda = \cot A,$$
$$\mu = \cot B,$$

daher die Gleichung der xy-Projection auch:

$$\frac{x^2}{\sin^2 A} + \frac{y^2}{\sin^2 B} = 1,$$

so dass $\sin A$ und $\sin B$ die beiden Axen der Ellipse sind.

Heisst ϱ der Radiusvector in der xy-Ebene, so ist das Differential der Kugelfläche:

$$df = \frac{\varrho \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi}{z},$$

oder, da

$$z = \sqrt{1-\varrho^2}$$

ist, so hat man für die Fläche des sphärischen Kegelschnittes:

$$F = \int\!\!\int \frac{\varrho \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi}{\sqrt{1-\varrho^2}},$$

welches Doppelintegral über den ganzen Flächenraum der Ellipse

$$\frac{x^2}{\sin^2 A} + \frac{y^2}{\sin^2 B} = 1$$

auszudehnen ist.

Nach ϱ kann die Integration durchgeführt werden, und zwar hat sie von 0 bis r zu geschehen, wenn r der dem Winkel φ zugehörige Radiusvector der Ellipse ist.

Man erhält demnach

$$F = \int_0^{2\pi} \left(1 - \sqrt{1-r^2}\right) d\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} \,.\, d\varphi.$$

Führt man die excentrische Anomalie ω ein, so hat man:

$$x = \sin A \,.\, \cos\omega,$$
$$y = \sin B \,.\, \sin\omega,$$
$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right) . \operatorname{tang}\omega,$$

demnach

$$d\varphi = \sin A \,.\, \sin B \,.\, \frac{d\omega}{\sin^2 A \cos^2\omega + \sin^2 B \sin^2\omega}$$

und

$$r^2 = x^2 + y^2 = \sin^2 A \,.\, \cos^2\omega + \sin^2 B \,.\, \sin^2\omega,$$

sonach:

$$F = 2\pi - \sin A \,.\, \sin B \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\omega \sqrt{1-(\sin^2 A \cos^2\omega + \sin^2 B \sin^2\omega)}}{\sin^2 A \cos^2\omega + \sin^2 B \sin^2\omega}.$$

Wenn man annimmt, dass A der kleinere von den beiden Winkeln A und B ist, so setze man:

$$\frac{\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A} = h,$$

$$\frac{\sin^2 B - \sin^2 A}{\cos^2 A} = k^2.$$

Nun kann F leicht auf die Form gebracht werden:

$$F = 2\pi - \frac{4 \sin A \sin B}{\cos A}\left[\frac{1}{\sin^2 A}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(1+h\sin^2\omega)\,\Delta(\omega\,.\,k)} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\Delta(\omega\,.\,k)}\right].$$

Oder wenn man, wie üblich, mit Π_0 das vollständige elliptische Integral dritter Art in der Form von Legendre und mit K das vollständige elliptische Integral erster Art für k als Modulus und h als Parameter bezeichnet:

$$F = 2\pi - 4 \,tang\, A \,.\, \sin B \left[\frac{\Pi_0}{\sin^2 A} - K\right].$$

Diese Gleichung ist jedoch nicht mehr giltig, wenn der Punkt M in die Stromebene hineinfällt, weil dann der Kegel eine Ebene wird. Dieser Fall lässt sich jedoch unmittelbar sehr einfach erledigen, und zwar kann zweierlei zutreffen. Entweder fällt der Punkt ausserhalb der vom Strome umflossenen Fläche, dann ist sofort:

$$F = 0,$$

oder aber er fällt innerhalb dieser Fläche; dann ergiebt sich:

$$F = 2\pi;$$

denn im ersten Falle schneidet der Kegel die Kugel in einer nicht geschlossenen Linie und im zweiten Falle in einem grössten Kreise.

Das Potential ist:

$$W = \mp 2\pi \pm 4 \,tang\, A \sin B \left[\frac{\Pi_0}{\sin^2 A} - K\right].$$

Ich lasse nun eine Entwickelung des Potentials resp. der sphärischen Fläche F nach Kugelfunctionen folgen.

Bezeichnet man die Grösse

$$\sin^2 A \,.\, \cos^2\omega + \sin^2 B \,.\, \sin^2\omega$$

mit z, so ist

$$F = 2\pi - \sin A \sin B \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\omega \,.\, \sqrt{1-z}}{z}.$$

Entwickelt man nun $\sqrt{1-z}$ nach Potenzen von z, so findet ma sehr leicht die Gleichung:

$$\sqrt{1-z} = 1 - \Sigma_1^\infty \frac{1}{2n-1} \frac{\Pi(2n)}{[2^n \Pi(n)]^2} \cdot z^n,$$

somit:

$$F = 2\pi - \sin A \sin B \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{z} + \sin A \sin B \, \Sigma_1^\infty \frac{1}{2n-1} \frac{\Pi(2n)}{[2^n \Pi(n)]^2} \int_0^{2\pi} d\omega \cdot z^{n-1}.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\sin^2 A \cos^2 \omega + \sin^2 B \sin^2 \omega} = \int_0^{4\pi} \frac{d(2\omega)}{\sin^2 A + \sin^2 B - \cos 2\omega (\sin^2 B - \sin^2 A)}$$

$$= 2 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(\sin^2 A + \sin^2 B)^2 - (\sin^2 B - \sin^2 A)^2}} = \frac{2\pi}{\sin A \sin B},$$

somit:

$$F = \sin A \sin B \, \Sigma_1^\infty \frac{1}{2n-1} \frac{\Pi(2n)}{[2^n \Pi(n)]^2} \int_0^{2\pi} d\omega \cdot z^{n-1}.$$

Es ist nun:

$$\int_0^{2\pi} d\omega \cdot z^{n-1} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 A \cos^2 \omega + \sin^2 B \cdot \sin^2 \omega)^{n-1} \cdot d\omega,$$

oder, wenn man $2\omega = \varphi$ setzt, gleich:

$$\frac{1}{2^{n-2}} \int_0^{\pi} \left[\sin^2 A + \sin^2 B - \cos\varphi \, (\sin^2 B - \sin^2 A) \right]^{n-1} d\varphi;$$

setzt man jedoch:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \varrho x,$$
$$\sin^2 B - \sin^2 A = \varrho \sqrt{x^2 - 1},$$

so wird:

$$\int_0^{2\pi} z^{n-1} \, d\omega = \frac{\varrho^{n-1}}{2^{n-2}} \int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2-1} \cos\varphi)^{n-1} \, d\varphi.$$

Da jedoch:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1} \cos\varphi)^{n-1} \, d\varphi$$

die $(n-1)^{\text{te}}$ Kugelfunction für das Argument x ist, so folgt daraus:

$$\int_0^{2\pi} z^{n-1} \, d\omega = \frac{\pi \varrho^{n-1}}{2^{n-2}} P_{(x)}^{(n-1)}.$$

Aus den zwei vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich sofort:

$$x = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{2 \sin A \sin B},$$
$$\varrho = 2 \sin A \sin B,$$

somit:

$$\int_0^{2\pi} z^{n-1}\, d\omega = 2\pi\, (\sin A \sin B)^{n-1}\, P_{(x)}^{(n-1)}$$

und folglich:

$$F = 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{(\sin A \sin B)^n}{2n-1}\, \frac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2}\, P_{(x)}^{(n-1)}.$$

Das Potential endlich ergiebt sich aus der Gleichung:

$$W = \mp F.$$

Da ebene Ströme von besonderem Interesse sind, so will ich nun zu der Betrachtung ihres Potentials im Allgemeinen übergehen.

Legen wir den ebenen geschlossenen Strom so in die xy-Ebene, dass eine in ihm schwimmende menschliche Figur, ins Innere der von ihm umflossenen Fläche blickend, die z-Axe zur linken Hand hat und machen die Annahme, dass seine Leitcurve sich nirgends selbst durchschneide, so bietet sich zur Bestimmung des Strompotentials W sofort das von der Stromcurve umflossene Stück der xy-Ebene dar.

Wenn wir das Integral

$$\int \frac{df\,.\,t}{R^3}$$

auf diese Fläche beziehen, so ist für alle Punkte

$$t = \gamma,$$

somit:

$$W = -\gamma \int \frac{df}{R^3}.$$

Denkt man sich die Stromcurve S als die Basis eines zur z-Axe parallelen Cylinders, so hat das Potential innerhalb desselben eine andere Form als ausserhalb.

Offenbar wird für alle Punkte, welche innerhalb des Cylinders liegen, die xy-Projection in den von dem Strome umflossenen Theil der xy-Ebene fallen, wogegen für ausserhalb liegende Punkte diese Projection ausserhalb der Stromcurve liegt.

Der Kürze halber möge dieser Cylinder der Stromcylinder heissen.

Betrachten wir nun den Punkt M, auf welchen sich das Potential bezieht, und legen wir der Einfachheit wegen die z-Axe durch denselben. Dann wird:

$$\alpha = 0,$$
$$\beta = 0,$$

folglich:

$$R^2 = x^2 + y^2 + \gamma^2,$$

oder, wenn wir die xy-Projection von R mit ϱ bezeichnen:

$$R^2 = \varrho^2 + \gamma^2.$$

Dabei ist ϱ von der xy-Projection M_1 des Punktes M gerechnet.

Heisst ferner φ der Winkel, welchen ϱ mit einer beliebigen durch M_1 in der xy-Ebene gezogenen Axe bildet (gezählt in der angegebenen Stromrichtung), so ist:

$$df = \varrho \, . \, d\varrho \, . \, d\varphi,$$

folglich:

$$W = -\gamma \int\int \frac{\varrho \, . \, d\varrho \, . \, d\varphi}{[\varrho^2 + \gamma^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Stellen wir uns nun die Aufgabe, dieses Doppelintegral, welches sich auf den vom Strome umflossenen Theil der xy-Ebene bezieht, in ein einfaches zu verwandeln, das sich über die geschlossene Stromcurve S selbst erstreckt.

Da hat man nun die zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich M innerhalb oder ausserhalb des Stromcylinders liegt.

Liegt erstlich M ausserhalb des Stromcylinders, so liegt M_1 ausserhalb des Stromes S; dann schneidet jeder durch M_1 gezogene Leitstrahl die Stromcurve in Punkten von einer geraden Anzahl. Sie mögen $1, 2, 3 \ldots . 2n$ und die ihnen zugehörigen Werthe von ϱ $r_1, r_2 \ldots . r_{2n}$ heissen. Führt man nun in W die Integration nach ϱ aus, so hat man von r_1 bis r_2, von r_3 bis r_4 u. s. w. zu integriren und erhält:

$$W = \gamma \int d\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{r_2^2 + \gamma^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + \gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_4^2 + \gamma^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_3^2 + \gamma^2}} + - \ldots \right].$$

Ist nun ds ein Stromelement (in der Stromrichtung gezählt) und θ der Winkel, welchen dasselbe mit seinem Leitstrahle r einschliesst (welcher Winkel alle Werthe von 0 bis 2π annimmt), so hat man:

$$r \, . \, d\varphi = ds \, . \, \sin\theta$$

und

$$d\varphi = \frac{ds \, . \, \sin\theta}{r}.$$

Man wird einsehen, dass bei der angegebenen Zählung des Winkels φ in den Punkten 1, 3, 5... die Richtung des wachsenden φ jener des wachsenden s entgegengesetzt ist, während beide in 2, 4, 6... gleich sind.

Für die ersten Punkte ist

$$d\varphi = -\frac{ds \sin\theta}{r}$$

und für letztere

$$d\varphi = \frac{ds \, . \, \sin\theta}{r}.$$

Dies berücksichtigt, erhält man für W sofort den Werth:

$$W = \gamma \int \frac{ds \, . \, \sin\theta}{r\sqrt{r^2 + \gamma^2}},$$

wo sich nun das Integral über die geschlossene Stromcurve zu erstrecken hat, und r die Entfernung eines Punktes des Stromes von der xy-Projection M_1 des Punktes M bedeutet, auf welchen sich das Potential bezieht.

Bezeichnet man mit p das von M_1 auf die Tangente der Stromcurve gefällte Perpendikel (welches $+$ oder $-$ ist, je nachdem seine Richtung mit der der äusseren Normale der Stromcurve übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist), so ist:

$$\sin\theta = \frac{p}{r},$$

also auch

$$W = \gamma \int \frac{ds \cdot p}{r^2\sqrt{r^2+\gamma^2}}.$$

Liegt zweitens der Punkt M innerhalb des Stromcylinders, also M_1 innerhalb S, so schneidet jeder durch M_1 gezogene Leitstrahl die Stromcurve eine ungerade Anzahl —mal, z. B. in den Punkten $1, 2, 3 \ldots (2n-1)$.

Führt man die Integration nach ϱ abermals aus, so hat man von 0 bis r_1, von r_2 bis r_3 u. s. w. zu integriren und erhält:

$$W = \gamma \int d\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{r_1^2+\gamma^2}} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{r_3^2+\gamma^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2+\gamma^2}} + - \ldots\right],$$

oder, da die Integration nach φ in diesem Falle offenbar von 0 bis 2π geschehen muss:

$$W = -2\pi + \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{r_1^2+\gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_3^2+\gamma^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2+\gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_5^2+\gamma^2}} - \ldots\right],$$

oder da hier für die geraden Indices:

$$d\varphi = -\frac{ds \cdot \sin\theta}{r}$$

und für die ungeraden:

$$d\varphi = \frac{ds \cdot \sin\theta}{r}$$

ist:

$$W = -2\pi + \gamma \int \frac{ds \cdot \sin\theta}{r\sqrt{r^2+\gamma^2}},$$

oder:

$$W = -2\pi + \gamma \int \frac{ds \cdot p}{r^2\sqrt{r^2+\gamma^2}}.$$

Wenn wir also das über die ganze Stromcurve ausgedehnte Integral:

$$\int \frac{ds \cdot p}{r^2\sqrt{r^2+\gamma^2}}$$

mit U bezeichnen, so ist für ausserhalb des Stromcylinders liegende Punkte

$$W = \gamma U.$$

und für innerhalb liegende Punkte:

$$W = -2\pi + \gamma U.$$

Wenn man somit von Aussen in den Stromcylinder oder umgekehrt übergeht, so ändert sich der Werth des Potentials um 2π.

Liegt der Punkt M in der Stromebene und zwar ausserhalb S, so wird:

$$W = 0;$$

liegt er innerhalb S, so wird:

$$W = -2\pi.$$

Auf der entgegengesetzten Seite der Stromebene ist der Potentialwerth (weil γ aus dem Negativen sich der Null nähert):

$$W = +2\pi.$$

Beim Durchgang durch die Stromebene innerhalb des Stromes ändert sich der Potentialwerth um 4π, ausserhalb des Stromes gar nicht.

Da in der ganzen Stromebene das Potential entweder den Werth 0 oder 2π aufweist, so ist die Stromebene eine Niveaufläche, oder eigentlich bildet sie zwei Niveauflächen, da dem vom Strome umflossenen Theil ein anderer Potentialwerth zukommt, als dem äusseren. Und in der That ist auch in diesen beiden Theilen der Stromebene die Kraftrichtung die entgegengesetzte.

Es mag nun noch der Grenzwerth betrachtet werden, dem sich das Potential eines ebenen Stromes für sehr grosse Entfernungen nähert.

Für diesen Fall kann man R für alle Punkte der Stromcurve als constant betrachten und erhält:

$$W = \frac{-\gamma}{R^3} \int df,$$

oder, wenn mit F die vom Strome umflossene Fläche bezeichnet wird:

$$W = \frac{-\gamma F}{R^3},$$

welches derselbe Ausdruck ist, wie wir ihn für das Potential eines Elementarstromes erhalten haben.

Die Niveauflächen und Kraftlinien nehmen daher für sehr grosse Entfernungen den Charakter der Niveauflächen und Kraftlinien eines Elementarstromes an.

Unter den ebenen Strömen zeichnet sich seiner praktischen Verwendbarkeit wegen insbesondere der kreisförmige aus.

Es sollen daher die eben gefundenen allgemeinen Ergebnisse auf einen solchen angewendet werden.

Um sein Potential für alle Fälle zu bestimmen, hat man blos das Integral U zu entwickeln.

Damit jedoch die Entwickelung möglichst einfach ausfalle, nehmen wir den Mittelpunkt des Kreises zum Coordinatenanfangspunkt und legen

(ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden) die xz-Ebene durch den Punkt M, auf den sich das Potential bezieht. Dann ist α die Entfernung des Kreiscentrums von der xy-Projection M_1 des Punktes M.

Heisst a der Radius des Kreises und φ der Winkel, welchen er in irgend einer Lage mit der negativen x-Axe bildet (diesen Winkel in der Stromrichtung gezählt), so ist:

$$ds = a\, d\varphi,$$
$$p = a + \alpha \cos\varphi,$$
$$r^2 = a^2 + \alpha^2 + 2a\alpha\cos\varphi,$$

somit:

$$U = a\int_0^{2\pi} \frac{(a+\alpha\cos\varphi)\, d\varphi}{(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi)\sqrt{a^2+\alpha^2+\gamma^2+2a\alpha\cos\varphi}}.$$

Setzt man:

$$\varphi = 2\omega,$$
$$-\frac{4a\alpha}{(a+\alpha)^2} = h,$$
$$\frac{4a\alpha}{(a+\alpha)^2+\gamma^2} = k^2,$$

so ergiebt sich nach einer einfachen Umformung sehr leicht:

$$U = \frac{-2}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}}\left[\left(\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(1+h\sin^2\omega)\,\Delta(\omega k)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\Delta(\omega k)}\right],$$

oder:

$$U = -\frac{2\left(\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\Pi_0 - K\right)}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}}.$$

Daher das Strompotential:

$$W = -\frac{2\gamma\left(\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\Pi_0 - K\right)}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}} + \pi(\pm 1 - 1).$$

Das doppelte Zeichen von π entspricht den zwei Lagen des Punktes, auf welchen sich das Potential bezieht, bezüglich des Stromcylinders.

Für Punkte innerhalb desselben ist das untere, für ausserhalb liegende dagegen das obere Zeichen zu wählen.

Die Wirkungscomponenten würden sich aus W durch Differentiation nach den Coordinaten ergeben. Da jedoch dieselbe complicirt ausfällt, scheint es mir entsprechender zu sein, die Componenten aus den für sie entwickelten Fundamentalgleichungen Seite 416 abzuleiten.

Behält man das eben verwendete Coordinatensystem bei, so liefern die anfangs entwickelten Gleichungen für die drei Componenten die Ausdrücke:

$$X = -\gamma \int \frac{dy}{R^3},$$

$$Y = \gamma \int \frac{dx}{R^3},$$

$$Z = -\int \frac{(x-\alpha)\,dy - y\,dx}{R^3}.$$

Wenn man wieder den Winkel φ einführt, so ist:

$$y = a \sin\varphi,$$

$$x = -a\cos\varphi,$$

$$R = \sqrt{a^2 + \alpha^2 + 2a\alpha\cos\varphi + \gamma^2},$$

folglich:

$$X = -a\gamma \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = a\gamma \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = a \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha\cos\varphi + a)\,d\varphi}{(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vor allem Anderen sieht man, dass sich die Integration in Y unmittelbar durchführen lässt und

$$Y = 0$$

liefert; d. h. die Resultantenrichtung befindet sich in der xz-Ebene oder in der durch den afficirten Punkt und die Stromaxe gelegten Ebene.

Für die zwei übrigen Componenten erhält man nach Einführung des Winkels ω die Ausdrücke:

$$X = -\frac{4a\gamma}{[(a+\alpha)^2+\gamma^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos^2\omega - 1)\,d\omega}{\Delta^3(\omega k)},$$

$$Z = \frac{4a}{[(a+\alpha)^2+\gamma^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + \alpha(2\cos^2\omega - 1)\,d\omega}{\Delta^3(\omega k)},$$

oder endlich:

$$X = \frac{4a\gamma}{[(a+\alpha)^2+\gamma^2]^{\frac{3}{2}}} \left[2 \cdot \frac{K-E}{k^2} - \frac{E}{1-k^2}\right],$$

$$Z = \frac{4a}{[(a+\alpha)^2+\gamma^2]^{\frac{3}{2}}} \left[2\alpha\,\frac{K-E}{k^2} - \frac{(\alpha-a)E}{1-k^2}\right].$$

Liegt der magnetische Punkt in der Stromebene, so wird:

$$\gamma = 0,$$

folglich:

$$X = 0$$

und

$$Z = \frac{4a}{(a+\alpha)^3} \cdot \left[2\alpha \frac{K-E}{k^2} - \frac{(\alpha-a)E}{1-k^2}\right].$$

Nun ist hier:

$$k^2 = \frac{4a\alpha}{(a+\alpha)^2}$$

und

$$1-k^2 = \left(\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\right)^2,$$

woraus sich leicht

$$Z = 2\left[\frac{K}{\alpha+a} - \frac{E}{\alpha-a}\right]$$

ergiebt*).

Liegt der magnetische Punkt in der Stromaxe, so ist:

$$\alpha = 0,$$

somit auch:

$$k = 0.$$

Der Werth von X nimmt eine unbestimmte Form an, welche sich jedoch leicht bestimmen lässt.

Bekanntlich ist:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots\right]$$

und

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \ldots\ldots\right],$$

folglich:

$$\lim\left(\frac{K-E}{k^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

und weil

$$\lim\left(\frac{E}{1-k^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ist, so hat man:

$$X = 0.$$

Für Z ergiebt sich der bekannte Werth:

$$Z = \frac{2\pi a^2}{(a^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und überdies für $\gamma = 0$:

$$Z = \frac{2\pi}{a}.$$

---

*) Denselben Ausdruck findet man im zweiten Hefte des 14. Theiles von Grunert's Archiv, wo Herr Dr. Haedenkamp die Wirkung linearer elektrischer Ringe, aber nur für den Fall betrachtet, dass der magnetische Punkt in der Stromebene liege.

Wir haben zur Bestimmung des Potentials eines ebenen Stromes (zur Berechnung des Integrals $\int\frac{df.t}{R^3}$) den von ihm umgrenzten Theil der Stromebene verwendet. Man gelangt zu demselben Resultate mit Benutzung irgend einer anderen durch den Strom gelegten Fläche.

Des folgenden Abschnittes wegen will ich jetzt das Potential eines Kreisstromes mittelst einer durch ihn zur z-Achse parallel gelegten Cylinderfläche bestimmen. Damit der Kreisstrom die einzige Begrenzung der Cylinderfläche bilde, muss man dieselben nach einer Richtung (wir wollen die $+z$-Axe wählen) unbegrenzt lassen.

Für eine solche ist mit Beibehaltung des angewendeten Coordinatensystems und der angegebenen Stromrichtung:

$$df = a\,.\,d\varphi\,.\,dz,$$
$$t = -(a + \alpha\cos\varphi),$$
$$R^2 = a^2 + \alpha^2 + 2a\alpha\cos\varphi + (z-\gamma)^2,$$

somit ist das Potential des Kreisstromes:

$$W = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{a(a+\alpha\cos\varphi)\,d\varphi\,dz}{[a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Würde man die Integration nach z ausführen (was unmittelbar geschehen kann) und dann weiter reduciren, so erhielte man dieselbe Form für W, wie ich sie im Vorhergehenden angab.

Zugleich kommt man auf die doppelte Form des Potentials, entsprechend der doppelten Lage des magnetischen Punktes; nämlich innerhalb und ausserhalb des Stromcylinders.

Für uns ist nur die letztentwickelte Form des Potentials wichtig.

Es lässt sich nämlich, wie sofort erhellen wird, auch schreiben:

$$W = -a\frac{d}{da}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\,dz}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2}}.$$

Bezeichnet man mit V das Massenpotential des Stromcylinders, so ist

$$V = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{a\,d\varphi\,.\,dz}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2}},$$

und folglich existirt die bemerkenswerthe Relation:

$$W = -a\frac{d}{da}\left(\frac{V}{a}\right),$$

oder:

$$W = -\frac{dV}{da} + \frac{V}{a}.$$

Dabei ist $\frac{dV}{da}$ die auf die Cylinderaxe senkrechte Kraftcomponente.

IV.

Ich übergehe nun zur Betrachtung der Fernwirkungsweise eines ebenen Stromsystems, nämlich des Ringstromes. Man denke sich zwei concentrische Kreise 1 und 2 mit den Radien a_1 und a_2. Die von ihnen gebildete Ringfläche möge so als geschlossener Stromleiter auftreten, dass die einzelnen Strömungscurven zu 1 und 2 concentrische Kreise sind. Man stelle sich einen beliebigen Radius der Kreise vor, welcher die Kreise 1 und 2 in den Punkten I und II schneiden mag; dann denke man sich die Gerade $\overline{\text{I II}}$ als Ein- und Austrittsstelle für den Ringstrom.

Offenbar werden die einzelnen Elementarströme verschiedene Intensitäten besitzen, da sie dem Strome, ihrer verschiedenen Länge wegen, verschiedene Widerstände entgegensetzen.

Nimmt man als Einheit der Stromstärke jene an, welche auf die Breiteneinheit bezogen dem Stromkreise vom Radius 1 entspricht, so ist die Stromintensität des Elementarstromringes von der Breite da und dem Radius a offenbar $\frac{da}{a}$ und somit sein Potential:

$$dS = W \cdot \frac{da}{a}.$$

Um das Potential des ganzen Ringstromes zu erhalten, hat man von a_1 bis a_2 zu integriren; also:

$$S = \int_{a_1}^{a_2} \frac{W}{a} \, da.$$

Führt man statt W den letztgefundenen Differentialausdruck:

$$-a \cdot \frac{d}{da}\left(\frac{V}{a}\right)$$

ein, so erhält man sofort:

$$S = \frac{V_1}{a_1} - \frac{V_2}{a_2},$$

wobei nach Früherem V_1 und V_2 die beiden Massenpotentiale der beiden Grenzstromcylinder sind.

Schreibt man für diese ihre Integralausdrücke, so ist:

$$S = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \, dz}{\sqrt{a_1^2 + \alpha^2 + 2 a_1 \alpha \cos\varphi + (z-\gamma)^2}}$$
$$- \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \, dz}{\sqrt{a_2^2 + \alpha^2 + 2 a_2 \alpha \cos\varphi + (z-\gamma)^2}}.$$

Für die beiden Wirkungscomponenten hat man:

$$X = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial \alpha}}{a_1} - \frac{\frac{\partial V_2}{\partial \alpha}}{a_2},$$

$$Z = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial \gamma}}{a_1} - \frac{\frac{\partial V_2}{\partial \gamma}}{a_2}.$$

Dabei ist also allgemein:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \alpha}}{a} = -\int_0^{\infty}\int_0^{2} \frac{d\varphi \,.\, dz\,(\alpha + a\cos\varphi)}{[a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man nach z integrirt:

$$\frac{\frac{\partial V}{d\alpha}}{a} = -\int_0^{2\pi} \frac{(\alpha+a\cos\varphi)}{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi}\left[1+\frac{\gamma}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2}}\right]d\varphi.$$

Nun ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\alpha+a\cos\varphi)\,d\varphi}{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi} = 2\int_0^{\pi} \frac{(\alpha+a\cos\varphi)\,d\varphi}{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi}$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\pi} \log\,(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi)\,d\varphi,$$

oder:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\alpha+a\cos\varphi)\,d\varphi}{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi} = 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\pi} \log\left[1+\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2+2\left(\frac{\alpha}{a}\right)\cos\varphi\right]d\varphi.$$

Aber bekanntlich ist:

$$\int_0^{\pi} \log\left[1+\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2+2\left(\frac{\alpha}{a}\right)\cos\varphi\right]$$

gleich Null oder gleich $2\pi\log\frac{\alpha}{a}$ je nachdem α beziehungsweise kleiner oder grösser ist als a; folglich ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\alpha+a\cos\varphi)\,d\varphi}{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi}$$

gleich Null oder gleich $\frac{2\pi}{\alpha}$; also jedenfalls von a unabhängig. Wenn man jedoch die Form von X betrachtet, so erscheint sie als eine Differenz, in deren beiden Theilen dieser nämliche (weil von a unabhängige) Werth 0 oder $\frac{2\pi}{\alpha}$ vorkommen und sich also wegheben wird.

Wir können daher, dies bemerkt,

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \alpha}}{a} = -\gamma \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha + a\cos\varphi)\, d\varphi}{(a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi)\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2}}$$

setzen.

Dieses Integral geht aber aus dem Seite 429 entwickelten, mit U bezeichneten hervor, wenn man, den Factor a in $-\gamma$ umwandelnd, a und α vertauscht.

Dies giebt sonach:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \alpha}}{a} = \frac{2\gamma}{a} \frac{\left[\frac{\alpha - a}{\alpha + a} \Pi_0 - K\right]}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}}.$$

Die X-Componente wird nun durch Einsetzung der Grenzen a_1 und a_2 in den rechter Hand stehenden Ausdruck erhalten.

Besonders erwähnungswerth ist der Fall, wo der Ringstrom ein voller, d. h. wo $a_1 = 0$ wird.

Dann wird auch $k^2 = 0$ und $h = 0$ und folglich in diesem Falle:

$$\lim . \frac{\frac{\partial V_1}{\partial \alpha}}{a_1} = \frac{-2\pi\gamma}{\alpha\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}.$$

Zur Berechnung der Componente Z hat man allgemein:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \gamma}}{a} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(z-\gamma)\, dz\, .\, d\varphi}{[a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn man nach z integrirt:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \gamma}}{a} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+\gamma^2}},$$

oder:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \gamma}}{a} = \frac{4K}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}}.$$

Die Componente Z selbst wird erhalten, wenn man rechts für a die Grenzen a_1 und a_2 einsetzt.

Insbesondere für eine Stromscheibe ($a_1 = 0$) wird, wenn man statt a_2 nur a schreibt:

$$Z = \frac{4K}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\gamma^2}}.$$

Der Fall der Stromscheibe ist deshalb bemerkenswerth, weil das Potential derselben, wie man sich leicht überzeugt, unstetig ist.

Denn setzt man in den Ausdruck für S $a_1=0$ und schreibt a statt a_2, so ergiebt sich:

$$S=-\int_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\, dz}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2}}+\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\, dz}{\sqrt{\alpha^2+(z-\gamma)^2}}.$$

oder:

$$S=-\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\, dz}{\sqrt{a^2+\alpha^2+2a\alpha\cos\varphi+(z-\gamma)^2}}+2\pi\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2+(z-\gamma)^2}}.$$

Das Integral:

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\alpha^2+(z-\gamma)^2}}$$

hat aber, wie man sieht, den Werth ∞.

Die Componenten behalten jedoch, wie gezeigt wurde, für $a_1=0$ vollkommen bestimmte stetige Werthe.

Prag, im Jannar 1868.

Kleinere Mittheilungen.

XXI. Note über die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$1)\quad \frac{d^n z}{dx^n} + P_1 \frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + P_2 \frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots + P_{n-1} \frac{d^n z}{dx\, dx^{n-1}} + P_n \frac{d^n z}{dy^n} = Q,$$

wo P_1, P_2, ... P_{n-1}, P_n, Q gegebene Functionen der unabhängigen Variablen x und y sind.

1. Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ n unbekannte Functionen der unabhängigen Variablen x und y bedeuten, und man setzt

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} P_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n = S_{n,1} = S_{n-1,1} + \varphi_n \\ P_2 = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \ldots\ldots\ldots = S_{n,2} = S_{n-1,2} + \varphi_n S_{n-1,1} \\ P_3 = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\varphi_4 + \ldots\ldots = S_{n,3} = S_{n-1,3} + \varphi_n S_{n-1,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{n-1} + \ldots\ldots = S_{n,n-1} = S_{n-1,n-1} + \varphi_n S_{n-1,n-2} \\ P_n = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n \qquad\qquad = S_{n,n} = \varphi_n S_{n-1,n-1} \end{array}\right.$$

so sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ als Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$3)\quad \varphi^n - P_1\varphi^{n-1} + P_2\varphi^{n-2} - \ldots (-1)^{n-1}P_{n-1}\varphi + (-1)^n P_n = 0$$

bestimmt.

Durch Einsetzung der Ausdrücke 2) für die Coefficienten $P_1, P_2 \ldots P_n$ in die vorgelegte Differentialgleichung 1) erhält man

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^n z}{dx^n} + S_{n,1}\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + S_{n,2}\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots \\ \quad \ldots + S_{n,n-1}\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} + S_{n,n}\frac{d^n z}{dy^n} = Q, \end{array}\right.$$

oder

$$\frac{d^n z}{dx^n} + (S_{n-1,1} + \varphi_n)\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + \ldots + \varphi_n S_{n-1,n-1}\frac{d^n z}{dy^n} = Q,$$

oder endlich

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^n z}{dx^n} + S_{n-1,1}\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + S_{n-1,2}\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots + S_{n-1,n-1}\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} \\ \quad + \varphi_n\left(\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + S_{n-1,1}\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots + S_{n-1,n-1}\frac{d^n z}{dy^n}\right) = Q. \end{array}\right.$$

Falls nun in der Differentialgleichung 5) die Coefficienten $S_{n-1,1}$, $S_{n-1,2}$, $S_{n-1,3} \ldots\ldots S_{n-1,n-1}$ von einer solchen Beschaffenheit sind, dass sie folgende $n-1$ Bedingungen:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dS_{n-1,1}}{dx}+\varphi_n\frac{dS_{n-1,1}}{dy}=0,\\ &\frac{dS_{n-1,2}}{dx}+\varphi_n\frac{dS_{n-1,2}}{dy}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dS_{n-1,n-1}}{dx}+\varphi_n\frac{dS_{n-1,n-1}}{dy}=0\end{aligned}\right.$$

erfüllen, so kann man 5) unter der Form

$$7)\quad \frac{dQ_1}{dx}+\varphi_n\frac{dQ_1}{dy}=Q$$

schreiben, wo

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+S_{n-1,1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}dy}+S_{n-1,2}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-3}dy^3}+\ldots\\ &\qquad\ldots+S_{n-1,n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=Q_1.\end{aligned}\right.$$

Man ersieht hieraus, dass, insofern die Bedingungen 6) erfüllt sind, das Integral Q_1 die Gleichung 7) auf eine Differentialgleichung 8) zurückführt, deren Ordnung um eins kleiner ist, als die der vorgelegten Gleichung 1).

Um die Gleichung 7) zu integriren, bedienen wir uns hier eines von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Verfahrens, indem wir für y eine neue unabhängige Variable y_1 einführen, dergestalt, dass y_1 durch die Function von x und y bestimmt ist, welche das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=\varphi_n$$

darstellt, wenn dieses Integral unter der Form

$$y_1=c$$

geschrieben wird, wo c die willkürliche Constante bedeutet. Es reducirt sich nämlich die Gleichung 7) auf die Form

$$\frac{dQ_1}{dx}=Q,$$

wo Q jetzt eine Function von x und y_1 ist.

Integrirt man diese Gleichung mit Rücksicht auf x, indem y_1 als constant betrachtet wird, und fügt man eine willkürliche Function von y_1 hinzu, ergiebt sich

$$Q_1=\int Q\,dx+f(y_1),$$

wo f die willlküriche Function bezeichnet.

Die Differentialgleichung 8) erhält also die Form

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + S_{n-1,1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}dy} + \ldots + S_{n-1,n-1}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} \\ &= \int Q\,dx + f(y_1) = Q_1; \end{aligned} \right.$$

da aber die Coefficienten in dieser Gleichung dieselben Functionen von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$, als die Coefficienten in der ursprünglichen Gleichung 4) oder 1) von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ sind, und die linke Seite von 9) aus 4) erhalten werden kann, wenn man n mit $n-1$ vertauscht, so ist klar, dass man auch im Stande sein muss, die Gleichung 9) unter der Form

$$9')\quad \frac{dQ_2}{dx} + \varphi_{n-1}\frac{dQ_2}{dy} = Q_1$$

zu schreiben, wo

$$10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + S_{n-2,1}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-3}dy} + S_{n-2,2}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-4}dy^2} + \ldots \\ &\ldots + S_{n-2,n-2}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} = Q_2, \end{aligned} \right.$$

vorausgesetzt, dass die Bedingungen 6) erfüllt sind, wenn man darin n mit $n-1$ vertauscht, wodurch zugleich die Anzahl der Bedingungsgleichungen auf $n-2$ reducirt wird.

Das Integral Q_2 der Gleichung 9') wird somit zu einer Differentialgleichung 10) führen, welche um zwei Ordnungen niedriger ist, als die vorgelegte 1). Durch eine ähnliche Betrachtung mit Rücksicht auf die Differentialgleichung 10) gelangt man zu einer Gleichung von der Ordnung $n-3$ u. s. w., so dass eine auf diese Weise fortgesetzte Reduction zuletzt auf die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \varphi_1\frac{dz}{dy} = Q_{n-1}$$

führt, deren Integration die primitive Gleichung

$$z = Q_n$$

mit ihren zugehörigen willkürlichen Functionen giebt.

2. Aus dieser allgemeinen Betrachtung geht also hervor, dass, wenn die Bedingungen 6) bei der allmäligen Vertauschung der Indices n mit $n-1$, $n-2 \ldots 2$ erfüllt sind, man sofort die Gleichungen:

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dQ_1}{dx} + \varphi_n\frac{dQ_1}{dy} = Q, \\ &\frac{dQ_2}{dx} + \varphi_{n-1}\frac{dQ_2}{dy} = Q_1, \\ &\frac{dQ_3}{dx} + \varphi_{n-2}\frac{dQ_3}{dy} = Q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dQ_{n-1}}{dx} + \varphi_2\frac{dQ_{n-1}}{dy} = Q_{n-2}, \\ &\frac{dz}{dx} + \varphi_1\frac{dz}{dy} = Q_{n-1} \end{aligned} \right.$$

aufschreiben kann. Aus diesen erhält man dann durch wiederholte Integration die primitive Gleichung

$$z = Q_n$$

mit ihren zugehörigen willkürlichen Functionen.

3. Die Bedingungsgleichungen 6) zeigen unmittelbar, dass sie für constante Werthe der Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ befriedigt sind.

Hat also die vorgelegte Gleichung die Form

$$\frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^n z}{dx^{n-1}\,dy} + a_2 \frac{d^n z}{dx^{n-2}\,dy} + \dots + a_{n-1} \frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} + a_n \frac{d^n z}{dy^n} = Q,$$

wo $a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1}, a_n$ gegebene constante Grössen sind und Q eine beliebige Function von x und y, so sind $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ als Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$\varphi^n - a_1 \varphi^{n-1} + a_2 \varphi^{n-2} - \dots (-1)^{n-1} a_{n-1} \varphi + (-1)^n a_n = 0$$

bestimmt.

In diesem Falle werden die Gleichungen 11) integrabel, und durch wiederholte Integration gelangt man zu der primitiven Gleichung

$$z = \int^{(n)} Q\,dx^n + f_1(y - \varphi_n x) + f_2(y - \varphi_{n-1} x) + \dots + f_n(y - \varphi_1 x),$$

wo $f_1, f_2 \dots f_n$ die n willkürlichen Functionen bezeichnen.

Beispiel:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 3 \frac{d^2 z}{dx\,dy} + 2 \frac{d^2 z}{dy^2} = x + y.$$

Hierin sind φ_1 und φ_2 durch die quadratische Gleichung

$$\varphi^2 - 3\varphi + 2 = 0$$

bestimmt.

Diese giebt $\varphi_1 = 2$ und $\varphi_2 = 1$ oder umgekehrt, wodurch die Gleichungen 11) in die folgenden übergehen:

$$\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_1}{dy} = x + y,$$

$$\frac{dz}{dx} + 2\frac{dz}{dy} = Q_1.$$

Führt man nun in die erste von diesen anstatt y eine neue, durch die Gleichung $y_1 = y - x$ bestimmte unabhängige Variable ein, erhält man

$$\frac{dQ_1}{dx} = 2x + y,$$

mithin

$$Q_1 = xy + f(y - x).$$

Die zweite Gleichung wird folglich

$$\frac{dz}{dx} + 2\frac{dz}{dy} = xy + f(y - x).$$

Setzt man hierin anstatt y eine neue unabhängige Variable $y_1 = y - 2x$, findet man

$$\frac{dz}{dx} = xy_1 + 2x^2 + f(y_1 + x),$$

woraus man durch Integration erhält

$$z = \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{3}x^3 + f_1(y - x) + f_2(y - 2x).$$

Kopenhagen, 11. August 1868. Dr. phil. CAMILLO TYCHSEN.

XXII. Zweite Mittheilung aus Thomson and Tait, A treatise on natural philosophy. Von Dr. W. KRUMME, Oberlehrer an der Realschule zu Duisburg.

Anziehung einer homogenen dünnen Kugelschale auf ein Element der Schale selbst. Das in P gelegene Element der Kugelschale (Tafel II, Fig. 1) habe den Inhalt σ. Ein Kegel, der P zur Spitze hat und dessen Oeffnung ω ist, schneidet bei H aus der Schale ein Element H heraus, welches nach dem Früheren

$$\frac{\omega\, PH^2}{\cos CHP}$$

zum Inhalt hat. Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit der Kugelschale, so ist die Anziehung des Elementes H auf P in der Richtung HP

$$\frac{\varrho\,\omega\, PH^2}{\cos CHP} \cdot \frac{\varrho\,\sigma}{PH^2} = \frac{\omega}{\cos CHP} \cdot \varrho^2 \sigma.$$

Die Anziehung der ganzen Schale auf P hat aus Gründen der Symmetrie die Richtung PC. Die von H auf P ausgeübte Anziehung hat nach der Richtung PC die Componente

$$\omega\,\varrho^2\,\sigma.$$

Die Anziehung der ganzen Schale auf das Element σ ist also

$$\varrho^2\,\sigma\,\Sigma\omega = 2\pi\varrho^2\sigma = A.$$

Denn $\Sigma\omega$ bezeichnet die Summe der Elemente einer Kugelfläche vom Radius 1 und dem Mittelpunkt P, die auf derselben Seite einer in P an die Kugel gelegten Tangentialebene liegen. $\Sigma\omega$ ist also 2π.

Die Anziehung derselben Kugelschale auf einen ausserhalb gelegenen, aber der Oberfläche nahen Punkt von der Masse $\varrho\sigma$ (Masse des Elementes σ) ist nach dem Früheren $4\pi\varrho^2\sigma = A'$:

$$A' = 2A.$$

Anziehung einer dünnen Kugelschale auf einen Punkt P, wenn die Dichtigkeit eines jeden Punktes der Schale der 3ten Potenz seiner Entfernung von einem nicht mit dem Mittelpunkt zusammenfallenden Punkte S umgekehrt proportional ist. Dieser Fall hat ein hervorragendes Interesse, weil er in einigen der wichtigsten elementaren Probleme aus der Elektricitätslehre seine Anwendung findet.

a) P und S sind durch die Kugelschale getrennt.

Der Punkt P kann innerhalb (Taf. II, Fig. 1) und ausserhalb (Fig. 2) liegen. Ausdrücke, die sich für beide Figuren verschieden gestalten, sollen als Marke diejenige Figur erhalten, worauf sie sich beziehen. Der Kugelradius werde mit a, der Abstand des Punktes S vom Kugelmittelpunkt mit f bezeichnet.

Man verbinde S mit P und nehme auf SP oder seiner Verlängerung den Punkt T so, dass

$$\text{(Fig. 1)}\ SP.ST = f^2 - a^2; \quad \text{(Fig. 2)}\ SP.TS = a^2 - f^2.$$

Durch T lege man eine beliebige Gerade, welche die Kugel in K und K' schneidet, verbinde K und K' mit S und bezeichne die resp. Schnittpunkte mit der Kugeloberfläche mit E und E'.

Die ganze Kugelschale werde in Paare von Elementen zerlegt, deren Umfänge auf Kegelflächen liegen, die P zur gemeinschaftlichen Spitze haben. K und K' seien zwei solche an den Endpunkten der Sehne KK' gelegene Elemente; ihr Kegel habe die Oeffnung ω. Die Kegel, welche entstehen, indem man eine durch S gehende Gerade sich längs des Umfangs von K resp. K' bewegen lässt, mögen aus der Kugelschale die Elemente E resp. E' herausschneiden. Hierdurch zerlegt man die Kugelschale in Paare von Elementen E und E'; denn man sieht leicht, dass wenn alle Paare von Elementen K und K' genommen worden sind, die Summe der Elemente E und E' die ganze Kugelfläche ergiebt und dass kein Element zweimal vorkommt. Die Anziehung der ganzen Kugelschale auf P ist also die Resultirende der Anziehungen aller Elementenpaare E und E' auf P.

Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit im Punkte E und F die Anziehung E auf P, so ist

$$F = \frac{\varrho E}{EP^2}.$$

Nach dem vorausgesetzten Dichtigkeitsgesetz ist, unter λ eine Constante verstanden,

$$\varrho = \frac{\lambda}{SE^3}.$$

Die Gerade SEK hat in den beiden Durchschnittspunkten mit der Kugel gleiche Neigung gegen dieselbe, also ist

$$E = \frac{SE^2}{SK^2} \cdot K = \frac{SE^2}{SK^2} \cdot \frac{2a\omega TK^2}{KK'}$$

und deshalb

$$F = \frac{\frac{\lambda}{SE^3} \cdot \frac{SE^2}{SK^2} \cdot \frac{2a\omega TK^2}{KK'}}{EP^2} = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{TK^2}{SE.SK^2.EP^2} \cdot \omega.$$

In dem grössten Kreise, dessen Ebene SK aufnimmt, ist

$$\text{(Fig. 1)}\ SK.SE = f^2 - a^2 \text{ und (Fig. 2)}\ SK.SE = a^2 - f^2.$$

Demnach ist $SK.SE = SP.ST$ und folglich sind die Dreiecke KST und PSE ähnlich. Hieraus ergiebt sich

$$TK:SK = PE:SP$$

und

$$\frac{TK^2}{SK^2 . EP^2} = \frac{1}{SP^2}.$$

Der Ausdruck für F geht durch diese Substitution über in

$$F = \lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{1}{SE . SP^2} \cdot \omega,$$

dem man auch die Form geben kann

$$\text{(Fig. 1)}\ F = \lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\, SP^2} . SK \text{ und}$$

$$\text{(Fig. 2)}\ F = \lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\, SP^2} . KS.$$

Gleicherweise ergiebt sich für die Anziehung von E' auf P

$$\text{(Fig. 1)}\ F' = \lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\, SP^2} . SK' \text{ und}$$

$$\text{(Fig. 2)}\ F' = \lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\, SP^2} . K'S.$$

Also $F:F' = SK:SK'$.

Es ist gezeigt worden, dass $\angle TKS = \angle EPS$; ganz in derselben Weise folgt $\angle TK'S = \angle E'PS$. Zieht man $KK'' \parallel SK'$ und $K'K'' \parallel SK$, so ist

$$F:F' = KS:KK''$$
$$\angle SKK'' = \angle EPE'.$$

Die Resultirende von F und F' muss also gegen diese Einzelkräfte dieselbe Lage haben, wie KK' gegen KS und KK''. Hieraus ergiebt sich:

Die Resultirende der von E und E' auf P ausgeübten Anziehungen geht durch S und hat zu den Einzelkräften F und F' dasselbe Verhältniss, wie KK' zu den Seiten KS und $K'S$ des Dreiecks SKK'.

Die Grösse der Resultirenden ist mit Berücksichtigung des letzten Theiles dieses Satzes:

$$\lambda \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 \sim a^2)\, SP^2} . KK' \text{ oder } \frac{\lambda . 2a . \omega}{(f^2 \sim a^2)\, SP^2}.$$

(Anmerkung: $f^2 \sim a^2$ bedeutet Differenz zwischen f^2 und a^2.)

Die Gesammtanziehung auf P ist also

$$\frac{\lambda . 2a}{(f^2 \sim a^2)\, SP^2} . \Sigma\omega = \frac{\lambda . 4\pi a}{(f^2 \sim a^2)\, SP^2}.$$

Die Anziehung der ganzen Kugelschale auf P ist demnach dieselbe, als wenn die Masse $\frac{\lambda . 4\pi a}{f^2 \sim a^2}$ im Punkte S concentrirt wäre.

b) P und S liegen beide innerhalb oder beide ausserhalb der Kugelfläche.

Unter C (Taf. IV, Fig. 7) den Mittelpunkt der Kugel verstanden, nehme man auf CS oder seiner Verlängerung einen Punkt S_1, so, dass $CS.CS_1 = a^2$.

Verbindet man C mit E, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CES und CES_1, dass für jeden Punkt der Kugelfläche

$$\frac{SE}{SE_1} = \frac{f}{a}.$$

Hieraus folgt $\frac{\lambda}{SE^3} = \frac{\lambda a^3}{f^3 S_1 E^3}$. Ist ϱ die elektrische Dichtigkeit im Punkt E, so hat man

$$\varrho = \lambda \frac{\frac{a^3}{f^3}}{S_1 E^3} = \frac{\lambda_1}{S_1 E^3}, \text{ wenn } \lambda_1 = \lambda \frac{a^3}{f^3}.$$

Nach den Ausführungen unter a) hat also die Anziehung der Kugelschale auf P die Richtung $S_1 P$ und erfolgt gerade so, als ob die Masse $\frac{\lambda_1 4\pi a}{f_1^2 \sim a^2}$ im Punkte S_1 concentrirt wäre. Setzt man statt λ_1 und f_1 ihre Werthe $\frac{\lambda a^3}{f^3}$ und $\frac{a^2}{f}$, so hat man für die in S_1 concentrirt zu denkende Masse

$$\frac{\lambda \frac{a}{f} . 4\pi a}{a^2 \sim f^2}.$$

Wird eine Kugel so elektrisirt, dass die elektrische Dichtigkeit jedes Punktes der Oberfläche der 3ten Potenz der Entfernung dieses Punktes von einem innerhalb der Kugel gelegenen Punkte S umgekehrt proportional ist, so zieht sie einen äussern Punkt so an, als ob ihre ganze Elektricität in S concentrirt wäre. Die Anziehung auf einen innern Punkt ist dieselbe, als ob eine im Verhältniss a zu f grössere Elektricitätsmenge in einem Punkte S_1 concentrirt wäre, der auf der Verlängerung von CS liegt und mit S durch die Relation $CS.CS_1 = a^2$ verbunden ist.

Die Dichtigkeit in E, Fig. 4, sei wie vorhin $\frac{\lambda}{SE^3}$. Betrachten wir die Elemente E und E', die aus der Kugelschale durch einen Doppelkegel herausgeschnitten werden, dessen Spitze S und dessen Oeffnung ω ist, so hat man für die Inhalte der Elemente E und E bezüglich $\frac{\omega . 2a . SE^2}{EE'}$ und $\frac{\omega . 2a . SE'^2}{EE'}$.

Die beiden Elemente haben die Elektricitätsmenge

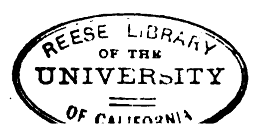
$$\frac{\lambda 2a\omega}{EE'} \cdot \left(\frac{1}{SE} + \frac{1}{SE'}\right) = \frac{\lambda 2a\omega}{SE'.SE}.$$

$SE \,.\, SE'$ hat für alle durch S gehende Geraden den constanten Werth $a^2 - f^2$. Für die ganze Elektricitätsmenge findet man also den Ausdruck

$$\frac{\lambda \,.\, 4\pi a}{a^2 - f^2}.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck mit m, so sind nach dem Obigen die Elektricitätsmengen, die in S oder S_1 concentrirt gedacht werden müssen, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegt, bezüglich

$$m \text{ und } \frac{a}{f} m.$$



Druckfehler im Supplementhefte 1868.

Seite 117 Zeile 15 v. o. lies $\frac{2025}{1012}$ statt $\frac{2025}{2048}$,
„ 119 „ 8 v. o. „ 52607 statt 52637,
„ 135 „ 12 v. u. „ $\underline{fis}+$ statt $\underline{Ges}+$,
„ 138 „ 15 v. o. „ $m+nq+pt$ statt $m+np+pt$,
„ 139 „ 19 v. u. „ 07682 statt 07681.



XV.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von

Professor Dr. EDUARD ZETZSCHE.

V. Die unterseeische Telegraphie.

(Dritte Abtheilung.)

(Hierzu Tafel V, Fig. 38—67.)

Nach der im vorhergehenden Aufsatze erfolgten Besprechung der Herstellung, Prüfung und Versenkung der Unterseeleitung wenden wir uns zur

III. Benutzung der unterseeischen Leitung zum Telegraphiren

und haben dabei zunächst das elektrische Verhalten unterseeischer Taue zu betrachten, darauf aber die auf Unterseelinien verwendeten Telegraphenapparate.

1. Das elektrische Verhalten unterseeischer Telegraphentaue.

Jeder im Wasser oder in feuchter Erde liegende Telegraphendraht bildet bekanntlich eine Art Leydener Flasche und Siemens nannte deshalb solche Drähte Flaschendrähte; die Isolirschicht des Drahtes entspricht nämlich dem Glas der Flasche, der Leitungsdraht bildet die eine, die metallene Schutzhülle oder die umgebende Feuchtigkeit dagegen die andere Belegung. Jede in dem Leitungsdrahte auftretende Elektricität muss daher vertheilend auf die äussere Hülle wirken, dadurch aber selbst gebunden werden und es muss demnach die Fortpflanzung eines elektrischen Stroms im Leitungsdrahte wesentlich verlangsamt werden; die ersteren Erscheinungen bezeichnet man als die Ladungserscheinungen, die letztere nennt man die Verzögerung des Stroms. Schon im Jahre 1848 wurden diese Erscheinungen von Siemens und Halske einerseits und von Kramer andererseits bei Anlegung der unterirdischen

Leitungen von Berlin nach Frankfurt a. M. und von Berlin nach Köln beobachtet; Dr. A. Kramer deutete sie zuerst als Ladungserscheinungen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 137), Dr. Werner Siemens untersuchte sie weiter und veröffentlichte einen am 18. Jan. 1850 gehaltenen Vortrag in Poggendorff's Annalen (Bd. 79 S. 481; Delamarche, Elemente der unterseeischen Telegraphie S. 14), und fast gleichzeitig machte Guillemin Mittheilungen über diesen Gegenstand (Poggendorff's Annalen, 79 S. 333). Weitere Untersuchungen von Siemens finden sich in dessen der Pariser Akademie vorgelegtem und unter demselben Titel 1851 auch besonders erschienenen Aufsatze: *Mémoire sur la télégraphie électrique* (vgl. Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 138), in Poggendorff's Annalen (Bd. 102 S. 66) und in der Zeitschr. d. Tel.-Ver. (6, S. 97). Da die Ladungserscheinungen seitdem wiederholt ausführlich besprochen worden sind (vgl. Dub, Anwendung des Elektromagnetismus S. 183—191 und S. 233; Schellen, der elektromagnetische Telegraph, 4. Aufl. S. 244—268; *Du Moncel, traité de télégraphie électrique*, S. 55 und 264—277), so können wir uns hier auf eine kurze Erwähnung der für die Einrichtung der Telegraphenapparate wichtigen Erscheinungen beschränken.

Wird ein gut isolirter unterseeischer Leitungsdraht ab an dem einen Ende b isolirt, an dem andern Ende a mit dem einen Pole P_1 einer Batterie verbunden, während der andere Pol P_2 mit der Erde verbunden ist, so durchläuft den Draht ein kurz andauernder Ladungsstrom in der Richtung von a nach b; trennt man das Ende a des geladenen Drahtes ab von dem Batteriepole P_1 und verbindet es dafür mit der Erde, so wird der Draht in der Richtung von b nach a von dem ungefähr gleich starken Entladungsstrome oder Rückstrome durchlaufen; trennt man dagegen das Ende a des geladenen Drahtes ab von dem Pole P_1 und verbindet dafür das Ende b mit der Erde, so hat der eben so starke Entladungsstrom jetzt die Richtung von a nach b. Ist das Ende b vom Anfang an nicht isolirt, sondern mit der Erde verbunden, so wird der Strom der bei a eingeschalteten Batterie bei b erst nach der erfolgten Ladung des Drahtes wahrnehmbar; wird nach der Ladung a isolirt, so tritt der Entladungsstrom bei b aus.

Die umfassendsten Versuche über die Ladung haben Faraday (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 126 und 2, S. 101) und Charles Wheatstone (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 152) angestellt. Prof. Faraday benutzte einen 100 englische Meilen langen Kupferdraht von $1/16$ Zoll Durchmesser mit einem etwa $1/10$ Zoll dicken Guttaperchaüberzug, welcher in 200 unter sich verbundenen Rollen von je $1/2$ Meile Länge zu beiden Seiten eines auf einem Kanale schwimmenden Fahrzeugs, in das Wasser eintauchend, aufgehängt war; weitere 100 Meilen desselben Drahtes waren auf dem Fussboden eines trockenen Speichers aufgehäuft. Die Batterie enthielt 360 Paare von Platten zu je 3 und 4 Zoll Länge und Breite. Die Oberfläche

des Kupferdrahtes betrug 8300, die der Wasserbelegung 33000 Quadratfuss. Faraday und Latimer & Clark experimentirten ferner auf 8 unterirdischen Leitungen zwischen London und Manchester, in einer Gesammtlänge von 1500 englischen Meilen. Prof. Wheatstone stellte seine Versuche an dem 110 englischen Meilen langen, für die Mittelmeerlinie Spezzia-Corsica-Sardinien bestimmten Tau an, dessen 6 Kupferdrähte von $^1/_{16}$ Zoll Durchmesser je $^1/_{10}$ Zoll dick mit Guttapercha überzogen waren, während die $^1/_3$ Zoll dicke Schutzhülle aus 12 Eisendrähten bestand.

Whitehouse, der Physiker der transatlantischen Compagnie, machte Versuche mit einem 200 Kilometer langen unterirdischen und einem eben so langen unterseeischen Drahte und fand bei ersterem eine Verzögerung von $^1/_8$, bei letzterem von $^1/_4$ Secunde (Delamarche, Elemente, S. 17). Bei neueren Versuchen, welche Varley mit einer aus mehreren Widerstandsrollen gebildeten Leitung anstellte, deren Widerstand dem von 13000 Meilen Kabel gleichkam, zeigte die Magnetnadel des Galvanometers am Ende der Leitung erst nach 10 Secunden eine merkliche Ablenkung (Schellen, d. atlant. Kabel S. 133). Varley zeigte an dieser künstlichen Leitung durch ein- und auszuschaltende Condensatoren zugleich den Einfluss der elektrischen Vertheilung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Dauer der Entladung gegenüber der einfachen Ladung und Entladung des Drahtes. Bei Faraday's Versuchen brauchte eine elektrische Welle zum Durchlaufen der 1500 englische Meilen langen unterirdischen Leitung 2 Secunden, während bei einer gleich langen Luftleitung die Zeitdauer des Durchgangs kaum messbar war (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, Seite 133). Um das atlantische Tau zu durchlaufen, brauchte der Strom 0,31 Secunde. Nach Siemens (Poggendorff's Annalen 102, Seite 66) steht die elektrostatische Induction und die Verzögerung des Stroms in Flaschendrähten im Verhältniss der Quadrate der Drahtlängen.

Wegen der Verzögerung des Stroms kann man auf langen Unterseeleitungen nur langsam arbeiten; dagegen kommen die Apparate bei den Unterseeleitungen, obgleich deren Leitungsfähigkeit um ¼ geringer ist, mit schwächeren Batterien in gleich schnellen Gang, wie oberirdische mit stärkeren, da die im Drahte gebundene Elektricität sich auf der ganzen Oberfläche vertheilt und demnach nur ein kleiner Theil den Widerstand des ganzen Drahtes zu überwinden hat. Sehr störend sind die auftretenden Entladungsströme und deshalb müssen die Apparate den Wirkungen derselben entzogen werden; das Mitsprechen des eigenen Relais ist bei der directen Correspondenz von geringerer Bedeutung und liesse sich z. B. bei Anwendung von Inductionsrelais durch entsprechende Schaltung der Batterien umgehen*); allein der kräftige Rückstrom macht das Relais eine

*) Auf der Cagliari-Malta-Corfu-Linie wurde das Relais durch einen besonderen Umschalter während des Sprechens aus der Leitung ausgeschaltet; blieb die

Zeit lang für von der andern Station kommende Telegraphirströme unempfindlich. Bei Translation werden die Schwierigkeiten noch grösser. Matzenauer schlug zur Beseitigung derselben vor, den Tasterhebel oder den die Translation besorgenden Morse-Schreibhebel während seiner Bewegung vorübergehend mit der Erdleitung in Verbindung zu setzen (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 95).

Die Grösse der Ladung einer Unterseeleitung kann 30—40 Mal so gross sein, als bei einer gleich langen oberirdischen; sie hängt ab von der Dicke des Leitungsdrahtes und seiner isolirenden Hülle, von der Natur des Isolationsmittels; sie wächst mit der Stärke der Batterie und mit der Dauer der Berührung der Leitung und des Batteriepoles. Bei rasch vorübergehender Berührung ist die Ladung bei Leitungsdrähten der verschiedensten Art fast immer dieselbe. Gaugain nimmt daher eine zweifache Ladung an: eine momentane, von der isolirenden Substanz unabhängige, durch eine Wirkung in die Ferne erzeugte seitliche Condensation oder Ladung, und eine langsamer erfolgende, von Atom zu Atom durch die isolirende Substanz fortschreitende, also durch molekulare Wirkung erzeugte. Beim Telegraphiren dauert die Berührung so lange, dass letztere auftritt, die Ladung also dem specifischen Vertheilungsvermögen des Isolirmittels proportional ist. Dieses ist bei Luft = 1, Glas 1,76, Schellack 2, Schwefel 2,24, Kautschuk 2,8, Guttapercha 3,8 (Schellen, elektromagn. Tel. 4. Aufl. S. 251). — Die Grösse der Ladung ist dem Strome proportional, der sich von dem Leitungsdrahte durch die isolirende Schicht nach der Kabelhülle bewegt. Nach dem Ohm'schen Gesetze hat man für die Ströme S und S_1 von n und n_1 gleichen Elementen bei den Widerständen w und w_1

$$S : S_1 = \frac{n}{w} : \frac{n_1}{w_1};$$

da nun der Widerstand des Drahtes und der Batterie gegen den Widerstand der isolirenden Hülle $\left(\text{vom specifischen Leitungswiderstand } \frac{1}{\lambda}\right)$ verschwindet, für letztere aber (d. 2. Abth. S. 17; Pogg. Annalen 102, S. 103)

$$V = \frac{lognat \frac{R}{r}}{2\pi\lambda l}$$ gefunden wurde, so ergiebt sich

$$S : S_1 = \frac{n}{V} : \frac{n_1}{V_1} = \frac{n\lambda l}{lognat \frac{R}{r}} : \frac{n_1 \lambda_1 l_1}{lognat \frac{R_1}{r_1}},$$

woraus die Gesetze der Ladung und Entladung*) zu entnehmen sind.

Leitung Cagliari-Malta nach jeder Stromgebung isolirt (durch Isolation des Ruhecontacts im Taster), so wurden die Zeichen sehr unregelmässig. Delamarche, Elemente, S. 15 und 16.

*) *Du Moncel (traité*, S. 272) hebt noch besonders hervor, dass das Leitungs-

Ständen bei zwei Tauen von gleichem Isolirmittel ($\lambda = \lambda_1$) die Drahthalbmesser r und r_1 in demselben Verhältnisse, wie die Halbmesser R und R_1 der isolirenden Hülle, so würde

$$S : S_1 = nl : n_1 l_1$$

d. h. die Ladungen sind bei gleichen Längen l und l_1 der Zahl der Elemente oder der Spannung der Batterie, bei einer und derselben Batterie dagegen der Länge der Taue proportional. — Wäre dagegen $n = n_1$, $l = l_1$ und $\lambda = \lambda_1$, so würde

$$S : S_1 = lognat \frac{R_1}{r_1} : lognat \frac{R}{r}.$$

Da die obige allgemeine Formel für $S : S_1$ einen unbequemen Werth für S oder für die Ladung liefert, so hat **Wheatstone** aus Versuchen an Unterseetauen die bequemere Formel

$$S = B \sqrt{\frac{r}{d}}$$

abgeleitet, worin B einen für dasselbe Tau constanten Coefficienten, r den Halbmesser des Leitungsdrahtes und d die Dicke der Isolirschicht bedeutet (**Schellen**, elektromagn. Telegr. 4. Aufl. S. 254). Da nun die Stromstärke mit dem Quadrate, die Ladung nur mit der Quadratwurzel des Drahthalbmessers wächst, so ist es wirksamer, den Drahthalbmesser, als die Dicke der Isolirschicht zu vergrössern; denn diese hat auf die Stromstärke keinen Einfluss und die Ladung ist nur umgekehrt proportional der Quadratwurzel dieser Dicke. Eisendrähte würden eine weit dickere Isolirschicht erfordern, wenn bei gleicher Leitungsfähigkeit die Ladung nicht grösser werden sollte, als bei Kupferdrähten (*Du Moncel, traite*, S. 276 und 277).

Ist ein Flaschendraht geladen und man lässt seine Entladung durch eine Tangentenbussole gehen, so wirkt dieser Strom von sehr kurzer Dauer nach denselben Gesetzen wie ein horizontaler Stoss auf ein ruhendes Pendel, d. h. es ist die Kraft dem Sinus des halben Ausschlagswinkels α proportional (Pogg. Ann. 34, S. 392); bei zwei verschiedenen Tauen haben wir daher auch:

$$sin \frac{\alpha}{2} : sin \frac{\alpha_1}{2} = S : S_1 = \frac{n\lambda l}{lognat \frac{R}{r}} : \frac{n_1 \lambda_1 l_1}{lognat \frac{R_1}{r_1}},$$

oder bei $n = n_1$, $\lambda = \lambda_1$ und $R : R_1 = r : r_1$

---

vermögen des Metalls keinen Einfluss, Temperatur und Druck nur durch ihre Abänderung der Isolation Einfluss auf den Entladungsstrom haben, dass nach **Guillemin** die Zeit der Entladung eines ungefähr 100 Lieues langen Drahtes etwa 4 mal so gross ist, als die der Ladung, und dass ein isolirter Draht etwa doppelt so stark geladen wird, als ein zur Erde abgeleiteter; dass endlich die Ladung sehr schwach ist, wenn die äussere Hülle nicht mit der Erde verbunden ist.

$$l : l_1 = sin\frac{\alpha}{2} : sin\frac{\alpha_1}{2},$$

d. h. die Länge zweier Stücken desselben Taus verhalten sich wie die Sinus der halben Ausschlagswinkel, welche bei Entladungen entstehen, die aus der Ladung mittels derselben Batterie herrühren.

Wheatstone fand mittels eines Galvanometers mit astatischen, an einem Coconfaden ohne Torsion aufgehängten Nadeln bei einem Umwindungsdraht von 233 preuss. Fuss Länge und $^1/_{40}$ engl. Zoll Durchmesser in einem Tau von

	1 Meile	8 Meilen	16 Meilen Länge,
bei 16 Daniell'schen Elementen	0^0	$2{,}5^0$	5^0
„ 32 „ „	0	5	10
„ 64 „ „	0	10	20.
„ 128 „ „	2,5	20	41
„ 256 „ „	5	41	88
„ 512 „ „	10	88	88

Erscheint der Ladungsstrom nach den Zeiten t und t_1 an den Enden der beiden Taustücken von der Länge l und l_1, so ist:

$$t : t_1 = \frac{l^2}{r^2 \, lognat\frac{R}{r}} : \frac{l_1^2}{r_1^2 \, lognat\frac{R_1}{r_1}} \text{ *)}$$

(Zeitsch. d. Tel.-Ver. 6, S. 98) oder, falls wieder $R : R_1 = r : r_1$ wäre,

$$l^2 : l_1^2 = tr^2 : t_1 r_1^2.$$

Die Ladungszeiten sind also unabhängig von den Batterien.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit, mit welcher telegraphische Zeichen durch eine Leitung gegeben werden können, ist die von Faraday zuerst beobachtete Bildung elektrischer Ladungswellen im Kabeldraht zu berücksichtigen. Unterbricht man nämlich die Verbindung des Drahtes mit dem freien Pole der zur Erde abgeleiteten Batterie, so verbreitet sich die bisher im Drahte angesammelte ruhende Elektricität über den ganzen Draht und der Strom beginnt im Messinstrumente nach einiger Zeit. Kehrt man die Batterie um, anstatt sie zu unterbrechen, so fliesst die vorhergehende Ladung theils durch das Messinstrument, theils vereinigt sie sich mit der nachfolgenden entgegengesetzten Elektricität. Bei schnellem Batteriewechsel bilden sich in beliebiger Zahl**)

---

*) Aus $t = \frac{\varkappa l^2}{3 r^2 \lambda \, lognat\frac{R}{r}}$; vgl. 2. Abth. S. 18 u. Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 206. — Pogg. Ann. 102, S. 66 ff. — In der durch die Ladung verbrauchten Zeit liegt eine Ursache, weshalb die verschiedenen Messungen zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität so sehr von einander abweichende Werthe ergeben.

**) In langen Leitungen, wie die zwischen England und Amerika, konnte man 6 Wellen erhalten (*Du Moncel, traité,* S. 265).

Wellen, deren jede von der nachfolgenden entgegengesetzten verzehrt wird, sich aber dabei nach dem Ende hin bewegt und bei ausreichender Kraft das telegraphische Instrument bewegt. Wechseln lange und kurze Strömungen ab, so werden die kurzen Wellen von der vorhergehenden und folgenden leicht ganz oder über das praktisch zulässige Mass hinaus verzehrt (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 97).

Die Grösse der Ladung (Elektricitätsmenge), welche ein Leiter auf die Längeneinheit mittels eines elektrischen Motors von der Spannung 1 erhält, nennt man seinen Ladungscoefficienten, seine Inductions- oder elektrostatische Capacität; derselbe ist für das Telegraphiren auf weite Entfernungen von grosser Bedeutung. Da die Ströme S und S_1 offenbar den die Leiter von der Länge l und l_1 durchströmenden Elektricitätsmengen proportional sind, so erhält man bei den Ladungscoefficienten C und C_1

$$\sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\alpha_1}{2} = S : S_1 = Cln : C_1 l_1 n_1.$$

Lässt man anstatt eines einzigen Entladungsstosses mittels eines Unterbrechungsrades eine Reihe rasch hinter einander folgender Entladungen durch das Galvanometer (Sinusbussole) gehen, so nimmt dessen Nadel während der Ladungen und Entladungen eine feste Ablenkung β und β_1 an; diese ist abhängig von der den Galvanometerdraht durchströmenden Elektricitätsmenge, d. h. von der Zahl m und m_1 der Ladungen in 1 Minute und der Elektricitätsmenge, welche bei jeder Entladung durch den Draht geht. Dann wird

$$\sin\beta : \sin\beta_1 = Cnml : C_1 n_1 m_1 l_1.$$

Bei Tauen von sehr grosser Länge erfordert die Ladung einige Zeit; die vorstehenden Methoden setzen aber voraus, dass für beide Taue die volle Ladung in nahezu derselben Zeit erreicht werde. Bei nur einige Fuss langen Tauen erhält man nur bei rasch auf einander folgenden Ladungen und Entladungen in einer Bussole mit 20000 bis 30000 Umwindungen eine bemerkbare dauernde Nadelablenkung.

Als Einheit für den Ladungscoefficient wählt man die Ladung eines Condensators von 1 Quadratmeter Oberfläche, dessen ebenso grosse, zur Erde abgeleitete zweite Platte durch eine Luftschicht von 1 Millimeter von der ersten getrennt ist. Danach ist der Ladungscoefficient eines Taus, dessen 1,5 Millimeter dicker kupferner Leitungsdraht mit einer 4 Millimeter dicken Guttaperchaschicht bekleidet ist, etwa 8,6.

Bei oberirdischen Leitungen findet nach Siemens (Pogg. Ann. 102, S. 108) auch eine Ladung statt, nur ist sie wegen der grösseren Entfernung des Drahtes von der Erde sehr schwach; sie wächst mit der Oberfläche und mit der Stärke der Krümmung bei gleicher Oberfläche, aus dem ersteren überwiegenden Grunde wächst sie mit dem Halbmesser, aus dem zweiten nimmt sie mit dem Halbmesser ab.

Ein von einem Strome durchflossener (am Ende nicht isolirter) Leiter wird wegen der Ladung erst nach einiger Zeit einen dauernden elektrischen Zustand annehmen, obgleich die Elektricität fast augenblicklich am anderen Ende erscheint. Erst wenn der Draht vollständig geladen ist, geht der Strom regelmässig und in unveränderlicher Stärke durch den Draht. Die Dauer D des veränderlichen Zustandes ist bei 2 Leitern von gleicher Länge und gleichem Widerstande (oder Leitungsfähigkeit) proportional dem elektrischen Vertheilungsvermögen*) oder dem Ladungscoefficienten C. Mit der Länge l des Leiters wächst nicht blos die Ladung, sondern auch der von der Elektricität zu durchlaufende mittlere Weg; daher wächst die Dauer des veränderlichen Zustandes mit dem Quadrate der Länge. Sie wächst aber endlich auch im geraden Verhältniss zur Leitungsfähigkeit oder im umgekehrten zum Widerstande des Leiters; daher steht sie auch im umgekehrten Verhältnisse zu dem Querschnitte q des Leiters. Die elektromotorische Kraft der Batterie ist ohne Einfluss auf jene Dauer; denn wenn diese Kraft wächst, so wird zwar die Ladung eine schnellere, aber auch eine grössere und deshalb eine längere Zeit erfordernde**). Bei den specifischen Leitungsvermögen λ und λ_1 ist daher

$$D : D_1 = \frac{Cl^2}{\lambda q} : \frac{C_1 l_1^2}{\lambda_1 q_1}; \quad D = M\frac{Cl^2}{\lambda q}.$$

Bei gewöhnlichen eisernen Telegraphendrähten von 4 Millimeter Durchmesser und 500 Kilometer (etwa 65 Meilen) Länge, welche mittels der Isolirhüte auf Tragstangen in der Luft ausgespannt sind, schwankt die Dauer des veränderlichen Zustandes zwischen 0,014 und 0,022 Secunden, ist also im Mittel 0,018 Secunden. Bei einem Draht von 1 Meile Länge, aber von gleichem Widerstande ($l : l_1 = \lambda q : \lambda_1 q_1$) wäre demnach diese Dauer nur $0{,}018 : 65 = 0{,}0003$ Secunden; bei einem Drahte von der nämlichen Beschaffenheit, aber 100 Meilen Länge, würde die Dauer $100^2 = 10000$ so gross sein.

Nehmen wir nun nach der obigen Formel von Wheatstone die Ladung und damit auch den Ladungscoefficient proportional $\sqrt{r}$, so erhalten wir für den Draht von 4 Millimeter Durchmesser und 500 Kilometer Länge $C = \sqrt{2}$, $q = 4\pi$ und

$$0{,}018 = \frac{\sqrt{2} \cdot 500^2}{4\pi\lambda} \cdot M \text{ Secunden}$$

*) Nach Gaugain geben Schwefel und Gummilack zwar schnell eine starke Ladung, die vollständige Ladung wird aber viel später erreicht, als bei Guttapercha (*Du Moncel, traité*, S. 273).

**) Ueber die von Guillemin aufgestellten Gesetze, vgl. auch Dub, Anw. d. Elektromagn. S. 235, aus *Annales de chim. et de phys.* 60, S. 386. — Eine Vergrösserung der Dicke des Leitungsdrahtes wäre also auch aus diesem Grunde räthlich.

und daraus bei dem Halbmesser r Millimeter oder r_0 preuss. Linien und der Länge l Kilometer oder l_0 preuss. Meilen

$$D = \frac{\sqrt{r}\, l^2}{\lambda \pi r^2} . M = 0{,}018 . \frac{2\sqrt{2}}{r\sqrt{r}} . \frac{l^2}{500^2} = 0{,}018 . \frac{0{,}915\sqrt{0{,}915}}{r_0\sqrt{r_0}} . \frac{l_0^2}{65^2} \text{ Secunden.}$$

Bei $l = 500$ Kilometer findet man für $r = 1{,}5$ Millimeter $D = 0{,}027$ und für $r = 2{,}5$ Millimeter $D = 0{,}013$ Secunden.

Wie schon erwähnt, ist der Ladungscoefficient bei einem Unterseetau 30—40 mal so gross, als bei einer Luftleitung; wäre nun die Leitungsfähigkeit des Drahtes dieselbe, wie bei einem 4 Millimeter dicken Eisendraht, so wäre die Dauer des veränderlichen Zustandes bei 500 und 2000 Kilometern Länge $30 . 0{,}018 = 0{,}54$ und $4^2 . 0{,}54 = 8{,}64$ Secunden. Bei einem Unterseetau mit einem 1,5 Millimeter dicken Kupferdraht und einer 4 Millimeter dicken Guttaperchalage würde die Dauer des veränderlichen Zustandes nahe ebenso gross sein, wenn sie nicht dadurch noch verlängert würde, dass die Elektricität in die isolirende Schicht eindringt.*)

Bei einem am anderen Ende isolirten Leitungsdrahte erstreckt sich die Ladung blos auf die Oberfläche und ist in ihrer Grösse durch die Grösse und Gestalt dieser Oberfläche bedingt; die Ladung ist proportional der Drahtlänge, wenn die Isolation so gut ist, dass in allen Punkten dieselbe Spannung herrscht; sie wächst mit dem Umfange des Drahtes und ist proportional der Spannung oder der elektromotorischen Kraft der Batterie. Die Dauer des veränderlichen Zustandes ist 4 mal so gross als bei einer zur Erde abgeleiteten Leitung, erfolgt also bei Unterseetauen keineswegs augenblicklich und die gesammte Ladung kann deshalb bei langen Leitungen nicht durch einen Galvanometernadelausschlag beim ersten Erguss der Elektricität in den Draht gemessen werden, weil dieser als durch einen momentanen Stoss erzeugt anzusehen ist.

Die Dauer der Entladung eines geladenen Drahtes lässt sich nicht mit grösserer Genauigkeit angeben, als die der vollendeten Ladung; die Entladung durch beide zur Erde abgeleitete Drahtenden erfolgt in derselben Zeit wie die Ladung; ist aber blos ein Ende abgeleitet, das andere isolirt, so dauert die Entladung 4 mal so lange, als die Ladung. Bei Unterseetauen entladet sich die von Elektricität durchdrungene isolirende Schicht theils durch den Leitungsdraht, theils durch die äussere Schutzhülle, daher bemerkt man bei einem solchen Tau gleich nach erfolgter Hauptentladung an beiden Enden noch einen schwachen Strom, der um so länger anhält, je länger die Batterie mit dem Leitungsdrahte verbunden war, je mehr also die Elektricität in die Isolirschicht eindrin-

*) Varley erhielt bei einem 1500 engl. Meilen langen, mit Guttapercha isolirten Drahte am andern Ende die grösste Intensität erst nach 7 Secunden, dieselbe hielt aber auch noch 7 Secunden nach Unterbrechung der Batterie an (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 287). Vgl. auch die Nachträge.

gen konnte. Dadurch kann bei Unterseetauen die Ladung und Entladung um 15 bis 20 Minuten verlängert werden*). — Aus dem atlantischen Tau von 1866 entwich die von einer schwachen Batterie herrührende, also nicht starke Ladung, wenn beide Enden isolirt waren, so langsam, dass nach 1 Stunde kaum die Hälfte der Elektricität durch die Guttapercha in's Wasser übergegangen war.

Die zur Erzeugung eines Signals erforderliche Zeit, vom Anlegen der Batterie an dem einen Ende der Linie bis zum Entstehen des Signals am anderen Ende, ist nicht (wie die Dauer des veränderlichen Zustandes) proportional dem Quadrat der Länge; sie wird bedingt durch den Zeichengeber, die Empfindlichkeit des Empfangsapparates, Länge und Isolationszustand der Linie, die Batterie. Bei einer 500 Kilometer langen, 4 Millimeter dicken oberirdischen Eisenleitung waren für den Apparat von Hughes 0,002 bis 0,003 Secunden erforderlich, und diese Zeit änderte sich nahezu proportional zu der Länge der Linie; der Elektromagnet dieses Apparates ist sehr empfindlich, und daher kann man für einen Zeiger- oder Morse'schen Telegraphen bei 70—80 Daniell'schen Elementen bei 500 Kilometern 0,01 Secunde und bei 1000 Kilometern 0,03 Secunden annehmen. Bei einer unterirdischen oder unterseeischen Leitung würden bei 500 Kilometern für den Elektromagnet von Hughes 0,09 Secunden, für ein gewöhnliches Relais 0,45 Secunden erforderlich sein. Hughes fand für seinen Apparat bei einem Unterseetau mit 1,6 Millimeter dickem Kupferdrahte und einer 2,4 Millimeter dicken Guttaperchaschicht bei Längen von

121	242	363	484	605	726 Kilometern
0,025	0,045	0,080	0,115	0,140	0,160 Secunden;

Whitehouse 1858 am transatlantischen Kabel mit Kupferlitze von 0,07 Millimeter Durchmesser und 3 Guttaperchalagen von 3,7 Millimeter Gesammtdicke bei einem gewöhnlichen Relais bei Längen von

233	398	796 Kilometern
0,14	0,34	0,79 Secunden.

Bei zu kurzer Dauer des Contactes erreicht der Strom nicht seine volle Intensität und kann deshalb möglicher Weise gar kein Zeichen hervorbringen, um so mehr als er hierzu mit der nöthigen Intensität eine hinreichend lange Zeit wirken muss; während der Entladungsstrom einer Leydener Flasche, selbst von sehr grosser Intensität die Magnetnadel nicht ablenkt, thut dies ein viel schwächerer Strom von einiger Dauer. Die Dauer des Contactes kann indess stets kleiner sein, als die zur Erzeugung eines Signals erforderliche Zeit; sie beträgt bei einer gewöhnlichen, 500 Kilometer langen, oberirdischen Leitung für den Elektromagnet von Hughes 0,003, für einen gewöhnlichen Elektromagnet 0,01 Secunden. Bei einem Unter-

*) Auf der Linie London-Amsterdam dauerte die Entladung etwa ½ Secunde.

seetau von 726 Kilometern fand Hughes bei seinem Elektromagnet nur einen Contact von 0,021 Secunden erforderlich, während das Zeichen erst nach 0,160 Secunden erschien. Bei einem gewöhnlichen Relais muss auf einer Unterseelinie zur Erzeugung eines vollen Ankeranzugs der Contact 0,10 bis 0,15 Secunden dauern; für ein Galvanometer etwa 0,3 Secunden.

Die Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge der telegraphischen Signale ist wesentlich durch die Dauer der Ladung und Entladung bedingt. Bei zu raschem Schliessen und Oeffnen der Batterie verschwindet der Strom im Empfangsapparate nicht ganz, sondern seine Intensität nimmt nur abwechselnd zu und ab. Ein Elektromagnetanker wird in dem Momente angezogen, wo der Strom ausreichend stark ist, und wieder losgelassen, sobald die Stromstärke so weit herabgesunken ist, dass die ihr entsprechende Magnetisirung nicht mehr ausreicht, den Anker angezogen zu erhalten; je näher sich diese beiden Stromstärken liegen, desto rascher können (abgesehen von der Zeichendauer) die Zeichen auf einander folgen. Die Empfindlichkeit des Empfangsapparates dagegen hat auf diese Geschwindigkeit keinen Einfluss. Beim Elektromagnet von Hughes wird der Anker mechanisch gegen die permanent magnetischen Pole angelegt und fällt dann ab, wenn der Strom diesen permanenten Magnetismus schwächt; daher hängt bei ihm die Geschwindigkeit des Telegraphirens vorwiegend von der Geschwindigkeit jener mechanischen Bewegung ab. Bei länger dauernden Zeichen, z. B. Morse-Strichen, wird die Ladung stärker, die Entladung dauert länger und man muss langsamer sprechen. Die Entladung kann man beschleunigen durch Anlegen einer Erdleitung nach jedem Strom (wie es beim Morse-Taster geschieht); durch Nebenschliessungen zur Erde von hinreichend grossem Widerstande (doch sind dabei Anlässe zu Störungen, namentlich zu Polarisation zu vermeiden); durch Anwendung von Inductions- und magnetoelektrischen Strömen*), welche wegen ihrer grösseren Spannung die zur Zeichengebung nöthige Stärke schneller erreichen; durch Ströme von wechselnder Richtung**), indem man z. B. zum Zeichengeben positive Ströme benutzt, zwischen je 2 positiven Strömen aber einen negativen zur theilweisen Entladung in die Linie sendet, weshalb auch dieser negative kürzere Dauer haben oder von einer schwächeren Batterie herrühren muss.

Bonelli berichtet, dass auf dem Cagliari-Malta-Tau mit etwa 2 Millimeter dicker Drahtlitze aus 7 Drähten und 2 Millimeter dicker

---

*) Doch dürfen diese (ebenso auch die galvanischen) nicht so stark sein, dass sie die Guttaperchahülle gefährden.

**) Die Zeichen abwechselnd durch einen positiven und negativen Strom hervorzubringen, ist weniger vortheilhaft, weil dann jeder negative Strom erst die ganze Ladung des positiven beseitigen und darauf den Leiter negativ laden muss.

Guttaperchahülle kaum 75 Signale in 1 Minute gegeben werden konnten, und dass man bei schnellem Spiel beim Morse-Alphabet anstatt Punkten und Strichen nur kurze und lange Striche erhielt, indem auf einander folgende Punkte zu einem Strich verschwammen oder ganz ausblieben (*Shaffner*, *telegraph manual*, S. 509).

2. Die Apparate für Unterseelinien.

Die auf Unterseelinien zu verwendenden Apparate müssen vor Allem möglichst empfindlich sein, damit man mit möglichst schwachen Strömen telegraphiren kann; denn zu starke Ströme gefährden (abgesehen von der längeren Zeit zur Entladung) erfahrungsgemäss die Guttapercha theils durch zu grosse Erwärmung, theils durch Durchschlagen der Elektricität, und gerade in der Anwendung von zu starken Strömen in der bereits mangelhaft gewordenen und mit schwachen Strömen nicht mehr betriebsfähigen Leitung sucht man die eine Ursache des Misslingens der atlantischen Kabellegung vom Jahre 1858. Die Einrichtung der Apparate muss ferner den soeben erörterten Erscheinungen der Ladung und Entladung Rechnung tragen.

Auf den verschiedenen Unterseelinien kamen auch sehr verschiedene Apparate zur Anwendung. Auf der Linie Oxfordness-Haag wurden vorwiegend Doppelnadelapparate, jedoch auch Bain's elektrochemischer Schreibapparat verwendet (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 56); auf ersteren waren die Ladungserscheinungen weit weniger störend, wegen der sich wiederholenden Umkehrung der Stromrichtung. Auf derselben Linie benutzte man auch Morseapparate mit einer von Varley angegebenen Vorrichtung, durch welche der Strom bei jeder Bewegung des Tasters umgekehrt wurde; als Relais diente eine sehr empfindliche Galvanometernadel, welche aber nicht stumpf gegen einen festen Contact sich anlegte, sondern schief auf einer Goldfeder hinglitt, damit bei schneller Bewegung nicht etwa eine dünne Luftschicht zwischen Nadel und Contact bleiben und die Innigkeit der Berührung beeinträchtigen sollte; man telegraphirte bis 25 Worte in 1 Minute (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 1, S. 288; Dingler's Journal 134, S. 418). Auch auf den Linien Varna-Sebastopol (?) und Varna-Constantinopel fanden Morseapparate Verwendung (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 2, S. 168 und 284). Im persischen Golfe nahm Hughes seine Typendrucktelegraphen (Zetzsche, Copirtelegraphen, Typendrucktelegraphen und Doppeltelegraphie, Leipzig 1865, S. 61) in Gebrauch.

Besondere Verdienste um die Vervollkommnung der Apparate für unterseeische Linien erwarben sich Siemens & Halske, Varley und Thomson.

a) Die Apparate von Werner Siemens & Halske.

Das Fortgeben der Telegramme vermittelt der Submarintaster (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 100). Während bei dem gewöhnlichen Taster

Fig. 38 Taf. V die Luftleitung L mit der Axe 1 des Tasterhebels T, das Relais R mit dem Ruhecontact 2 und der eine Pol der Batterie B mit dem Arbeitscontact 3, der andere Pol und das Relais aber mit der Erde E verbunden zu werden pflegt, ist der Marinetaster, um dem Entladungsstrome den Weg durch das Relais abzuschneiden, nach der Skizze Fig. 39 eingeschaltet; steht die Leitung L mittels des als beweglich gedachten Armes a mit s_1 in Berührung, so ist das Relais R zum Empfangen eingeschaltet; wird L dagegen mit s_2 verbunden, dann ist das Relais ausgeschaltet, der Taster zum Geben bereit, und sendet in seiner Ruhelage einen negativen Strom der Gegenbatterie B_2, beim Niederdrücken auf 3 aber einen positiven aus der Arbeitsbatterie B_1 in die Leitung; um endlich bei Herstellung der Verbindung zwischen L und s_1 nicht den letzten Entladungsstrom durch das Relais gehen zu lassen, berührt a auf seinem Wege nach s_1 kurze Zeit den mit der Erde E verbundenen Contact s_3. Der Tasterhebel ist zugleich mit seinen beiden Lagerständern um eine verticale Axe drehbar, wird aber durch eine Spiralfeder in seiner Ruhelage erhalten und dabei mit einer Contactschraube gegen einen mit dem Relais verbundenen Contact s_1 angedrückt; da die Tasteraxe durch ihren Ständer mit der Luftleitung verbunden ist, so ist das Relais zum Empfangen eingeschaltet; in dieser Ruhelage kann aber der Tasterhebel um seine horizontale Axe nicht niedergedrückt werden, weil sein Handgriff gerade über einem Anschlage der Grundplatte liegt. Soll der Taster zum Sprechen eingeschaltet werden, so wird er zuerst um jene verticale Axe gedreht; dadurch wird einerseits der nach dem Relais führende Contact von seiner Contactschraube verlassen und das Relais ausgeschaltet, andererseits aber durch einen gegen die Ständer isolirten Knopf eine mit dem Ruhecontact des Tasters verbundene Contactfeder s_2 an ihren nach der Gegenbatterie führenden Contact angedrückt, diese Batterie also geschlossen, so lange der Tasterhebel auf dem Ruhecontact liegt; drückt man dann den Tasterhebel auf den mit der Arbeitsbatterie verbundenen Arbeitscontact nieder, so wird die Gegenbatterie geöffnet und dafür die Arbeitsbatterie geschlossen. Wird endlich der Taster um die verticale Axe in seine anfängliche Lage zurückgeführt, so streift ein Vorsprung an ihm gegen einen mit der Erde verbundenen Contact s_3 und entladet die Linie. Die Ruhecontactschraube des Tasters legt sich nicht unmittelbar auf ihren Contact, sondern drückt eine ebenfalls mit dem Tasterständer und so mit der Luftleitung verbundene Feder auf diesen Contact nieder.

Das polarisirte Relais (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 102) ist sehr empfindlich. Sein senkrecht stehender Elektromagnet hat 2 Schenkel E und E_1 (Fig. 40), deren untere Enden durch einen Verbindungsanker wie gewöhnlich verbunden sind; an diesem Verbindungsanker ist ein winkelförmig nach oben gebogener Stahlmagnet mit seinem Nordpol ver-

schraubt, macht also zugleich den Verbindungsanker und die beiden Eisenkerne des Elektromagnets in ihren oberen Enden nordpolarisch; auf dem Südpol *S* des Stahlmagnetes dagegen ist in einem Lager eine eiserne Zunge *Z* so befestigt, dass sie sich zwischen den oberen Elektromagnetpolen leicht bewegen kann, wobei ihre Bewegung durch 2 Schrauben *d* und d_1 begrenzt wird, deren eine *d* den Contact für den Schluss der Localbatterie bildet. Liegt diese südpolarische Zunge nicht genau zwischen beiden Polen, so wird sie von dem näheren angezogen. Die positiven Telegraphirströme durchlaufen den Elektromagnet so, dass der auf der Seite von *d* liegende Pol *N* der Kerne nordpolarisch, der auf der Seite von d_1 liegende Pol N_1 aber südpolarisch wird; unter Einwirkung der Telegraphirströme überwiegt also die Wirkung von *N* auf die Zunge, bei der Einwirkung der entladenden Ströme der Gegenbatterie aber die Wirkung von N_1. Will man ohne Gegenbatterie arbeiten, so muss die Zunge näher an N_1 liegen.

Um den Strom stets in der zur Erzielung der eben geschilderten Wirkungen nöthigen Richtung durch das Relais senden zu können, befindet sich vor dem Relais ein einfacher Stromwender (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 104), dessen Einrichtung Fig. 41 skizzirt; die Kurbel *k* desselben kann durch Einschnappen eines Stiftes in das eine oder das andere von 2 Löchern in 2 Stellungen festgehalten werden; in der einen Stellung verbindet der eine mit der Kurbel verbundene Metallbügel mittels der aufschleifenden Federn die Klemmen 1 und 2, der andere Bügel die Klemmen 3 und 4 wie in Fig. 41; in der anderen Stellung verbindet der eine Bügel die Klemmen 1 und 3, der andere die Klemmen 2 und 4 und der Strom durchläuft nun das Relais *R* in der entgegengesetzten Richtung.

Der polarisirte Schwarzschreiber (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 160) hat einen eben solchen Elektromagnet, wie das Relais, nur liegen seine Schenkel horizontal; nur die Pole stehen sammt der Zunge aus dem das Triebwerk zur Bewegung des Papierstreifens enthaltenden Kasten hervor; die Zunge ist rückwärts verlängert und hat an ihrem Ende eine Schneide, welche, wenn der Apparat schreibt, den Papierstreifen an die von einer täglich frisch anzufeuchtenden Schwärzwalze aus mit Farbe versehene vom Triebwerke umgedrehte Schwärzscheibe andrückt. Der Schwarzschreiber ist mit einer Selbstauslösung des Trieb- oder Laufwerkes versehen; es sitzt nämlich innerhalb des Kastens unmittelbar neben dem Schreibmagnet noch ein kleiner Elektromagnet *E* Fig. 42, welcher mit jenem in demselben Schliessungskreise liegt; so lange der Anker *a* nicht angezogen ist, liegt die Feder *f* am Ankerhebel bremsend mit einem durch das Laufgewicht *p* regulirbaren Drucke auf der kleinen Elfenbeinwalze *g* und hemmt das Laufwerk; wird *a* angezogen, so lässt *f* die Walze *g* und das Laufwerk los, zugleich aber stellt sich der seitwärts von *p* liegende Stiefel

n senkrecht, so dass er mit dem Absatze auf der darunter liegenden, auf einer Radaxe des Triebwerks sitzenden und sich deshalb mit drehenden Trommel *T* so lange tanzt, als telegraphirt wird; hört das Telegraphiren auf, so wird der Stiefel durch die Reibung von der Trommel wieder seitwärts mitgenommen; in Folge dessen senkt sich die Feder *f* wieder auf die Walze *g* und hemmt das Laufwerk. Bei den in neuerer Zeit gebauten Schwarzschreibern läuft die Schwärzscheibe mit ihrem unteren Theile in einem offenen Farbtroge und wird durch den Schreibhebel mit ihrem oberen Theile gegen den an dieser Stelle über eine scharfe Kante laufenden Papierstreifen angedrückt; auch ist ihr Rand fein gekerbt, damit die Schrift deutlicher wird. Der Schwarzschreiber ist so empfindlich, dass er meist ohne Relais unmittelbar in die Leitung eingeschaltet werden kann.

Soll der polarisirte Schreibapparat als Translator (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 6, S. 163) dienen, so wird die Einschaltung nach der Skizze Fig. 43 bewirkt. Bringt ein aus der Leitung L_1 eintreffender Strom das Relais R_1 zum Ansprechen, so wird die Localbatterie *b* geschlossen, der Schreibhebel *h* des Schreibapparates legt sich auf den Contact 3 und schliesst die Arbeitsbatterie B_1, welche ihren Strom in die Leitung L_2 sendet, sobald der Arm *a* auf s_2 liegt; beim Rückgang des Schreibhebels erfolgt wieder eine Entladung mittels des Stromes der Gegenbatterie B_2. Durch das Relais R_2 kann kein Rückstrom gehen; denn selbst wenn der Arm *a* von s_2 auf s_1 zurückgeführt wird, streift er erst s_3 und setzt dabei die Leitung L_2 ableitend mit der Erde *E* in Verbindung. Das Umschalten der Kurbel *a* erfolgt am Schreibapparat nicht durch Menschenhand, sondern von selbst, nämlich durch den auf der Axe des Hebels der Selbstauslösung (Fig. 42) sitzenden Commutatorhebel, indem sich dieser auf die eine oder die andere zweier Contactschrauben legt, von denen die eine mit dem Schreibhebel, die andere mit dem Relais in Verbindung steht; die Entladung (Stellung von *a* auf s_3) aber besorgt der Stiefel *n* der Selbstauslösung, welcher vorn an der Zehe und hinten am Absatze isolirt ist, nicht aber in der Mitte der Sohle, so dass er in seiner ruhenden oder tanzenden Stellung nicht, wohl aber wenn er seitwärts abgleitet, den Hebel der Auslösung mit der Trommel *T* und durch eine auf dieser schleifenden Feder mit der Erde leitend verbindet. — Um bei Anwendung der Translation die vom Schreibhebel zu seiner Bewegung verbrauchte Zeit nicht von der Schliessungszeit der durch den Schreibhebel geschlossenen Batterie in Contact kommen zu lassen, haben Siemens & Halske dem Schreibhebel einen federnden Contact gegeben, so dass die Contactfeder ihren Contact früher erreicht, als der Schreibhebel ihn erreichen würde, und auf ihm selbst noch eine Zeit lang liegen bleibt, wenn der Schreibhebel schon seinen Rückgang begonnen hat (vgl. Jahrgang X S. 216 und 348). Auch der Commutatorhebel erhält solche

Contactfedern. — Die vollständigen Schemata der Einschaltung und Verbindung sämmtlicher Apparate, sowie die verschiedenen Stöpselungen sind beschrieben und durch Abbildungen erläutert in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins (6, S. 169) und daraus in Dub, Anwendung des Elektromagnetismus (S. 425), und in Schellen, der elektromagnetische Telegraph (4. Aufl. S. 490 und 495).

Die Apparate von Siemens & Halske kamen auch auf den unterseeischen Linien von Port-Vendres nach Algier und von Malta nach Alexandrien zur Anwendung.

b) Die Apparate von Cromwell Fleetwood Varley.

Am 16. Februar 1854 liess sich Varley 3 zusammen gehörige Apparate patentiren (Polytechn. Centralbl. 1855, S. 729 oder Dingler's Journal 136, S. 262 aus *Repertory of Patent Inventions*, April 1855, S. 293): einen Taster, ein Relais und einen Commutator (*switch*). Der Commutator befindet sich auf der Platte des Tasters und enthält eine auf zwei Ständern lagernde, mit der Leitung *L* verbündene Welle, deren Kurbel in zwei durch die Worte „Abgang" und „Empfang" bezeichnete Lagen gebracht wird; in der ersteren Lage liegt ein an der Welle befindlicher Stift *h* auf einer Feder *g*, in der anderen Lage ein Stift *i* auf einer Feder *j*; beim Umstellen des Commutators aus der einen in die andere Lage kommt ein dritter Stift *o* der Welle mit einer dritten, mit der Erde verbundenen Feder *n* in Berührung, wodurch die Leitung *L* bei jedem Wechsel entladen wird. Die Axe des Tasterhebels besteht aus zwei gegen einander isolirten, durch ein scheibenförmiges elfenbeinernes Mittelstück mit einander verbundenen Theilen; diese Theile stehen durch 2 Federn *b* und *c*, welche zugleich den Tasterhebel in seiner Ruhelage erhalten, mit den Polen *C* und *Z* der Telegraphirbatterie in Verbindung; das elfenbeinerne Mittelstück ist von 2 sich nicht berührenden metallenen Halbkreisen umgeben, von denen der eine mit dem Tasterhebel und dem Pol *Z*, der andere mit dem Pol *C* verbunden ist. Ist der Taster in seiner Ruhelage, so geht der positive Strom durch ihn in eine mit der Commutatorfeder *g* verbundene Feder *f*, und wenn der Commutator auf „Abgang" steht, durch den Stift *h* in die Leitung *L*, nach der anderen Station, wo der Commutator auf „Empfang" steht, durch den Stift *i* und die Feder *j* nach dem Relais, bewegt aber den Relaishebel so, dass die Localbatterie nicht geschlossen wird. Drückt man nun den Taster nieder, so wird zunächst die Leitung *L* mittels einer am Taster schleifenden Feder *k* (welche also jetzt zugleich mit *f* auf demselben Halbkreise aufschleifen muss) entladend mit der Erde verbunden, gleich darauf aber kommt *k* mit dem anderen Halbkreise in Berührung und bewirkt die Umkehrung des Stroms (weil *f* noch auf dem ersteren Halbkreise schleift), wodurch das Relais auf der Empfangsstation den Localstrom schliesst.

Das Relais (Fig. 44) ist dem Wesen nach ein Galvanometer, dessen Nadel in Folge einseitigen Uebergewichts sich mit einem an seiner Axe befestigten Arm d gegen eine Feder e anlegt und so den Localstrom schliesst; während jedoch der Taster sich in der Ruhelage befindet, durchläuft der Strom das Relais so, dass er den Arm d von der Feder e entfernt. Der Contact am Arm d hat eine Kugelhaube als Oberfläche. Die Regulirung des Relais wird durch Vergrösserung oder Verkleinerung des Uebergewichts in Folge einer grösseren oder kleineren Schrägstellung bewirkt. Der Empfangsapparat ist ein gewöhnliches Galvanometer.

Die in Fig. 45 abgebildete Einrichtung des Relais für Ströme von wechselnder Richtung von Varley erwähnt Du Moncel (*traité*, S. 488). Der Relaishebel $a\,b$ liegt innerhalb der Spulen S und schwingt zwischen den Polen zweier permanenter Magnete P_1 und P_2, welche zu ihm parallel zu beiden Seiten seiner Axe c liegen; an die beiden Arme seines Querhauptes d sind 2 Federn angelöthet, welche die beiden Cotactkugeln aus Platin tragen und mit diesen sich an die Stellschrauben v_1 und v_2 anlegen können.

Ein noch anderes Relais von Varley, welches für verschiedene Zwecke dienen kann und einen polarisirten und einen nicht magnetisirten eisernen Hebel hat, beschreibt Glösener (*traité des applications de l'électricité* I, S. 215).

Ein anderer Apparat von Varley besteht aus einem eigenthümlichen Taster, nebst einem Relais (*Switch*). Mit diesem Switch steht eine besondere Switchbatterie in Verbindung, so dass jede Station 2 Linien- und 2 Localbatterien und für jede Linie 2 Relais (ein gewöhnliches und einen Switch) braucht. Beim Niederdrücken des Tasters wird der Strom der Linienbatterie nach der anderen Station entsendet und zugleich einem von der anderen Station kommenden Strome ein anderer Weg als gewöhnlich durch das Relais eröffnet. Diesen Weg durch den Switch nämlich verfolgt nach dem Loslassen des Tasters der Rückstrom und der Strom der Gegenbatterie; er ist jedoch dem Strome nur kurze Zeit geöffnet, nämlich so lange der Rückstrom dauert, damit dieser nicht durch das Relais gehe; dann wird dieser Weg unterbrochen und der alte durch das Relais hergestellt. Die Eröffnung des neuen Weges wird durch eine eigenthümliche Einrichtung des Tasters, dagegen die nicht plötzlich mit dem Loslassen des Tasters erfolgende Unterbrechung desselben durch den Switch bewirkt. Der Taster hat ausser den gewöhnlichen 2 Contactkegeln und der Leitung nach der Hebelaxe noch 2 Klemmen, von denen die eine mit einem dritten Contactständer, die andere mit einer langen Feder verbunden ist, welche letztere beim Niederdrücken des Tasterhebels von diesem auf den dritten Contactständer aufgedrückt wird und dadurch die Switchbatterie schliesst; indem nun der Strom dieser Batterie den Switch-Elektromagnet a (Fig. 46) umkreistund dieser seinen Anker

anzieht, unterbricht der Ankerhebel *e* zunächst den Weg über die Stellschraube *u* nach dem Relais, bringt dafür aber die Feder *f* mit der Schraube bei *w* in Verbindung. Damit nun beim Loslassen des Tasters, wo die Gegenbatterie in Thätigkeit tritt, nicht auch die Feder *f* loslässt, steht der Hebel *e* des Switch mit einem kleinen Gewicht, einem Zahnrad und einem Windflügel in Verbindung, wodurch er genöthigt ist, sich nur langsam zu senken und erst etwa ½ Secunde nach dem Loslassen des Tasters die Gegenbatterie zu öffnen und mittels des Contactes *u* das Relais wieder einzuschalten (Schellen, d. elektrom. Telegraph, 3. Aufl. S. 291). — Deutlicher lassen sich die Vorgänge an dem Einschaltungsschema Fig. 47 erkennen. Beim einfachen Telegraphiren ist der Umschalter *U* in 4 und 5 gestöpselt. Wird der Taster *T* niedergedrückt, so geht der Strom der Telegraphirbatterie B_1 über 3 und 1 nach 4 und durch *L* nach der Empfangsstation, daselbst aber aus *L* über 4 in *U*, 1 und 2 des ruhenden Tasters *T* nach dem Hebel *e* des Switch *S* über *u* durch das Relais *R* zur Erde *E*, so dass der Strom der Localbatterie b_1 über 5 des Umschalters *U* durch den Schreibapparat *M* geht; zugleich ist aber auf der sprechenden Station die Switchbatterie b_2 geschlossen worden und der Strom derselben geht über *p* durch den Taster *T* nach *q* durch den Switchelektromagneten nach *r*, daher wird der Switchhebel *e* der sprechenden Station angezogen, dadurch der Weg von 2 in *T* über *e* und den Contact *u* nach dem Relais *R* und zur Erde *E* abgebrochen, dafür aber die Feder *f* an den Contact *w* angelegt und der Weg von *e* aus über *w* und B_2 zur Erde *E* hergestellt; die Gegenbatterie B_2 ist aber noch nicht geschlossen, weil in dem noch niedergedrückten Taster 1 und 2 ausser Verbindung sind. Sowie aber der Taster in die Ruhestellung zurückgelangt ist, sendet die Gegenbatterie B_2 ihren Strom über *w*, *e*, 2 und 1 in *T*, 4 in *U* nach *L* zur Entladung, bis der Switchhebel sich in seine Ruhelage begiebt, wobei *f* von *w* fortgeht und *e* sich wieder an *u* anlegt. — Bei der Translation ist natürlich noch ein zweites eben so beschaffenes Apparatsystem (nach Befinden jedoch ohne Switch und mit gewöhnlichem Taster) vorhanden, etwa rechts von dem in Fig. 47 skizzirten. Der Umschalter *U* ist dann in 6 und 7 gestöpselt. Kommt nun in der einen Apparathälfte ein Strom aus *L'* durch *U'* und die Apparate dieser Hälfte: *M*, 2 in *T*, *e* und *u* in *S* durch *R'* zur Erde *E*, so spricht das Relais *R'* dieser Hälfte an, der Strom der zu *R'* gehörigen in der anderen Apparathälfte stehenden Localbatterie b'_1 und Switchbatterie b'_2 wird geschlossen und läuft von b'_1 über *x* durch *R'*, 7 in *U'*, 5 in *W* nach b'_2, *r'*, *S'* und *M'*, die beiden letzteren ziehen ihre Anker an, wodurch *R* ausgeschaltet und zugleich ein Strom nach *L* weitergegeben wird.

Schellen (d. elektrom. Telegraph, 4. Aufl. S. 512) beschreibt einen auf der Unterseeleitung London-Amsterdam auf 8 Drähten ohne jede Schwierigkeit und Störung durch die Rückströme (mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 300 Punkten in 1 Minute) arbeitenden Kabeltranslator

oder Switch von Varley, welcher nur eine Abänderung des polarisirten Relais ist. In Fig. 48 sind a und a_1 die Pole des Elektromagnetes, dessen Drahtenden t und t_1 sind; c ist der leichte Hebel, welcher mit seiner Drehaxe auf dem Südpolschenkel des Stahlmagnetes aufsitzt, während der Nordpolschenkel dieses Stahlmagnetes mit den Kernen des Elektromagnetes verschraubt ist. Im Ruhezustande zieht das Polende a_1 den Hebel c gegen die Schraube d; die Contactschraube d_1 ist mit dem Zinkpole der Gegen- oder Zinkbatterie B_2 verbunden, während die Arbeits- oder Kupferbatterie B_1 mit dem Kupferpole nach dem Taster geführt ist. Die Polenden a und a_1 und die Contactschrauben d und d_1 sind so gestellt, dass der Hebel von jedem Polende an der Contactschraube, an welche er sich durch die Wirkung eines Stroms angelegt hat, auch dann noch festgehalten wird, wenn der Strom verschwindet, so dass es also jedesmal eines zweiten Stromes von entgegengesetzter Richtung bedarf, wenn der Hebel von einer Schraube an die andere gelegt werden soll. Der Widerstand der Drahtrollen entspricht ungefähr dem der ganzen Leitung. — Wollen 2 Stationen durch eine Unterseeleitung L mit einander sprechen, so haben sie beide die nämliche in Fig. 49 angedeutete Einschaltung, und in beiden ist der Umschalter U bei 4 und 5 gestöpselt. Wird der Taster T niedergedrückt, so geht der Strom der Kupferbatterie B_1 über 3 und 1 des Tasters und 4 des Umschalters nach dem Galvanometer G; von hier aus bieten sich ihm 2 Wege von gleichem Widerstande: der eine führt nach der Klemme t des Switch, die Drahtrollen des Elektromagnetes und über t_1 zum Zinkpole von B_1 zurück, der andere Weg führt durch das Galvanometer und in die Leitung nach der anderen Station. Auf der gebenden Station wird daher der Nordpol a verstärkt, der Nordpol a_1 geschwächt oder gar in einen Südpol umgewandelt, der Hebel c also gegen die Contactschraube d_1 angelegt; allein trotzdem kann die Zinkbatterie B_2 ihren entladenden Strom nicht eher in die Leitung senden, als bis der Taster in seine Ruhelage zurückgekommen ist; damit dieser Strom aber eine etwas längere Zeit erhalte, ist der Switchhebel auf der Contactseite mit einer leichten Stahlfeder versehen, welche die Zinkbatterie noch kurze Zeit geschlossen hält, wenn der Hebel bereits seinen Rückweg angetreten hat; natürlich muss auch der Tasterhebel beim Rückgang sich fest auf seinen Ruhecontact auflegen, weil sonst in Folge mangelnder Entladung der Rückstrom störend auftreten würde. Auf der Empfangsstation geht der Strom der Kupferbatterie B_1 durch das Galvanometer, den Hebel des ruhenden Tasters, durch den Switchhebel, durch das Relais R und durch die Erde E nach der gebenden Station zurück; durch die Switchdrahtrollen geht von e aus nur ein verhältnissmässig geringer Stromtheil, weil der Widerstand auf diesem Wege beträchtlich grösser ist; der Relaishebel schliesst natürlich den durch den Schreibapparat M gehenden Strom der Localbatterie b. Auch der Entladungsstrom der Zinkbatterie theilt sich bei e in 2 Theile, von denen der eine in die Leitung L geht und

den Rückstrom neutralisirt, während der andere Theil durch die Rollen des Switch geht und den Switchhebel in die Ruhelage zurückführt, so dass das Relais der gebenden Station wieder in die Leitung eingeschaltet wird. — Soll zwischen der unterirdischen Leitung L_1 und einer oberirdischen Leitung L_2 übertragen werden, so braucht die Translationsstation ausser den bisher erwähnten Apparaten der Fig. 49 noch den in Fig. 50 abgebildeten Wechsel W und den in Fig. 51 skizzirten Apparatsatz, welcher durch den Draht pp mit dem Apparatsatz der Fig. 49 verbunden ist. In Fig. 49 aber muss der Umschalter U_1 ebenso wie der Umschalter U_2 in Fig. 51 gestöpselt sein, nämlich in 6 und 7. Kommt nun ein Strom aus L_2, so geht er durch das Galvanometer G_2 über 6 in U_2 nach dem Hebel des Schreibapparates M_2 durch den Umschalter V und das Relais R_2 zur Erde E; der Relaishebel schliesst die Localbatterie b_1, welche ihren Strom durch pp, R_2, U_2, n_2 und m_1 in W und M_1 sendet, worauf der Schreibhebel von M_1 den Strom der Arbeitsbatterie B_1 in die Leitung L_1 weiter giebt, ebenfalls mit Stromtheilung bei dem Galvanometer G_1, so dass zugleich auch der Switchhebel gegen die Schraube d_1 gelegt wird und beim Rückgang des Schreibhebels ein Entladungsstrom der Batterie B_2 die Leitung durchströmt. Um ein Zurückprallen des Schreibhebels vom Ruhecontact unschädlich zu machen, ist der Schreibhebel auch gegen diesen Contact hin mit einer leichten Feder versehen. Kommt ein Strom aus L_1, so geht er durch U_1, M_1, S_1 über d und f durch R_1, schliesst dadurch die Batterie b_2, deren Strom durch pp, R_1, U_1, n_1 und m_2 in W, durch M_2 geht, so dass der Hebel des Schreibapparates M_2 jetzt den Strom der Batterie B über U_2 und G_2 nach L_2 weiter giebt.

Am 26 December 1862 liess sich Varley mehrere Telegraphirmethoden patentiren (Dingler's Journal 175, S. 329 oder Polytechn. Centralbl. 1863, S. 1625, aus *The Engineer*, August 1863, S. 95), bei denen die telegraphischen Zeichen nicht durch das Auftreten von Strömen (wie gewöhnlich), sondern durch Zu- und Abnahme der Stromstärke*) hervorgebracht und zugleich Ladungsplatten**) und Widerstandsrollen angewendet werden. Bei der ersten Methode sind auf der Empfangsstation zwischen Leitung L und Erde E eine Anzahl metallener, gegen einander isolirter Ladungsplatten P (Fig. 52) so angebracht, dass die Platten gerader Nummer mit L, die ungerader Nummer mit E verbunden sind; das Relais R

*) Etwas Aehnliches war schon 1858 für R. A. Brooman patentirt worden (Jahrg. V, S. 46). Auch Caselli und Bonelli suchten bei ihren Copirtelegraphen die Rückströme unschädlich zu machen (Zetzsche, Copirtelegraphen, S. 12 u. 26).

**) In gewisser Beziehung dem verwandt ist die Verwendung einer Gegenbatterie zur Beseitigung der Rückströme, wozu M. H. Jacobi grosse Platinelektroden in einem Gefäss mit verdünnter Schwefelsäure, Gaston Planté Bleielektroden vorschlug (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 7, S. 11 und 13). Ueber Jacobi's Gegenbatterie vgl. auch *Du Moncel, traité*, S. 354.

ist zwischen den Platten und L oder zwischen den Platten und E eingeschaltet; ausserdem ist zwischen L und E noch eine zur Erhöhung der Geschwindigkeit des Telegraphirens dienende Widerstandsrolle W eingeschaltet. Der ankommende Strom tritt auf der Empfangsstation mit allmälig wachsender Stärke auf und verzweigt sich theils nach den Ladungsplatten, theils durch W zur Erde; hat mit vollständiger Ladung der Platten die Stromstärke ihr Maximum erreicht, so hört der Zweigstrom durch das Relais auf, wenn auch der Strom in der Leitung fortdauert. Wird auf der gebenden Station der Strom umgekehrt, so senden die sich entladenden Platten einen Strom von entgegengesetzter Richtung durch das Relais. Bei der zweiten Methode schliesst ein Elektroscop, dessen beide Pole durch eine Widerstandsrolle verbunden sind, beim Wechsel der Stromstärke die Localbatterie. Bei der dritten Methode ist die äussere (primäre) Windung einer Inductionsspule mit der Leitung L und der Erde E verbunden, während der Empfangsapparat R in die innere (secundäre) Windung eingeschaltet ist und somit bei jedem Auftreten oder Verschwinden, Zu- oder Abnehmen eines Stromes in der äusseren Windung von einem Inductionsstrome durchlaufen wird. Der Eisenkern der Inductionsspule besteht aus einem Bündel Eisendrähten, welche 4 Mal so lang sind, als die Spule, worauf die äusseren und inneren Windungen aufgewickelt sind; diese Eisendrähte sind umgebogen, so dass sie die ganze Spule wie eine Büchse umschliessen. Bei der vierten Methode hat das Relais zwei Windungen von verschiedener Länge und verschiedener Windungszahl; die erste Umwickelung habe z. B. halb so viel Widerstand und halb so viel Windungen, als die zweite, und es sei ein Elektromagnet und eine Inductionsspule vorhanden, dessen Widerstand dem der zweiten Umwickelung gleich ist. Wird nun die erste Umwickelung mit der zweiten und zugleich auch mit dem Elektromagnet verbunden, so geht jeder Strom ungetheilt durch die erste Umwickelung und verzweigt sich dann zur Hälfte in die zweite Umwickelung und zur anderen Hälfte in den Elektromagnet; da nun der Strom in der ersten und in der zweiten Umwickelung in entgegengesetzter Richtung fliesst, so gleicht sich seine magnetisirende Wirkung aus und es würde folglich keine Wirkung im Relais auftreten, wenn nicht das Eisen jenes Elektromagnetes während des Magnetisirens dem Durchgange des Stromes eine Art Widerstand entgegenstellte, so dass der Strom in der zweiten Umwickelung etwas mehr als die Hälfte beträgt und ein Zeichen auf dem Relais giebt. — Bei der fünften Methode umkreist der Strom zwei Galvanometer von verschiedener Grösse, deren Nadeln sich zwar durch einen gegebenen Strom nach derselben Richtung bewegen und denselben Ausschlag erlangen, aber nicht gleich schnell. Die grössere und langsamere hat mehr Umwickelungen, giebt aber keinen grösseren Ausschlag, da ein Theil des Stromes in eine Widerstandsrolle abgezweigt ist. Die

beiden Galvanometer bilden ein Relais; ihre Axen liegen vertical über einander, stehen aber nicht in metallischer Verbindung; die eine Axe trägt eine isolirte Gabel, bei welcher der eine Zinken isolirt, der andere mit einer kleinen Contactfeder mit Gold- oder Platin-Knöpfchen versehen ist. Wenn die Nadeln sich nach der einen Richtung bewegen, so legt sich die Contactfeder an einen von der Axe der anderen Nadel zwischen die Gabelzinken herabreichenden Stab und schliesst einen Localstrom; bei der Bewegung nach der anderen Seite wird der Kreis des Localstromes geöffnet. Oder es hängt von der Gabel ein Draht herab in einen halbkreisförmigen mit Wasser gefüllten Trog und zwischen den Gabelzinken hängt ein zweiter, gegen die Zinken isolirter Draht herab in den Trog, auf dessen Boden ein mit dem einen Batteriepol verbundener Draht liegt; der andere Batteriepol ist mit der einen Nadelaxe verbunden, von der Mitte der Batterie aber geht ein Draht durch ein (zweites) Relais nach der zweiten Galvanometeraxe. Wenn nun der Linienstrom sich in dem einen Sinne ändert, so werden, wegen der schnelleren Bewegung der kleineren Nadel, die beiden Drähte in der Flüssigkeit sich einander nähern; bei einer Aenderung der Stromstärke im entgegengesetzten Sinne entfernen sie sich von einander. Wurde nun die Entfernung der Drähte im Trog entsprechend gewählt (mit Zuhilfenahme von Widerstandsrollen), so wird in den genannten beiden Fällen ein Strom nach der einen oder nach der andern Richtung das (zweite) Relais durchlaufen, selbst wenn der Unterschied in der Entfernung der beiden Drähte weniger als $^1/_{10}$ Zoll beträgt. Auch hier lassen sich mit Vortheil Inductionsplatten anwenden. — Wesentlich einfacher wird die Einrichtung, wenn man blos eine Galvanometer-Nadel nimmt und mit einem daran angebrachten Arm in das Wasser des Trogs tauchen lässt; ein Ende des Trogs ist dann durch die primäre Umwickelung einer Inductionsspule hindurch mit dem einen Pole der Batterie verbunden, während der andere Pol mit der Axe der Nadel in Verbindung steht; in die secundäre Umwickelung der Inductionsspule ist ein polarisirtes Relais oder ein anderer Telegraphen-Apparat eingeschaltet. Dreht ein Strom die Nadel nach der einen oder anderen Seite, so wird der Widerstand der Wassersäule grösser oder kleiner, deshalb nimmt die Stromstärke ab oder zu, es wird also ein Strom in der einen oder anderen Richtung in die secundäre Umwickelung inducirt und durchläuft das Relais. — Die Einschaltung der Batterie *B* in der gebenden Station kann verschieden sein, doch werden auch hier Inductionsplatten *P* zwischen Erde *E* und Kabel *L* eingeschaltet, und deren Spannung addirt sich beim Umkehren des Stromes zu der der Batterie. Solche Einschaltungen zeigen Fig. 3, 4 u. 5 auf Taf. 47 des Polytechn. Centralblatts vom J. 1863; in diesen Figuren sind durch *W* Widerstandsrollen angedeutet, welche einen schwachen Strom nach dem ersten kräftigen veranlassen sollen; die Inductionsrollen (*I* in Fig. 4) sind von feinem Draht, enthalten ein Bündel Eisen-

drähte und befördern die Entladung des Kabels, indem sie nach ihrer vollständigen Magnetisirung, wenn der Strom von den Platten *P* aufhört, den Magnetismus verlieren und dabei einen entgegengesetzten Strom in die Leitungsenden. Der Taster mag so eingerichtet sein, dass er die Leitung behufs der Entladung nach jedem Strom kurze Zeit mit der Erde in Verbindung bringt.

Die Contactfedern an dem Relaishebel sind nicht einfache flache Federn, sondern sie sind mit kleinen kuglichen Contactknöpfchen aus Platin versehen, wodurch die Tendenz zu Vibrationen wesentlich vermindert ist. Die Federn erhöhen zugleich die Empfindlichkeit der Relais, da sie die magnetische Anziehung zum Theil überwinden und so das Haftenbleiben verhüten. Bei dem einen Relais läuft der Hebel in eine Feder aus und hat 2 Contactschrauben gegenüber; erst legt sich die Feder auf die erste und dann der Hebel selbst an die zweite Schraube. — Beim Betrieb langer unterseeischer Leitungen ist es meist wichtig, zu wissen, wie die Zeichen auf der Empfangsstation ankommen. Um dies zu erfahren, soll eine sogenannte Prüfungsleitung in der gebenden Station angebracht werden, so dass, wenn Etwas am zeichengebenden Apparate oder die Batterie nicht in Ordnung ist, die Prüfungsleitung den Gebenden unterrichtet, was von seinen Zeichen wahrscheinlich auf der Empfangsstation ankommt, oder ob er zu schnell telegraphirt. Es genügt, dass der in die Prüfungsleitung gesendete Strom nur $^1/_{10}$ von der Stärke des Stromes im Kabel hat. — Als Isolator wendet Varley zwischen den Ladungsplatten mit Paraffin getränktes Papier an.

c) Die Apparate von Edward Brailsford Bright in Liverpool

sind zum Telegraphiren mit gleich langen Strömen von wechselnder Richtung bestimmt und wurden am 13. Januar 1858 patentirt (Polytechn. Centralbl. 1859, S. 368, aus *London Journal* October 1858, S. 206). Beim Loslassen und Niederdrücken des Tasters dreht sich eine excentrische Scheibe, auf welcher Federn aufschleifen, allemal durch ein Uhrwerk mit Sperrvorrichtung um 90° und unterbricht dadurch oder schliesst den Strom in der einen oder anderen Richtung. Das Relais hat 2 Arbeitscontacte, an die sich der Hebel anlegt, um den Localstrom zu schliessen.

d) Die Apparate für die transatlantische Linie von Thomson und Varley.

Da man bei dem atlantischen Tau mit Rücksicht auf die Erhaltung desselben auf die Benutzung sehr schwacher galvanischer Ströme angewiesen war, so war die Anwendung von Apparaten mit Elektromagneten ausgeschlossen, weil bei diesen nur durch kräftige Ströme eine ausreichende Magnetisirung der Eisenkerne zu erzielen ist, und weil zugleich die Erzeugung und das Verschwinden des Elektromagnetismus eine merkliche Zeit erfordert. Die Galvanometer dagegen lassen sich durch Vermin-

derung des Nadelgewichtes und Vermehrung der Umwindungen beliebig empfindlich machen. Um den Nadelausschlag noch deutlicher wahrnehmbar zu machen, griff Professor William Thomson in Glasgow 1858 zu dem bereits 1833 von Gauss und Weber in Göttingen benutzten Spiegelgalvanometer*) zurück. Wirft der Spiegel AB (Fig. 53) den in der Richtung FTC durch einen Schlitz in dem mit einer Skala versehenen Schirme MM normal auffallenden Strahl der Lampe F in sich selbst zurück, so muss der Winkel FCE, um welchen der reflectirte Strahl CE nach der Drehung des Spiegels in die Lage $A_1 B_1$ von dem einfallenden Strahle FC abweicht, doppelt so gross sein, als der Drehwinkel ACA_1, weil dieser ja eben so gross ist, als der Winkel DCF, um welchen das Einfallsloth DC jetzt vom einfallenden Strahle abweicht. Der Weg, den das Spiegelbild auf der Skala zurücklegt, ist ausserdem auch noch proportional der Entfernung des Schirms MM oder $M_1 M_1$ von dem Spiegel AB, wodurch eine weitere Vergrösserung desselben möglich ist. Thomson gab nun seinem Reflex- oder Spiegelgalvanometer die aus Fig. 54 ersichtliche Anordnung. Das mit vielen tausend gut isolirten Windungen eines feinen Kupferdrahtes versehene Galvanometer G wird mit den Drahtenden x und y in die Leitung eingeschaltet; in der Mitte der Rolle hängt an einem feinen Coconfaden das sehr leichte Magnetstäbchen m, auf dessen Rücken ein kleines Stahlspiegelchen s so befestigt ist, dass die Spiegelebene mit der verticalen Ebene der Nadel m zusammenfällt und bei der Ruhelage der Nadel in dem magnetischen Meridian liegt, in welchen auch die Drahtwindungen eingestellt werden. Drei Fuss von dem Spiegel entfernt steht ein Schirm S mit einer Spalte T, welche sich durch einen Schieber nach Bedarf verengern lässt; eine dicht hinter dem Schirm stehende Lampe F wirft ein Lichtbündel durch die Spalte T auf die Sammellinse L, so dass das Bündel auf dem Spiegel s als eine helle und scharfe Lichtlinie erscheint und als solche vom Spiegel auf die etwas höher stehende Latte mit Skala MM geworfen und in einem dunkeln Raume dem Auge sichtbar wird**). So lange kein Strom in den Win-

---

*) Dasselbe war schon von Poggendorff zu einem hohen Grade der Vollkommenheit und Genauigkeit ausgebildet und von Du Bois-Reymond in Berlin in der Weise, wie es jetzt von Thomson geschieht, bei seinen Vorlesungen zum Sichtbarmachen schwacher Nerven- und Muskelströme angewandt worden; auch Lamont und Wiedemann haben solche Apparate construirt, letzterer mit magnetisirtem Spiegel vor etwa 16 Jahren.

**) Zum Hervorrufen der überraschenden Leistungen dieses Galvanometers reicht ein gewöhnlicher Multiplicator, auf dessen Nadel ein etwa einen halben Quadratzoll grosses Glasspiegelchen mit Wachs befestigt ist, völlig aus, wenn man nur eine recht intensive Gas-, Petroleum- oder Oellampe und eine ziemlich grosse Condensatorlinse von etwa sechs Zoll Brennweite anwendet, dabei aber durch Einschliessen der Lampe in einen mit einer Spalte versehenen Blechkasten alles Seitenlicht von der mit weissem Papier überzogenen Latte abhält.

dungen von *G* die Nadel *m* umkreist, steht dieselbe im magnetischen Meridian und die helle Lichtlinie, der Lichtzeiger (*index light*) steht im Nullpunkte der Skala. Geht ein Strom durch den Multiplicator *G*, so wird die Nadel mit dem Spiegel abgelenkt und der Lichtzeiger schreitet dabei auf der Skala um den doppelten Winkel nach rechts oder links fort.

In den Fig. 55 und 56 ist das Instrument in der Form abgebildet, wie es praktisch angewandt wird. (Dingler's Journal 181, S. 429 aus *Engineer*, Juni 1866, S. 447). Das Magnetstäbchen, wegen seiner Kleinheit in der Zeichnung kaum zu erkennen, ist einen halben Zoll lang, einen Zehntel Zoll breit und einen Zehntel Zoll dick; das damit verbundene kreisrunde Glassilberspiegelchen ist nur einen Zweihundertstel Zoll dick, beide zusammen wiegen nur ein Zweiundzwanzigstel preussisches Loth; Spiegel und Magnet können übrigens so zart gearbeitet werden, dass ihr Gesammtgewicht nicht mehr als 1½ Grains (ein Einhundertsechzigstel preussisches Loth) beträgt und derartige Apparate sind von Thomson bereits ausgeführt worden. Das Magnetstäbchen besteht dann aus einem kleinen Stück einer sehr feinen Uhrfeder und das Spiegelchen aus einem der dünnsten Mikroskopdeckgläschen, welches auf der einen Seite chemisch versilbert ist. Die Multiplicatordrähte *G* sind in mehrere Rollen vertheilt und so in Gruppen angeordnet, dass man je nach Bedürfniss das Instrument für schwache oder starke Ströme anwenden kann. Sie sind mittels Platten von Hartkautschuk an dem Gehäuse *D* befestigt. In der Mitte derselben ist die Magnetnadel mit ihrem Spiegelchen an einem Coconfaden aufgehängt, und dicht davor befindet sich die kleine Sammellinse, deren Brennpunkt beinahe im Spiegel liegt. Das luftdicht schliessende Gehäuse *D* hält jede störende Einwirkung von Luftströmungen auf die Nadel fern. Ein gekrümmter Stahlmagnet *NS* ist an der Aufhängeröhre *p* mittels eines eigenen Halters so befestigt, dass er mittels der Mikrometerschraube *v* verrückt und eingestellt werden kann, bis er auf die Nadel so einwirkt, dass in dessen Ruhelage das von der Mitte des Spiegels reflectirte und ebenfalls durch die Linse zurückgehende Licht auf dem Nullpunkt der Elfenbeinskala *MM* einspielt. Der Rahmen *R* hält jede weitere Verbreitung des Lampenlichtes von dem Telegraphenapparate ab, so dass der Lichtzeiger *E* scharf auf der dunkeln Skala *MM* hervortritt. Thomson hat übrigens die Absicht, die Skala so anzuordnen, dass die telegraphischen Signale auf photographischem Papiere gleich fixirt werden (*Engineer*, Juli 1866, S. 2). Zur Erzielung der erforderlichen Empfindlichkeit ist das ganze Instrument auf einem gegen alle seitlichen Erschütterungen geschützten und gemauerten Steinpfeiler in einem dunkeln Zimmer aufgestellt, welches nur für den mit dem Empfange der Depeschen beauftragten Beamten zugänglich ist. Dieser Beobachter sitzt hinter dem Galvanometer, den Blick unverwandt auf

den Lichtzeiger gerichtet, der je nach der Stromwirkung auf der Elfenbeinskala rechts oder links ausschwingt.

Soll das Instrument als Marinegalvanometer dienen (Schellen, das atlant. Kabel, S. 144), so dürfen die Schwankungen des Schiffs die Stellung des Spiegelchens gegen die Skala nicht ändern. Deshalb wird das Magnetstäbchen vermittelst eines Coconfadens sowohl oben als unten an das die Drahtwindungen tragende Holzrähmchen *AB* befestigt und, wie Fig. 57 zeigt, in der Mitte der Multiplicatorwindungen eingespannt. Der Coconfaden muss genau durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Magnetstäbchens und des Spiegelchens gehen, so dass letzteres, wenn der Multiplicatordraht gedreht oder geneigt wird, seine Lage zu der Skala und zu dem darauf erscheinenden Lichtzeiger unverändert beibehält. Der Einfluss der Schwere der Erde wird hierdurch aufgehoben, und der Magnet behält unter allen Stellungen des Instrumentes dieselbe verhältnissmässige Lage zu der Skala, welche mit ihm auf demselben Tischbrette befestigt ist. Ferner muss der Einfluss des Erdmagnetismus auf den Magnet aufgehoben werden, indem man den Multiplicatordraht nebst Magnet und Spiegelchen in eine Büchse von starkem, weichem Eisen einschliesst und zugleich im Innern dieser Büchse einen mässig starken Stahlmagnet *NS* in Hufeisenform so aufstellt, dass seine beiden Pole die Drahtrollen zwischen sich fassen. Da die magnetische Wirkung dieser Pole auf die Magnetnadel stärker ist, als die Richtkraft der Erde, so wird letztere dadurch aufgehoben und die Nadel stellt sich in der Ruhelage bei allen Stellungen des Instrumentes in die Linie *SN*, welche die Pole des Hufeisenmagnets verbindet.

Mit einem so eingerichteten Marinegalvanometer lassen sich selbst bei sehr stürmischem Wetter auf der See alle Arten galvanometrischer Messungen eben so leicht und sicher ausführen, wie auf dem Lande; weder der stets wechselnde Cours des Schiffs, noch die hochgehenden Wellen der See haben auf die Ablenkungen des Lichtzeigers irgend einen Einfluss. Der seitliche Hufeisenmagnet beeinträchtigt die Empfindlichkeit des Instrumentes etwas; bei seiner Anwendung als Schiffsgalvanometer pflegt man daher auch etwas stärkere Ströme anzuwenden, als es sonst erforderlich ist.

Bezüglich der Erzielung eines möglichst schnellen Telegraphirens einigten sich Thomson und Varley dahin, durch einen positiven Strom den Lichtzeiger nach rechts abzulenken, bei Unterbrechung desselben durch einen (etwas stärkeren oder länger andauernden) negativen den Lichtzeiger nach der Ruhelage zurückzuwerfen, vor Erreichung derselben aber ihn zur Verhinderung von lebhafteren Schwingungen durch einen dritten (kürzeren oder schwächeren) positiven Strom aufzuhalten, darauf die vom dritten Strom herrührende Ladung durch einen vierten noch kürzeren negativen Strom zu beseitigen und endlich durch einen

fünften ganzkurzen positiven Strom die Nadel in der Ruhelage zum Stillstand zu bringen. Nach Versuchen an dem im Great Eastern liegenden Kabel mussten sich die Ströme der Dauer nach wie +100:—156:+80:—32,5:+26 verhalten. Diese fünf Ströme geben ein einfaches Signal oder Urzeichen. Aus den positiven und negativen Urzeichen (Ablenkung nach rechts und links) kann man Gruppen zur Bezeichnung der Buchstaben und Ziffern bilden. Bei dem atlantischen Kabel dagegen verwandte man nicht positive und negative, sondern Urzeichen mit gleichsinnigen, aber verschieden grossem Ausschlag und liess einen Ausschlag von 15° einen Morsestrich, einen Ausschlag von 20° einen Morsepunkt bezeichnen. Ausserdem kam bei der atlantischen Telegraphie der Signalcodex des englischen Capitains F. J. Bolton (Dingler's Journal 183, S. 337 aus *Génie industriel* Decbr. 1866, S. 316) zur Anwendung, welcher Marryat's Schiffscodex in einem gewissen Grade ähnlich ist. Von seinen 5 Theilen enthält der erste auf den Seiten 0—9 mit den Zeilen 0—9 die Buchstaben, Ziffern, Interpunctionszeichen und Dienstphrasen, der zweite enthält auf den Seiten 00—99 mit den Zeilen 0—9 die Silben der englischen Sprache, der dritte auf den Seiten 000—999 mit den Zeilen 0—9 häufig vorkommende Ortsnamen, die Monate, Tage, Stunden und Signale für commercielle, industrielle und politische Nachrichten, der vierte auf den Seiten 0000—9999 mit den Zeilen 0—9 die Worte der englischen Sprache und einige Sätze, der fünfte endlich auf den Seiten 00000—99999 mit den Zeilen 0—9 alle bekannten Ortsnamen und eine Reihe von Sätzen. Bei Benutzung des ersten, zweiten, dritten, vierten oder fünften Theils werden Gruppen von je 2, 3, 4, 5 oder 6 Ziffern telegraphirt. Die Benutzung dieser 5 Codices soll die Geschwindigkeit des Telegraphirens um 100% erhöhen.

Den von Thomson und Varley angegebenen Zeichengeber zum Hervorbringen positiver und negativer Urzeichen machen die Fig. 58—64 anschaulich (vgl. Dingler's Journal 181, S. 423 aus *Engineer*, Juli 1866, S. 433). Die Hauptwelle AA wird während des Telegraphirens durch ein Uhrwerk in dauernder Umdrehung erhalten; auf sie ist ein hohler Cylinder BB lose aufgesteckt, welcher in einer Reibungsscheibe D endet; durch die auf B liegende, sich einerseits gegen die auf A sitzende Scheibe T, andererseits gegen eine auf B sitzende Scheibe L anstemmende, kräftige Spiralfeder F wird D unter Vermittelung einer geölten Lederscheibe an die auf A befestigte Scheibe C angepresst; daher wird C den Cylinder B mitnehmen, so lange D sich frei bewegen kann, d. h. so lange sich nicht der zweimal rechtwinkelig gebogene, durch eine Feder auf D aufgedrückte, um die Axe cc drehbare Sperrarm G in die Nuth p (Fig. 62) am Umfang von D einlegt. Wird eine der Tasten P_1 oder P_2 auf den darunter befindlichen Stempel niedergedrückt und gleich wieder losgelassen, so hebt sie zunächst G von D ab und geht dann durch die Wirkung einer Feder gleich wieder in die Ruhelage zurück; dadurch ist aber B frei geworden und

kann A während einer Umdrehung folgen, bis sich G wieder in die Nuth p einlegt. Nun sitzen aber auf B noch 2 unter den Federn f_1 und f_2 liegende, sectorförmig ausgeschnittene parallele Scheiben L und M (Fig. 59 und 60); L mit 3 Ausschnitten liegt unter f_2, M mit 2 Ausschnitten unter f_1, und zwar sind diese beiden Scheiben, wie Fig. 61 zeigt, so gestellt, dass die massiven Sectoren der einen den leeren der andern gegenüberstehen; nur wenn beide Federn f_1 und f_2 in dem leeren Ausschnitte 6 ruhen, stehen demnach beide Federn tief, sonst ist die eine gehoben und die andere gesenkt und dabei tritt die gehobene mit einer der oberen Contactfedern v_1 oder v_2, die gesenkte mit einer der unteren Contactfedern V_1 oder V_2 in Berührung; diese Contactfedern haben Platincontacte; die Feder f_1 steht mit der Kabelklemme K, die Feder f_2 mit der Erdleitung E in Verbindung. Die Tasten P_1 und P_2 sind unabhängig von einander in den Lagern m_1, m_2 und m_3 drehbar, heben mit ihrem hintern Ende den Sperrarm G, mit dem vordern Ende dagegen wirken sie auf die beiden metallenen Arme z_1 und z_2 des Hebels des Commutators (Fig. 63); diese Arme sitzen an einer um die Axe kk drehbaren Scheibe, sind aber gegen einander isolirt und mit je einem Pole der Telegraphirbatterie b leitend verbunden; die Arme z_1 und z_2 schleifen federnd auf den Contactstücken o_1 und o_2, u_1 und u_2 des Commutators, von denen o_1 und o_2 unter sich verbunden, aber gegen die ebenfalls unter sich verbundenen u_1 und u_2 isolirt sind; letztere beide stehen durch den Draht r mit den Contactfedern v_1 und v_2, erstere durch den Draht q mit den Federn V_1 und V_2 in Verbindung. Wird die Taste P_1 niedergedrückt, so kommt z_1 mit o_1 und z_2 mit u_2, wird P_2 niedergedrückt, so kommt z_1 mit u_1 und z_2 mit o_2 in Berührung; im ersteren Falle geht der positive, im anderen der negative Strom von b über v_2 und L in das Kabel K.

Die Vorgänge beim Telegraphiren sind nun leicht zu übersehen. Stehen beide Tasten in der Ruhelage, so liegt G in der Nuth p und verhindert B, die Drehung von A mitzumachen, f_1 und f_2 liegen in den Ausschnitten 6, daher ist die Batterie b nicht geschlossen, aber das Kabel K steht durch f_1 und f_2, V_1 und V_2 mit der Erde E in Verbindung und ein ankommender Strom kann auf dem Galvanometer ein Zeichen hervorbringen. Wird die Taste P_1 niedergedrückt und so G gehoben, z_1 mit u_1 und z_2 mit o_2 in Berührung gebracht, so macht B eine Umdrehung mit A; dabei schleift erst f_2 auf 1 in L und kommt mit v_2, f_1 aber gleichzeitig mit V_1 in Berührung und der positive Strom geht von b aus über h, z_1, u_1, u_2 und r, v_2 und f_2 nach K; gleich darauf schleift f_1 auf 2 in M auf, tritt mit v_1, f_2 aber mit V_2 in Berührung, so dass jetzt ein negativer Strom von b über z_2, o_2, q, V_2 und f_2 nach K geht; beim weiteren Drehen des Cylinders B kommen dann noch die Sectoren 3 in L, 4 in M und 5 in L der Reihe nach unter die Federn f_1 und f_2, wodurch noch ein positiver, darauf ein negativer und endlich noch ein positiver Strom in das Kabel

gesendet wird. Endlich fällt *G* wieder in die Nuth *p* und nun kann ein neues Zeichen abgesendet werden, was dem Telegraphisten durch den Ton bemerklich gemacht wird, den eine von der Nase einer auf dem Cylinder *B* sitzenden Scheibe (Fig. 64) abspringende Stahlfeder erzeugt. Beim Niederdrücken der Taste P_2 ist der Vorgang ganz ähnlich, nur sind *u* und *o* jetzt mit anderen Polen von *b* verbunden, daher haben alle Ströme jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen. Dass die auf einander folgenden Ströme die richtige Dauer haben, bewirken die genau abgemessenen Längen der Ausschnitte. Nach jedem Urzeichen tritt das Kabel mit der Erde in leitende Verbindung. Die Hauptwelle *A* kann 100—200 Umdrehungen in 1 Minute machen; bei Zusammenstellung der Buchstaben und Ziffern aus 2 Urzeichen sind durchschnittlich 3,7 Urzeichen zu je einem Buchstaben erforderlich; bei 100 Umdrehungen kann man daher in 1 Minute 27 Buchstaben (= 5,4 Worte) telegraphiren; in der That telegraphirt man 6—10 Worte in 1 Minute (vgl. auch Zeitschr. d. Tel.-Ver. 11, S. 72 und 73).

Der vorstehend beschriebene Apparat lässt sich auch leicht dahin abändern, dass beim Niederdrücken der einen oder der andern Taste ein Strom von demselben Vorzeichen, aber von verschiedener Stärke in das Kabel gegeben wird. Da der Strom auch auf der Abgangsstation durch das Galvanometer geht, so bewegt sich hierbei der Lichtzeiger beim Geben vom Nullpunkt aus auf der einen, beim Empfangen von Zeichen auf der andern Seite der Skala.

Die angewandte Batterie besteht aus 20 Daniell'schen Elementen, deren Zinkzellen blos mit Wasser gefüllt sind, indem die durch Zersetzung des Kupfervitriols sich bildende, zur Leitung des Stromes erforderliche Schwefelsäure von selbst zur Zinkzelle übergeht; doch gelang es sogar durch die zu einem Stromlauf vereinigten Taue von 1865 und 1866 mittels eines Stromes zu telegraphiren, den man erhielt, indem man in einen silbernen Fingerhut verdünnte Schwefelsäure goss und 2 Stückchen Zink und Kupfer in die Flüssigkeit tauchte (*Les Mondes* XII, S. 270).

IV. Die Legung des atlantischen Telegraphentaues zwischen Irland und Neufundland.

Eine eingehende Schilderung der Vorkommnisse bei den 3 ersten atlantischen Kabellegungen in den Jahren 1857 und 1858 kann hier um so eher unterlassen werden, als diese 3 Unternehmungen in der seitdem verflossenen Zeit wiederholt eine ausführliche Besprechung gefunden haben. Die Vorgänge bei dem nach gründlichen Vorarbeiten (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 3, S. 175) begonnenen Unternehmen d. J. 1857 beschreibt u. A. Delamarche in den Elementen der unterseeischen Telegraphie (deutsch von Vichelmann, Berlin 1859, S 68—92) sehr ausführlich; desgleichen Shaffner im *telegraph manual* (S. 622—634), auch in Dingler's Journal (146, S. 104—114) findet sich eine längere Mittheilung darüber aus dem

Civil Engineer and Architect's Journal (August 1857, S. 245), dem *Cosmos, revue encyclopédique* (August 1857) und dem *Mechanics' Magazine* (29. August 1857); ähnlich in der Zeitschr. d. Tel.-Ver. (4, S. 233). Das Tau riss jedenfalls in Folge zu starker Bremsung der Auslegmaschine. Nach Verbesserungen der Auslegmaschine durch Wm. E. Everett, Appold und Charles Bright, nach den umfänglichen Versuchen des Prof. Thomson über die Leitung des Kupferdrahtes und nach der Erfindung des Spiegelgalvanometers und des Marinegalvanometers im März und April 1858, schritt man zu den beiden Versuchen des Jahres 1858, deren erster mit dem Reissen des Taus endete, während der zweite auf kurze Zeit eine telegraphische Verbindung zwischen Europa und Amerika herstellte. Die Ursachen des Misslingens und die Wahrscheinlichkeit des endlichen Gelingens bespricht Maury im *Civil Engineer and Arch. Journal* (1859, S. 221 und 320), Siemens in Dingler's Journal (151, S. 380; gegen Mohr, Bd. 150, S. 285), Varley und Henley in Shaffner's *telegraph manual* (S. 637 bis 647); vgl. auch Schellen, das atlantische Kabel (S. 40—60). Der 1858 mit verwendete Rest des Taus von 1857 war schlecht isolirt, während seiner Verfertigung nicht gründlich geprüft worden und hatte inzwischen mehrere Monate trocken und nicht kühl genug gelegen; trotzdem ward er ohne durchgreifende Ausbesserung und in einer nach Maury's Erfahrungen günstig gewählten Zeit versenkt; die Risse in der Guttapercha erzeugten Stromverluste, man griff daher zu immer kräftigeren, abwechselnd positiven und negativen Strömen*) und unter dem Einfluss derselben ward die Oxydation des Kupferdrahtes und die Zerstörung des Taus bald eine vollständige. Alle Versuche der Wiederherstellung waren vergeblich. Das Unternehmen hatte der Gesellschaft 379029 Pfd. St. (nach einer anderen Angabe 1350000 Pfd.; D. Ind.-Ztg. 1866, S. 449) gekostet, obgleich die englische und amerikanische Regierung die 2 Auslegschiffe und ihre 3 Begleitdampfer unentgeltlich dazu hergegeben hatten.

Die zur Verbindung Europas und Amerikas gewählte Linie hatten die Sondirungen als eine sehr günstige erkennen lassen. Von Irland bis 11° 15′ westlich von Greenwich ist der Meeresboden sandig und die Tiefe nimmt allmälig bis 19 Faden zu, bei 12° ist felsiger Boden in 200 Faden Tiefe, von da bis 13° 15′ schlammiger mit durchschnittlich 400 Faden Tiefe; die sandige Ebene zwischen 13° 30′ und 14° 30′ liegt im Mittel 200 Faden, der felsige Boden unter 14° 48′ 550 Faden, der schlammige unter 15° 6′ 1750 Faden tief (irischer Abhang, mit der stärksten Neigung). Zwischen dem irischen Abhang und dem 45° wechseln die Tiefen

*) Die telegraphische Verbindung zwischen den beiden das Tau auslegenden Schiffen ward durch 2 sogenannte Sandbatterien unterhalten, welche aus 240 Paaren Zink- und Kupferplatten von 14 Quadratzoll Oberfläche bestanden; diese Platten waren in verdünnte und zum Schutz gegen das Verschütten mit Sägemehl angemachte Schwefelsäure eingesetzt.

mit sanften Uebergängen zwischen 1450 und 2400 Faden (Maury: Telegraphenplateau), sind also wesentlich geringer, als anderwärts im atlantischen Ocean. Zwischen 45° 23′ und 45° 45′ nimmt die Tiefe von 2225 auf 1450 Faden ab. Fig. 67 zeigt den Verticalschnitt des Telegraphenplateaus; die Länge und Breite der Punkte, deren Tiefe in Faden eingeschrieben ist, ergiebt sich leicht aus der zugehörigen Fig. 65. Den zwischen *A* und *B* gelegenen irischen Abhang zeigt Fig. 66 in etwas geringerer Vergrösserung der Tiefen.

Da die gerade Entfernung von St. Johns auf Neufundland bis zur Insel Valentia 1640 englische (= 356 deutsche) Meilen beträgt, so hatte man 2500 Meilen Tau zur Hälfte bei Glass und Co. in Greenwich, zur Hälfte bei Newall & Co. in Birkenhead anfertigen lassen und 1858 lieferte Glass noch 900 Meilen nach. Das in Fig. 21 (Taf. I) abgebildete etwa 16 Millim. dicke Tau hatte einen 2 Millim. dicken Strang von 7 Kupferdrähten, von denen 6 um den 7. gewunden waren, darüber 3 Lagen Guttapercha, welche zusammen 2 Millim. dick waren, dann eine Lage aus fünf Fäden Hanfgarn, getränkt mit einer Mischung von $^5/_{12}$ Stockholmer Theer, $^5/_{12}$ Pech, $^1/_{12}$ gekochtem Leinöl und $^1/_{12}$ gewöhnlichem Wachs; die 18 Litzen der Schutzhülle bestanden aus je 7 Holzkohlen-Eisendrähten Nr. 22 (2 Millim. Dicke). Das von der letzten Maschine ablaufende Tau wurde durch eine heisse Mischung aus Theer, Pech und Leinöl gezogen. Das Gewicht einer Meile betrug 1 Tonne, nämlich das Kupfer 93 Pfd., die Guttapercha 237 Pfd., die Garnhülle 2 Centner, die Schutzhülle 15 Centner, der äussere Ueberzug von Pech 16 Pfd.; im Wasser wog es 13,4 Centner; seine Festigkeit betrug 3,25 Tonnen, d. h. nahe 70 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter. Die Eisendrähte liefen aus Versehen bei der einen Hälfte rechts, bei der anderen links herum. Die Küstenenden hatten eine doppelte Hanflage und 12 Eisendrähte von 7 Millim. Dicke, nach dem Tiefseetau zu aber verjüngte es sich bis zur Stärke des letzteren.

Im Jahre 1865 wurde das zum Tau zu verarbeitende Material von der dazu niedergesetzten wissenschaftlichen Commission (Galton, Fairbairn, Wheatstone, Thomson, Whitworth) geprüft; es wurden demnach über 120 verschiedene Probetaue angefertigt, vorwiegend Abänderungen des Constructionsprincips, welches von der Commission bereits unter den in Folge eines öffentlichen Ausschreibens eingelieferten Tauproben ausgewählt worden war. Als Preis für das 2300 Seemeilen lange Kabel waren 700000 Pfd. Sterl. festgesetzt und für den Fall des Gelingens noch 137170 Pfd. in alten ungarantirten Actien der *Atlantic Telegraph Company;* jedoch betheiligten sich Glass und Co. selbst mit 315000 Pfd., da 1864 erst 285000 Pfd. gezeichnet waren. Fig. 22 zeigt das Tau; der Kupferstrang war in Chatterton's Masse gehüllt, sonst wie 1858, nur wog die Seemeile nicht 107, sondern 300 Pfd.; Drahtdicke Nr. 18; Strangdicke fast 4 Millim.; Gewicht der 4 Lagen Guttapercha, welche mit Chatterton's

Mischung abwechselten, 400 Pfd. (1858 nur 261); die Schutzhülle bildeten 10 Eisendrähte (*homogenous iron*) Nr. 13 aus Webster und Horsfall's Werken zu Killmarsh bei Sheffield; jeder dieser Drähte war mit fünf Strängen aus Manilla-Garn, welches mit einer conservirenden Masse getränkt (getheert) war, umgeben; die 10 Drähte wurden spiralförmig um den mit (nach John und Edwin Wright's Patent) Jute-Hanf, der ebenfalls mit conservirender Masse (Catechulösung) getränkt war, umwickelten Kern gelegt. Gewicht einer Seemeile in der Luft $35^3/_4$ Centner, im Wasser 14 Centner, Zerreissungsfestigkeit 7 Tonnen 15 Centner, d. h. das 11fache seines Gewichts im Wasser für 1 Meile (gegen das nicht ganz 5fache von 1858), so dass es bis zu 11 Meilen Wassertiefe sich selbst tragen konnte (Zeitschr. d. Tel.-Ver. 11, S. 74; *Mech. Magaz.* XIII, S. 41). Vor Umlegung der Hanfhülle prüfte Willoughby Smith die Leitung und Isolation im Wasser von 24° C. und unter sehr hohem Drucke; als Minimum des Widerstands der Isolation für 1 Seemeile war 5700000 Einheiten von Varley (= 151,5 Millionen Siemens'scher Einheiten) festgesetzt. Das Küstenkabel hatte als Schutzhülle 12 Eisenlitzen aus je 3 galvanisirten, $^1/_4$ Zoll starken Drähten und wog bei 56 Millim. Dicke 20 Tonnen; für die irländische Küste waren 27, für die neufundländische 3 Meilen davon vorhanden; auf den letzten 1500 Fuss geht seine Dicke allmälig in die des Tiefseetaus über. Verbraucht wurden im Ganzen 25000 Meilen Kupferdraht, 35000 Meilen Eisendraht und 400000 Meilen Hanfstränge. Nachdem das Tau auf dem Great Eastern eingeschifft war, stellten Thomson und Varley am 12. Juli noch eine Reihe Versuche damit an, wobei mit den neuen Apparaten von Varley eine Geschwindigkeit von 4,27 bis 5,7 Worten in 1 Minute erreicht wurde. Die Legung leitete Canning, an Bord standen die Elektriker der *Telegraph Construction and Maintenance Company* unter der Oberleitung von de Sauty, während Varley und Thomson die Oberleitung über die Techniker der *Atlantic-Telegraph-Company* hatten. Die Batterie bestand aus 40 Daniell-schen Elementen. Die Gesammtladung des Great Eastern schätzt man auf 24000 Tonnen (*Mech. Magaz.* XIV, S. 31). Der Lauf des Schiffs ist aus Fig. 65 ersichtlich, von *l* bis *a*, doch sollte das Tau nicht wie 1858 am fernsten Ende (*Bull arm*) der Trinity-Bay, sondern in dem der Trinity-Bay 45 Meilen näheren Hafen von Heart's Content gelandet werden, ebenso sollte es an der irischen Küste nicht, wie 1858, um die Insel Valentia bei Doulus Head herum nach Ballycarberry Strand geführt werden, sondern die Landungsstelle war bei Bray Head an der gegen Wind und Wellen sehr geschützten Foilhommerumbay der Insel Valentia gewählt worden. Eine ausführliche Beschreibung des Verlaufs der ebenfalls missglückten Legung enthält *The Atlantic Telegraph* (London 1866, S. 41 ff.). Am 23. Juli Abends $10^1/_4$ Uhr, als schon $78^1/_2$ Seemeilen Tau abgelaufen waren, zeigte das Galvanometer einen Fehler im Tau; nachdem 10 Meilen

wieder aufgewunden waren, fand man einen etwa 2 Zoll langen Eisendraht im Tau, der bis auf die Kupferseele reichte. Beim Punkt *g* (Fig. 65), 636 Meilen von Valentia, kam der Great Eastern am 29. Juli an, und es waren schon Tiefen von 2400 Faden überschritten und 707 Meilen Tau ausgelegt; da zeigte sich Nachts 1 Uhr „*dead earth*“ und abermals musste das Tau aufgewunden werden, bis Abends $11^1/_4$ Uhr die fehlerhafte Stelle*) an Bord kam. Am 30. Juli musste abermals ein Stück herausgeschnitten werden, da das Tau stark beschädigt wurde, als man es vom Vordertheil, wo es beim Aufwinden zusammengelegt worden war, nach dem Hintertheil auf die Auslegmaschine brachte; erst um 10 Uhr ging die Fahrt vom Punkt *h*, 660 Meilen von Valentia, weiter. Am 31. Juli Mittags, bei *k*, war man 793 Meilen von Valentia entfernt und hatte 903 Meilen Tau versenkt. Am 2. August Morgens 8 Uhr war ein Stück Draht im Kabel mit über Deck gegangen; dasselbe war aber sicher nicht absichtlich in's Tau gesteckt, sondern aus den Hanfsträngen hervorgesprungen, rührte also, wie wahrscheinlich auch die andern, von den Schutzdrähten her. Beim Aufwinden arbeitete die Aufwindemaschine wegen Wassermangel in den Kesseln schlecht, der Great Eastern musste daher stillstehen, um das Tau nicht zu überlaufen, und gerieth dabei in eine schiefe Lage gegen das Tau; dieses legte sich über den vorstehenden Rand des äussersten *V*-Rades am Bug und verwickelte sich an dem eisernen Vorsprunge einer der Klüsen am Vordersteven. Zum Schutz des Taues, welches durch die heftige Reibung an 2 Stellen beschädigt wurde, liess man eine Kette mit einem Drahtseil hinab, um es zu halten und wieder in die Rinne des Rades zu bringen; die Aufwindemaschine kam wieder in Gang, Tau und Kette gelangten auf das Rad, allein in schräger Richtung gegen dasselbe. Schon war die erste beschädigte Stelle an Bord gebracht, da sprang das Dynamometer plötzlich noch $3^1/_2$ Zoll über 60 Centner, den höchsten Punkt, der markirt war. Kette und Drahtseil waren aus der Rinne des *V*-Rades über dessen Rand geschnappt und krachend auf ein kleineres Rad herabgefallen, wobei das Tau, mit dem sie noch verbunden waren, einen heftigen Ruck erlitt. Noch war die Maschine in Gang, Tau und Drahtseil wurden noch aufgewunden, ersteres auf eine Trommel, letzteres auf die Gangspille, da riss das Tau kurz vor dem Dynamometer ab und bald war es im Meere verschwunden. 1213 Meilen Tau waren versenkt und der Great Eastern befand sich (bei Punkt *l*) unter 51^0 $25'$ Breite und 39^0 $6'$ Länge, über einer Tiefe von 1950 Faden. Der bald darauf an einem Drahtseile von 10 Tonnen Tragkraft hinabgelassene 3 Centner schwere

*) In einem Einschnitt des einen Hanfstrangs fand man ein das ganze Tau durchdringendes Stück Eisendraht von der Dicke der äusseren Drähte, an dem einen Ende rauh, am anderen wie mit der Beisszange zugeschärft; da man diese Beschädigung für eine böswillige und absichtliche hielt, so sprach Canning öffentlich von einem erkauften Kabelmörder.

Enterhaken erreichte den Boden erst mit 2500 Faden; während das Schiff den Anker quer über die Kabellinie hin und her schleppte, stieg die Spannung des Seils bis auf 80 Centner; 6 Uhr 40 Minuten Morgens begann man das Aufwinden des Hakens mit dem Kabel und setzte es fort, obgleich kurz nach 9 Uhr ein Spurrad der Aufwindemaschine brach, allein um 3 Uhr 20 Minuten riss einer der Ringe, mittels deren die 100 Faden langen Drahtseilstücke verbunden waren, und der Haken mit 1600 Faden Seil sank ins Meer zurück. Wegen des eintretenden Nebels musste der nächste Versuch bis zum 7. August verschoben werden; 2 Uhr 40 Minuten ruhte der Enterhaken am Boden mit 2500 Faden Seil; am nächsten Morgen 7½ Uhr waren 1500 Faden (= 1 Meile) Seil aufgewunden, da sprang wieder ein Ring bei seiner dritten Windung auf der Gangspille. Ein am 10. hinabgelassener Enterhaken fasste das Tau nicht und ward wieder aufgewunden. Am 11. ward ein Haken mit kürzerem Stock an einem aus 1600 Faden Drahtseil, 220 Faden Hanfseil und 510 Faden Manillaseil bestehenden und sorgfältig geprüften Seil hinabgelassen, fasste das Tau, beim Aufwinden stieg der Zug einmal, als ein Kettenglied durch die Maschine ging, bis auf 106 Centner, allein 9 Uhr 40 Minuten Abends, als 765 Faden aufgewunden waren, riss wieder ein Glied.

Das Tau von 1866 (Fig. 23) wurde in denselben Fabriken verfertigt, wie das von 1865, von dem es sich auch nur wenig unterscheidet; unter den mit 5 Litzen aus weissem Manillahanf umwickelten Eisendrähten lag eine Schicht (mit präservirender Mischung getränkter) gewöhnlicher Hanf. Gewicht einer Seemeile in der Luft 31 Centner, im Wasser 14¾ Centner, Festigkeit 162 Centner. Die beiden Küstenenden erhielten eine Schutzhülle aus 12 einzelnen Eisendrähten, die noch mit einer präparirten Hanflage überzogen sind; an der irischen Küste ist das stärkste Ende 8 Meilen lang, die folgenden 8 Meilen sind etwas dünner und dann 14 Meilen noch dünner; das neufundländische Küstenende ist nur 5 Meilen lang. Zu dem vom vorigen Jahre verbliebenen Reste wurden noch 1660 Meilen neu gefertigt und im Ganzen 2730 Seemeilen verschifft, wovon 1960 auf die neue Linie und etwa 700 auf die Ergänzung der alten gerechnet wurden. Vor der Abfahrt des Great Eastern wurde noch ein sehr strenger Versuch mit dem Tau gemacht. In der Mitte einer Strecke von 1700 Meilen wurde das Kabel von der Eisenhülle befreit, die Guttapercha auf eine Länge von einem Fuss herausgeschält und so die Kupferader blosgelegt; das Seilstück wurde dann ins Meer geworfen und so tief hinabgelassen, dass der blosliegende Kupferdraht auf dem Meeresboden auflag. Als man nun durch den Draht telegraphirte, wobei der Strom die blosliegende Drahtstelle passiren musste, um zum anderen Drahtende hinzugelangen, erhielt man an dem Reflexgalvanometer noch immer vollkommen deutliche und lesbare Zeichen, obgleich der grösste Theil des Stromes sicher an der nicht isolirten Kabelstelle direct ins Meer und in

die Erde ging und nur ein kleiner Bruchtheil desselben das Ende der Leitung und das Galvanometer erreichte. Vor der Auslegung betrug der Isolationswiderstand 713, nach der Auslegung 2300 Millionen Siemens-scher Einheiten für 1 Knoten; die Zunahme ist theils auf Rechnung der Temperatur, theils auf Rechnung des Druckes zu schreiben (Dingler's Journal 182, S. 71 aus *Mech. Magaz.* XVI, S. 81).

Den Great Eastern begleiteten der Dampfer Medway, der Raddampfer Terrible und die Schraubendampfer Albany und William Cory. Dem Capitain Anderson des Great Eastern war Capitain Moriarty zur Anstellung der astronomischen Beobachtungen beigegeben; Canning und Clifford leiteten das Auslegen, W. Smith und Professor Thomson überwachten das elektrische Verhalten, während Varley dies an der irischen Küste that. Am 30. Juni 12 Uhr ging der Great Eastern von Sheerness die Themse hinab, in der er an mehreren Stellen den Schlamm aufrührte, da er 32 Fuss Tiefgang hatte; am 13. Juli traf er bei Valentia ein. Während der ganzen Legung (14.—27. Juli) fand nur eine einzige Unterbrechung von 3 Stunden statt; als nämlich das Tau in der Nacht vom 17. Juli vom hinteren Tender ausgelegt wurde, warf es vor der Auslegmaschine zwei Schleifen, die, weil die Maschine nicht sofort stillstand, sich zu einem unentwirrbaren Knoten zusammenzogen; in weniger als 1 Minute wurde jedoch das Schiff angehalten, ein Schaufelrad gelöst und so geschickt gesteuert, dass das vom Stern herabhängende Tau nicht eine zu starke Spannung auszuhalten hatte; nach etwa 2 Stunden war Alles wieder in Ordnung und die Fahrt ging weiter. Das 3 Meilen lange Küstenkabel wurde vom Medway aus mit Hilfe der Boote des Terrible Freitag, den 27. Juli 4 Uhr Nachmittags gelandet und nach einer vollkommen befriedigenden elektrischen Untersuchung des Taues gab Daniel Gooch, der Director der *Telegraph Construction and Maintenance Company* an Richard Atwood Glass das erste Telegramm nach Valentia*). Darauf wurden Beglückwünschungstelegramme zwischen der englischen Königin und dem Präsidenten der Vereinigten Staaten gewechselt. Am 31. Juli und 1. August wurde die telegraphische Verbindung zwischen Neufundland und dem amerikanischen Festlande durch den Albany hergestellt und am 4. August wurde die transatlantische Linie dem Verkehr übergeben.

Behufs Ergänzung des Taues von 1865 musste man von dem Bruchende des Taues absehen, weil dieses mit den Enterhaken und schweren Drahtseilen vom vorigen Jahre belastet war. Daher wurden zunächst in der Richtung der Taulinie mehrere Bojen ausgelegt und dann sollten 3 Schiffe in gewissen Entfernungen von einander zugleich nach dem Tau

*) W. Smith hat die während der Legung zwischen dem Schiff und Valentia gewechselten Telegramme gesammelt und unter dem Titel *Great Eastern Telegraph 1866 and Test room Chronicle* als Manuscript drucken lassen.

fischen. Der Albany fasste am 12. August das Tau und hing es an ein Bojentau auf, doch sank es wieder, weil ein Glied der Kette riss, welche die Boje mit dem Enterhakentau verband. Vergeblich fischte der Great Eastern am 13. fünfzehn Meilen vom Bruchende; der 14. und 15. war trüb und nebelig; am 15. Nachmittags wurde es hell, daher liess man den Enterhaken 3 Meilen südlich von der Boje Nr. 2, wo der Albany aufgestellt blieb, hinab, während der Medway 2 Meilen weiter westlich fischte. Gegen 7 Uhr hatte der Haken des Great Eastern das Tau erfasst; als man aber anfing, das Tau aufzuwinden und die grösste Boje (von 70 Centner Gewicht) vom Schiff hinabgelassen werden sollte, stiess dieses mit der Boje Nr. 1 zusammen, da es bei dem wieder eingetretenen Nebel unbemerkt von einer starken Strömung von Ost nach West getrieben worden war. Als man sich von der Boje frei gemacht hatte und Nachts 1 Uhr begann, die Kette der auszulegenden grossen Boje mit dem inzwischen um 1300 Faden aufgehobenen Enterhakentau zu befestigen, um das Kabel schwebend zu erhalten, verschwand das Kabel wieder, bevor die Spleissung des Enterhaken- und Bojentaus vollendet war. Am 16. 4½ Uhr Nachmittags wurde der Enterhaken 6 Meilen östlicher 2400 Faden tief hinabgelassen, fasste um 7 das Tau; am 17. 4½ Uhr Morgens begann man das Aufziehen und 10¾ Uhr erschien das Tau über dem Meeresspiegel und zeigte in seiner oberen Hälfte die schwarzen getheerten Manillastränge, unten einen Ueberzug von weisslichem Schlamm. Aus dem vom Dynamometer angegebenen Zuge von 6½ Tonnen berechnete Thomson, dass das Tau zu jeder Seite des Enterhakens in einer Länge von 4½ Meilen gehoben sei, dass es den Meeresboden in 2 um 8 Meilen von einander entfernten Punkten berühre, dass es am Fanghaken einen Winkel von 89° bildete und auf jeder Seite dieses Hakens 4½ Tonnen Spannung habe. Als man aber einen Stopfer, d. h. eine an einem starken Drahtseile befindliche Klemmvorrichtung an das Enterhakentau befestigen wollte, sprang das Kabel bei einer seitlichen Neigung des Hakens von dessen Flügeln ab und versank wieder, 5 Minuten später, als es erschienen war. Am 19. August 4¼ Uhr ward das Tau wieder gefasst, 1000 Faden aufgewunden und unter 51° 31½′ Breite und 38° 39′ 50″ Länge an eine Boje befestigt. Die folgende Woche bemühten sich die 3 Schiffe vergeblich, an verschiedenen Stellen das Tau zu fischen, aber bei dem ungünstigen Wetter fuhr man einen falschen Cours oder das (mehrmals) gefasste Tau entschlüpfte wieder. Die Stimmung an Bord wurde dadurch ungünstig. Am 26. Abends 5 Uhr fasste der Albany ein Tau, brachte es um 11½ an Bord und hängte es 12½ Uhr an eine Boje, allein beim Aufwinden desselben durch den Albany erwies es sich als ein 2 Meilen langes Bruchstück. Auch die am 19. gelegte Boje sah man flott an einer anderen Stelle, sie hatte also das Kabel verlassen. Am 28. machte der Great Eastern wieder zwei vergebliche Versuche, war inzwischen 15 Meilen östlich von der

Stelle, wo man das Fischen begonnen hatte, in immer tieferes Wasser gelangt und beim letzten Versuch am 29. erreichte der Enterhaken bei 2500 Faden anscheinend den Boden nicht. Jetzt beschloss man, 80 Meilen östlicher zu gehen, wo die Karten nur 1900 Faden Tiefe angaben. Am 30. legte man hier eine Boje aus, da der heftige Wind nichts Anderes vorzunehmen gestattete. Am 31. hatte sich der Wind gelegt; von 10—1 Uhr Mittags liess der Great Eastern einen Enterhaken mit 2150 Faden Tau hinab, um 2 Uhr 50 Minuten war das Kabel gefasst und man begann sofort mit dem Aufwinden; am 1. September 4 Uhr 50 Minuten früh wurde das Tau in 800 Faden Tiefe an einer Boje befestigt, 95 Meilen von dem Bruchende entfernt; um 8 Uhr 50 Minuten liessen der Great Eastern 3 Meilen und der Medway 5 Meilen von der Boje Enterhaken hinab; um 5 Uhr Nachmittags fasste der Great Eastern das Kabel und hob es bis 300 Faden unter dem Spiegel; 7½ Uhr hatte auch der Medway das Kabel gefasst, erhielt den Befehl: „schnell aufziehen und das Kabel brechen" und um 10 Uhr Abends war das Kabel 300 Faden unter dem Spiegel am Enterhaken gerissen. Nun begann der Great Eastern wieder das Aufwinden, worauf das Kabel 10 Minuten vor 1 Uhr über dem Spiegel erschien und 3½ Uhr Morgens in den Untersuchungsraum an Bord eingeführt wurde. Das dritte nach Valentia gesandte elektrische Signal wurde von dort beantwortet, worauf Canning und Glass unter allgemeinem Jubel ihre Glückwünsche austauschten. Um 6¾ Uhr war das Ergänzungsstück an das gehobene Kabel angeknüpft und 7 Uhr 10 Minuten brach der Great Eastern nach Heart's Content auf, welches er am 8. September 11 Uhr Vormittags erreichte, nachdem an diesem Tage, 13 Meilen von Heart's Content, der einzige Unfall auf dieser Fahrt glücklich überstanden, nämlich eine entdeckte Fehlerstelle aus dem Kabel herausgeschnitten worden war, noch ehe sie das Meer erreicht hatte. Das Kabelende wurde auf den Medway gebracht, mit dem Küstentau zusammengespleisst und dieses noch an demselben Abende gelandet. Die Isolation zeigte sich bei dem aufgehobenen Tau besser, als sie 1865 bei seiner Legung gewesen war.

Die Lage der beiden Taue, von denen das neue am 20. Juli 1867 zum zweiten Male, 50 Seemeilen von Heart's Content, gerissen ist, ergiebt sich aus folgenden, dem *Nautical Magazine* (October 1866) entnommenen täglichen Schiffspositionen:

1865	Nördl. Br.	W. L. v. Gr.	Entfernung in Seemeilen	Tauläpge in Seemeilen
24. Juli	52° 2′	12° 23′	—	—
25.	52 5	14 22	150	175
26.	52 32	18 30	—	300
27.	52 38	19 38	—	—
28.	52 42	22 20	145	500
29.	52 40	26 12	600	650
30.	52 40	27 30	650	750

1865	Nördl. Br.	W. L. v. Gr.	Entfernung	Taulänge
			in Seemeilen	
31. Juli	52° 20′	30° 10′	750	900
1. Aug.	51 57	34 5	900	1050
2.	51 35	37 52	1050	1200
1866				
2. Septbr.	52 0	36 40	von diesem Punkt	
3.	51 32	39 37	157	184
4.	51 0	41 55	226	254
5.	50 12	45 0	353	418
6.	49 44	48 2	472	555
7.	49 10	51 28	606	698
8.	Landung bei Heart's Content.			

1866	Nördl. Br.	W. L.	Entfernung	Kabellänge	Tiefe
			in Seemeilen		in engl. Faden
14. Juli	52° 0′	14° 1′	135,75	144,25	120—216
15.	52 1	17 29	263	283	216—1950
16.	52 6	20 36	378	420	1950—1575
17.	52 15	23 48	495,5	557,82	1575—1950
18.	52 1	26 37	600,9	682,48	1950—2400
19.	51 54	29 39	712,9	811,14	2400—2176
20.	51 36	32 57	830,4	938,6	2176—1550
21.	51 18	36 1	952,3	1074,33	1600—1657
22.	50 48	30 14	1075,7	1207,47	1657—1950
23.	50 16	42 16	1196,9	1345,24	2424—2050
24.	49 30	45 21	1319,67	1480,06	2050—2225
25.	49 30	48 11	1430	1610	2225—1203
26.	48 45	51 16	1558	1744	1203—130
27.	Ankunft in der Trinitybay.				

Die Unternehmungen in den Jahren 1865 und 1866 haben je 600000 Pfd. Sterl. gekostet. Das einfache Telegramm von 20 Worten kostete anfänglich 20 Pfd., seit dem 1. Novbr. 1866 10 Pfd.; die für den 1. März 1867 beabsichtigte Herabsetzung auf 5 Pfd. trat nicht ein. Die Geschwindigkeit des Telegraphirens wird verschieden angegeben; 6 Worte (Dingler's Journal 182, S. 71), 12—14 Worte, 15—20 Worte in 1 Minute; in der 81 Worte enthaltenden Botschaft des amerikanischen Präsidenten an die englische Königin betrug sie 7 Worte in 1 Minute (D. Ind.-Ztg. 1866, S. 330 und 339; *Les Mondes* XII, S. 270). Bei 10 Worten in der Minute würde die Einnahme sich täglich auf 14400, jährlich auf 4320000 Pfd. belaufen. In den ersten 8 Wochen vom 28. Juli bis 21. Sept. betrug sie 46084 Pfd., d. h. täglich 837 Pfd. Das Tau von 1865 beförderte am 17. Mai 71 Telegramme für 1008 Pfd. 19 Schillinge. Nach der Herabsetzung der Beförderungsgebühr von 20 auf 10 Pfd. stieg die tägliche Einnahme von 813 auf 874 Pfd. (D. Ind.-Ztg. 1867, S. 9). Der Reingewinn stieg bald auf 25 Procent, so dass 10 Procent als Abschlagsdividende gegeben werden konnten (D. Ind.-Ztg. 1867, S. 29).

Es möge gestattet sein, einige

Berichtigungen und Nachträge

anzufügen, welche erst nach Schluss des Manuscriptes (im Herbst 1867) veröffentlicht, beziehentlich mir bekannt wurden:

1. Auf Jahrgang XIII, Seite 27 ist

$$(u - v \cos \alpha) \sqrt{WD : (WD - T) \sin \alpha}$$

zu lesen, und S. 22 Z. 1 v. o. „Wird dagegen".

2. (Zu Jahrg. XII, S. 424.) Das Tau zwischen Frankreich und Nordamerika ist 1868 nicht gelegt worden, muss aber von der durch Erlanger und Reuter vertretenen, zu seiner Legung concessionirten Gesellschaft contractlich bis 1. September 1869 vollständig versenkt sein. Es bekommt zwischen Brest und den Inseln St. Pierre und Miquelon 2688 und zwischen St. Pierre-Miquelon und New-York 960 englische Seemeilen Länge. Von St. Pierre-Miquelon läuft es nach der Küste Neubraunschweigs und durch die nordamerikanischen Staaten Maine, New-Hampshire, Massachusets und Connecticut nach New-York (Leipziger Ztg. 1868, S. 4703).

3. (Zu Jahrg. XIII, S. 459.) Am Ende der oben (S. 453) erwähnten künstlichen Leitung von 13000 Meilen Länge erreichte der Strom erst nach 17, 26 und 40 Secunden nach dem Schliessen der Batterie ein Viertel, die Hälfte und drei Viertel seiner Maximalstärke.

4. Ueber die Versuche von Varley mit zwei künstlichen Kabeln von gleicher Länge, von denen das eine (aus Röhren mit Zinkvitriol gebildete) sechsmal so langsam arbeitet, als das andere (aus Neusilberdraht) vgl. *Les Mondes* XV, 13. und 14. Lieferung (vom 13. Novbr. und 5. Decbr. 1867) S. 539 und 578 ff.

5. Auf dem Tau von 1858 wurden in der Zeit vom 10. August bis 1. September 1858 (nach Dingler's Journal 153, S. 236) 97 Telegramme von Valentia nach New-York und 269 von New-York nach Valentia befördert. (Nach Westermann's Monatsheften Nr. 127, S. 90 dagegen 129 und 271 Telegramme.)

6. Dingler's Journal (187, S. 24 aus *Mechanics' Magazine*, November 1867, Seite 330) enthält eine Abhandlung von C. W. Siemens über die zum Auslegen des Kabels im mittelländischen Meere angewandte Maschinerie. — Ueber Bright's Relais (S. 473) vgl. auch Jahrg. VI, S. 382.

7. In Dingler's Journal (185, S. 1) bespricht C. F. Varley die Phänomene des atlantischen und anderer langer Unterseekabel und giebt auch einen Apparat an zur Beseitigung der durch fremdartige (Erd-) Ströme hervorgebrachten Störungen im Signalisiren.

8. Die Einschaltung der Unterseestation Valentia habe ich im Polytechnischen Centralblatt (Jahrg. 1867, S. 1303 aus *Etudes sur l'exposition de* 1867), die Einschaltung der Untersee-Translationsstation Emden aber ebendaselbst (Jahrg. 1868, S. 285) mitgetheilt.

9. Das Tau vom Jahre 1866 ist seitdem (vgl. Jahrg. XII, S. 421) noch zweimal gerissen; das erste Mal schon am 20. Juli 1867 in einer Entfernung von 50 Seemeilen von Hearts Content und erst am 20. September konnte von New-York die Wiederherstellung gemeldet werden. Das zweite Mal am 3. August 1868, und es dauerte diese dritte Unterbrechung bis zum 2. October 1868.

10. Vom 1. December 1867 ab sollte ein zwischen London und New-York gewechseltes Telegramm von 15 Worten = 75 Buchstaben (5 Worte für die Adresse) 35 Thaler kosten. Eine weitere Herabsetzung ward am 30. Juni 1868 beschlossen.

XVI.

Beitrag zur mechanischen Theorie der Wärme.

Von

Professor Julius Eibel

in Stockerau bei Wien.

I.

Seitdem die Vibrationstheorie in der Acustik und Optik zu so überraschenden Resultaten gelangte, war man bemüht, auch die Erscheinungen der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität durch rein mechanische Principien zu erklären und die Emanationstheorien aus der Physik zu verbannen. Melloni hatte durch seine genialen Versuche die Identität der Wärmestrahlen mit den Lichtstrahlen dargethan. Die Analogie mit dem Schalle führte nun zu der Hypothese, dass das Brennen und das fühlbare Warmsein eines Körpers wahrscheinlich nur ein Schwingungszustand sei, der sich mit der Temperatur ändere; ein leuchtender oder warmer Körper sei analog einer tonerzeugenden Platte oder Glocke in sogenannter stehender Schwingung und theile seine Vibrationen dem umgebenden Aether mit, welcher dieselben fortpflanze, bis sie unsere Nerven erreichen. Mayer sprach im Jahre 1842 zum ersten Male entschieden aus, dass wir jene Arbeitsgrösse finden müssten, welche äquivalent sei der calorischen Einheit; auch gab er eine freilich rohe Bestimmung dieser Grösse (365 Meter-Kilogrammes statt 424). Es war damit gesagt, dass die Wärme überhaupt nichts Anderes, als eine Molecularbewegung sei, die Art und Weise dieser Bewegung war damit noch keineswegs angegeben; auch ist man wegen der Schwierigkeit des Problems noch heute zu keiner genauen Angabe gelangt, obwohl sich viele Koriphäen der Wissenschaft darnach bestrebten. Ich erinnere hier an die Arbeiten Redtenbacher's, Clausius's, Krönig's, Jochmann's etc.

Schon ohne Kenntniss der Molecularschwingungen, blos durch das Princip der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, ist die mechanische Theorie der Wärme zu überraschenden Resultaten gelangt, ja sie ist be-

reits im Stande, technischen Zwecken mit einer hinreichenden Vollkommenheit zu dienen, wie dies Zeuner und Clausius wohl deutlich genug gezeigt haben; aber die Forderung nach Aufstellung einer speciellen Schwingungshypothese tritt immer gebieterischer an uns heran, insbesondere in den Wärmeprocessen der Dämpfe. Die verbreitetste Ansicht über die Molecularconstitution der Körper ist wohl die von Clausius und Krönig; es sind aber gegen dieselbe mehrere Bedenken erhoben worden, so durch Jochmann (Schlömilch's Journal 1860, V. Jahrg. 2. Heft). Es soll nun der Zweck dieser Zeilen sein, einiges Streiflicht auf diese sehr wichtige Sache zu werfen.

II.

Nach der atomistischen Anschauungsweise ist ein jeder Körper ein System materieller Punkte (Atome), zwischen denen Verbindungen existiren, die erzeugt werden durch Molecularkräfte, welche Functionen der Entfernungen sind. Die Atome eines jeden (warmen) Körpers schwingen um gewisse Gleichgewichtslagen; es werden daher im Allgemeinen ihre Verbindungen Functionen der Zeit und der Coordinaten der einzelnen Molekel sein. Die Verbindungen zwischen den Atomen können geändert werden; denn sonst könnte nicht ein Körper aus einem Aggregatszustande in den anderen übergehen; ja zwischen den schwingenden Molekeln eines (idealen) Gases hören dieselben ganz auf, wie gewöhnlich (nach Clausius und Krönig) angenommen wird; es werden diese Molekel also in geradlinigen Bahnen fortschreiten, so lange sich ein jedes ausser der Wirkungssphäre des benachbarten befindet.

Um zu einer mathematischen Anschauung zu gelangen, denken wir uns vor der Hand nur ein System, welches aus einer endlichen Anzahl von materiellen Punkten besteht; die Schlüsse, welche für dasselbe gelten, lassen sich dann leicht auf ein System von unendlich vielen Molekeln ausdehnen.

Die genannten Verbindungen sollen ausgedrückt werden durch die Gleichungen

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ \ldots$$

denen die Coordinaten der betreffenden Molekel und die Zeit zu genügen haben; diese Gleichungen sind in unserem Falle nichts Anderes, als die algebraischen Darstellungen der Bahnen der schwingenden Molekel, und von ihnen hängt im Grunde der Aggregatszustand ab.

Ausser diesen Beziehungen zwischen den Molekeln können auf das System noch Aussenwirkungen stattfinden, die wir uns repräsentirt denken durch Kräfte, welche auf die einzelnen Molekel wirken. Seien X_1, Y_1, Z_1 die rechtwinkeligen Componenten jener Kraft, die auf das Molecul m_1 (mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1) wirkt; X_2, Y_2, Z_2 die Componenten der auf m_2 (x_2, y_2, z_2) wirkenden Kraft etc. Die Kräfte verleihen den materiellen

Punkten nicht jene Geschwindigkeiten oder Bewegungen, welche dieselben erhielten, wenn sie frei wären; auch werden die vermöge ihrer (Aggregats-) Verbindungen bereits schwingenden Molekel im Allgemeinen aus den Bahnen gelenkt und erhalten neue Geschwindigkeiten, die wir mit $v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wollen. Dadurch, dass die Molekel aus ihren ursprünglichen Bahnen (die wohl Curven der zweiten oder ersten Ordnung sind) herausgebracht werden, entstehen neue Verbindungen unter ihnen; es ist also durch äussere Einwirkung auf ein System eine Aenderung des Aggregatszustandes denkbar.

III.

Bevor wir das Princip des D'Alembert anwenden, müssen wir noch einen Blick auf die (Aggregats-) Verbindungen werfen und eine wichtige Unterscheidung machen. Ob nun äussere Kräfte auf das System wirken oder nicht, so können die Verbindungen der Art sein, dass die Molekel analog den Doppelsternen geschlossene Bahnen beschreiben; es giebt aber auch Zustände, wo die Molecularbewegungen so beschaffen sind, dass durch sie in dem Systeme selbst schon eine äussere Bewegung erzeugt wird. Letzterer Zustand kann auch herbeigeführt werden, wenn man, falls auf das System keine äusseren Kräfte wirken, solche anbringt, oder die etwa schon vorhandenen ändert. Ein Beispiel hierzu wäre folgendes: Man denke sich einen relativ kleinen Theil einer Gasmenge comprimirt und nun das System sich selbst überlassen; bekanntlich schreitet eine Welle in demselben fort, d. h. es gelangen die verschiedenen Theile in äussere Bewegung. Auch das Ausströmungsproblem gehört hierher.

Mathematisch ist der Unterschied der genannten Zustände dadurch auszudrücken, dass im ersten Falle die Coordinaten des Molekels wohl von der Zeit abhängen

$$x = f(\alpha, t),$$
$$y = F(\beta, t),$$
$$z = \varphi(\gamma, t),$$

aber diese letztere eliminirt werden kann, wodurch man dann eben auf die Gleichungen der Bahnen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

kommt, dass aber im zweiten Falle die Parameter α, β, γ der Bahncurven noch Functionen der Zeit sind, diese also in den Functionen L, M, N explicirt erscheint. Um den Unterschied der Molecularbewegungen durch ein einfaches Analogon zu veranschaulichen, denke man sich die Bewegung eines Punktes im Kreise mit der in einer Epicycloide verglichen.

IV.

Das Princip des D'Alembert giebt nun bekanntlich für den ersten der in III unterschiedenen Fälle die Relation:

$$1)\qquad \tfrac{1}{2}\,\partial\,\Sigma\,(m v^2) = \Sigma\,(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)$$

oder

$$1')\qquad \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(m v^2) - \Sigma\int (X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = const.,$$

welche uns aussagt, dass die lebendige Kraft der schwingenden Molekel ungeändert bleibt, wenn keine Aussenkräfte auf das System wirken, weil für $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$

$$2)\qquad \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(m v^2) = const.$$

Die Differenz auf der linken Seite der Gleichung 1′) wird gewöhnlich die Wirkungsfunction des Systems genannt. Die Kräfte, welche die Verbindungen ersetzen könnten, seien λ, μ, ν ...; sie können bestimmt werden aus den Gleichungen:

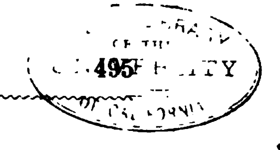
$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
X - m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \lambda\dfrac{\partial L}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial M}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0\\
Y - m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda\dfrac{\partial L}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial M}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial N}{\partial y} + \ldots = 0\\
Z - m\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \lambda\dfrac{\partial L}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial M}{\partial z} + \nu\dfrac{\partial N}{\partial z} + \ldots = 0\\
X' - m'\dfrac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \lambda\dfrac{\partial L}{\partial x'} + \mu\dfrac{\partial M}{\partial x'} + \nu\dfrac{\partial N}{\partial x'} + \ldots = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}$$

Wir wollen nun die Aenderungen ins Auge fassen, die mit dem Systeme vorgenommen werden können, und sehen dabei zuerst, dass dieselben einen Einfluss auf die Wirkungsfunction haben dürften. Solche Aenderungsprocesse können aber zweifacher Natur sein: entweder bleibt während der Aenderung das System stets in dem Zustande des ersten Falles, so dass sich in jedem Augenblicke eine der Gleichung 1′) analoge Beziehung aufschreiben lässt, oder es wird der Zustand des zweiten Falles herbeigeführt, so dass plötzlich in den nunmehr entstehenden Molecularverbindungen

$$L' = 0,\quad M' = 0,\quad N' = 0, \ldots$$

die Zeit maassgebend erscheint und für die Aenderung nicht mehr eine mit der Relation 1′) analoge giltig bleibt. Eine Zustandsänderung der ersten Art nennt man „einen umkehrbaren Process“, weil das System auf demselben Wege wieder in seinen ursprünglichen Zustand gelangen kann, im Gegensatze zu dem letzteren Processe, der ein „nicht umkehrbarer“ ist.

Die Gleichungen 1) und 1′) gelten für diese letzteren Processe nicht mehr; ebenso ändern sich die Relationen 3) mit jedem Augenblicke, weil die Verbindungsgleichungen andere werden.



V.

Die Anwendung der in den ersten vier Abschnitten aufgestellten Sätze auf die Wärmebewegung ist nun ohne Schwierigkeit. Die Gleichung 2)

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(m v^2) = const.$$
$$(X=0,\ Y=0,\ Z=0)$$

interpretirt Clausius dadurch, dass er annimmt, „die Temperatur eines Körpers sei proportional der Summe der lebendigen Kräfte seiner Molekel“; es bliebe also nach dieser Annahme die Temperatur constant, so lange keine äusseren Kräfte auf die Molekel wirken.

Jochmann hat nun in Schlömilch's Journal („Beiträge zur Theorie der Gase“ 1860 V, 2. Heft) die Consequenzen aus der Clausius-schen Annahme gezogen und auf Ergebnisse gewiesen, die mit den Beobachtungen im Widerspruche stehen. Er zählt insbesondere vier Punkte auf, die ihm auf eine Unhaltbarkeit der Clausius'schen Hypothese deuten:

„2. Diese Hypothese ist bis jetzt mindestens noch den Nachweis schuldig, warum die Bedingung des Wärmegleichgewichts zwischen zwei heterogenen Körpern darin besteht, dass die mittlere lebendige Kraft eines (chemischen) Atoms in beiden Körpern gleich gross ist.

3. Man stösst bei dieser Hypothese auf die Schwierigkeit, dass die Wärmebewegung von der fortschreitenden Bewegung einer Gasmasse überhaupt nicht zu unterscheiden ist; dieselbe führt bei der Ausströmung eines Gases in einen luftleeren oder luftverdünnten Raum zu Consequenzen, welche mit der Erfahrung im Widerspruche stehen.

4. Die Argumente, durch welche Herr Clausius gewisse gegen die Hypothese gerichtete Einwürfe zu widerlegen gesucht hat, erreichen diesen Zweck nur theilweise. Insbesondere treffen sie nicht den Einwand, dass locale Temperaturverschiedenheiten in einem luftförmigen Medium sich in ausserordentlich kurzer Zeit ausgleichen müssten.

5. Die Hypothese ist ferner nicht im Stande, über die Gesetze der Fortpflanzung des Schalls in luftförmigen Medien genügende Rechenschaft zu geben.

6. Aus alledem ergiebt sich die Folgerung, dass es wenigstens vor der Hand noch ungerechtfertigt ist, die in einem Körper enthaltene Wärmemenge ohne Weiteres, wie es zu geschehen pflegt, mit der lebendigen Kraft der Molecularbewegung zu identificiren oder die Temperatur der lebendigen Kraft eines Atoms proportional zu setzen.“

Ich glaube nun, dass die letzten vier Punkte als widerlegt und die Ansichten von Clausius als gerechtfertigt angesehen werden können, wenn man die Wärmeprocesse so auffasst, wie es in den Abschnitten I—IV geschehen ist. Man bemerkt dann sogleich den Irrthum Herrn Jochmann's: die Probleme, welche er betrachtet, das Ausströmungs-,

das Wärme-*) und das Schallleitungsproblem sind lauter nicht umkehrbare Processe, auf die er aber nichtsdestoweniger die Gleichung 1')

$$\frac{1}{2}\Sigma(mv^2) - \Sigma\int(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = const.$$

anwendet, obwohl dieselbe für seine Fälle keine Geltung mehr hat, wie wir in IV gesehen. In der That schwingen auch die Molekel bei den genannten Problemen in ganz anderen Bahnen, als wenn ein Gas sich selbst überlassen oder einem umkehrbaren Processe unterworfen wird. Die Hypothese des Clausius entgeht durch Adoption dieser hier entwickelten Ansichten zugleich der in Jochmann's drittem Punkte angedeuteten Klippe, „dass die Wärmebewegung von der fortschreitenden Bewegung einer Gasmasse überhaupt nicht zu unterscheiden ist." Denn es ist wohl richtig, dass in Folge der Ansicht Clausius' das Potential einer Gasmasse auf sich selbst einen constanten Werth haben müsste, wenn das Gas ohne Aenderung seiner Wirkungsfunction sich ausdehnt, weil nach Thomson-Joule's Versuchen bei einer solchen Dilatation die lebendige Kraft constant bleibt. Es ist aber nur richtig, sobald die Gleichung 1') fortwährend besteht, so lange also die Processe, die mit dem Gase vorgenommen werden, umkehrbare sind. Nun ist aber nach dem Gesagten klar, dass das Potential einer Gasmasse auf sich selbst bei einem nicht umkehrbaren Processe gar nicht mehr constant, sondern eine Function der Zeit sein wird, wodurch es eine fortschreitende Bewegung involvirt, die sehr gut von der Wärmebewegung zu trennen ist, wie auch, um ein bereits gewähltes Analogon nochmals in Erinnerung zu bringen, die fortschreitende Bewegung in einer Cycloide sehr deutlich von der wälzenden unterschieden werden kann.

Schliesslich erwähne ich noch, was auch aus dem Gesagten naturgemäss fliesst, dass der Potential-Calcul für die mechanische Theorie der Wärme nicht ausreicht, weil derselbe nur unter der beschränkenden Bedingung ausgebildet ist, dass in dem Systeme keine Verbindungen existiren, welche die Zeit explicite enthalten; die mathematischen Physiker werden genöthigt sein, einen allgemeineren „Vibrations-Calcul" zu entwickeln, um auch die so häufig vorkommenden nicht umkehrbaren Wärmeprocesse in den Kreis ihrer Betrachtungen ziehen zu können. Dieser Vibrationscalcul enthielte dann als speciellen (so zu sagen „adiabatischen") Fall sämmtliche Probleme der Aërodynamik, von welchen einige schon durch Zeuner gelöst worden sind, während die umkehrbaren Wärmeprocesse auch calorisch-statische genannt werden dürften (z. B. das barometrische Höhenmessen, die Festigkeitsaufgaben etc.). Es ist aus diesen wenigen Andeutungen schon, glaube ich, die grosse Wichtigkeit und die ungeheure Tragweite der Hypothese des Clausius genügend abzusehen.

*) Beiläufig sei gesagt, dass für dieses das Experiment mit dem sogenannten Wackler wichtig werden kann.

XVII.

Ueber den Temperaturzustand eines von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers.

Von

Dr. Frosch,

Gymnasiallehrer zu Schneidemühl.

---

§. 1.

Darlegung der Methode, durch welche die Lösung des allgemeinen Problems zurückgeführt wird auf diejenige eines speciellen Falles.

1. Unter Zugrundelegung einer festen Ebene kann man in optischer Beziehung jeden von zwei Punkten das Bild des anderen nennen, wenn sie in ein und derselben auf der Ebene errichteten Senkrechten liegen und ihre Entfernungen von der ersteren gleich sind. Von dieser Ausdrucksweise soll im Folgenden, um eine kürzere und bequemere Bezeichnung zu ermöglichen, auch in dem Falle Gebrauch gemacht werden, wenn anstatt der festen Ebene eine feste Kugelfläche S zu Grunde gelegt wird, und zwar soll unter dem Bilde eines beliebigen Punktes o im Raume derjenige ω verstanden werden, welcher mit dem gegebenen auf demselben Radius resp. dessen Verlängerung gelegen ist, dergestalt, dass ihre Distanzen vom Mittelpunkt als Product das Quadrat des Radius der Kugel ergeben. Man sieht leicht ein, dass diese Bezeichnungsweise in die ursprüngliche übergeht, sobald man den Mittelpunkt der Kugel in unendliche Ferne fortrücken lässt, wodurch die Kugelfläche selbst sich in eine Ebene verwandelt.

Es soll nun die Abhängigkeit des Bildes ω eines beliebigen Punktes o von diesem analytisch ausgedrückt werden. Zu dem Ende werde der Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen, x, y, z seien die Coordinaten des Punktes o, ξ, η, ζ diejenigen des Punktes ω. Alsdann folgen aus der Definition der Verwandtschaft beider die Gleichungen:

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta,$$
$$r \cdot \varrho = c^2,$$

wenn c den Radius der Kugel und

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

die Entfernungen der Punkte vom Anfangspunkte darstellen; oder in einer anderen zur Transformation geeigneteren Form

$$x=c^2\cdot\frac{\xi}{\varrho^2},\quad \xi=c^2\cdot\frac{x}{r^2},$$
$$y=c^2\cdot\frac{\eta}{\varrho^2},\quad \eta=c^2\cdot\frac{y}{r^2},$$
$$z=c^2\cdot\frac{\zeta}{\varrho^2},\quad \zeta=c^2\cdot\frac{z}{r^2},$$

aus deren Symmetrie erhellt, dass jeder der Punkte o und ω das Bild des anderen ist.

2. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung ergiebt sich weiter, dass jedem Punkte $\begin{matrix}\text{ausserhalb}\\\text{innerhalb}\end{matrix}$ der Kugel S ein Punkt $\begin{matrix}\text{innerhalb}\\\text{ausserhalb}\end{matrix}$ derselben entspricht, dass dagegen beide zusammenfallen, sobald einer von ihnen auf der Kugelfläche selbst liegt. Ferner: dass, wie das Bild eines Punktes wiederum ein Punkt ist, so auch dasjenige einer Linie, einer Fläche, eines Körpers wiederum eine Linie, eine Fläche, ein Körper ist, deren Gleichungen aus den gegebenen durch die obigen Transformationsformeln gefunden werden.

3. Um zunächst zu untersuchen, welches das Bild einer Ebene ist, seien A, B, C die Cosinusse der Winkel, welche ihre Normale mit den Coordinatenaxen bildet, D ihre Entfernung vom Anfangspunkte. Ihre Gleichung ist alsdann:

$$Ax+By+Cz-D=0.$$

Durch Einsetzung der Werthe für x, y, z geht dieselbe über in:

$$Ac^2\xi+Bc^2\eta+Cc^2\zeta-D\varrho^2=0.$$

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn nämlich die Ebene durch den Anfangspunkt geht, also $D=0$ ist, so erhält man

$$A\xi+B\eta+C\zeta=0,$$

die Gleichung der Ebene selbst. Ist dies jedoch nicht der Fall, so lässt sich die obige Gleichung auf die Form bringen:

$$\left(\xi-\frac{c^2}{2D}A\right)^2+\left(\eta-\frac{c^2}{2D}B\right)^2+\left(\zeta-\frac{c^2}{2D}C\right)^2-\left(\frac{c^2}{2D}\right)^2=0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in der Normalen der gegebenen Ebene in einer Entfernung $=\frac{c^2}{2D}$ vom Anfangspunkt liegt, und welche, weil ihr Radius $=\frac{c^2}{2D}$ ist, durch diesen selbst hindurchgeht.

Es folgt daraus, dass in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche das Bild einer beliebigen, durch den Mittelpunkt hindurchgehenden Ebene wiederum eine Ebene, dasjenige einer beliebigen anderen Ebene eine Kugel ist.

4. Um ferner das Bild einer beliebigen Kugelfläche zu erhalten, werde angenommen, dass ihr Mittelpunkt auf der X-Axe in einer Entfernung $=a$ vom Anfangspunkt liegt. Ihre Gleichung ist alsdann, wenn d den Radius dieser Kugelfläche bezeichnet:

$$(x-a)^2+y^2+z^2-d^2=0,$$

oder

$$r^2-2ax+(a^2-d^2)=0.$$

Dieselbe geht durch die Transformation über in:

$$c^4-2ac^2\xi+(a^2-d^2)\varrho^2=0.$$

Auch hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Geht die Kugelfläche durch den Anfangspunkt, ist also $a=d$, so erhält man:

$$\xi-\frac{c^2}{2a}=0,$$

die Gleichung einer Ebene, welche der YZ-Ebene parallel ist und um die Strecke $=\frac{c^2}{2a}$ von ihr absteht. Ist dies jedoch nicht der Fall, so geht sie über in die folgende:

$$\varrho^2-2\cdot\frac{ac^2}{a^2-d^2}\xi+\frac{c^4}{a^2-d^2}=0,$$

oder auch

$$\left(\xi-\frac{ac^2}{a^2-d^2}\right)^2+\eta^2+\zeta^2-\left(\frac{dc^2}{a^2-d^2}\right)^2=0.$$

Sie repräsentirt also ebenfalls eine Kugelfläche, deren Centrum in der X-Axe in einer Entfernung $=\frac{ac^2}{a^2-d^2}$ vom Anfangspunkt liegt und deren Radius $=\frac{dc^2}{a^2-d^2}$ ist.

Es ist also in Bezug auf eine feste Kugelfläche das Bild einer beliebigen anderen Kugelfläche, wenn sie durch den Anfangspunkt hindurchgeht, eine Ebene, in jedem anderen Falle wiederum eine Kugelfläche.

5. Die zuletzt gefundene Gleichung des Bildes einer Kugelfläche soll nun genauer untersucht und zugleich der bisher beliebig angenommene Radius der Kugelfläche S näher bestimmt werden. Es sei in Bezug auf die Kugelfläche K, deren Bild bestimmt werden soll, α der dem Anfangspunkt als Pol (im gewöhnlichen Sinne) entsprechende Punkt, so ist $\overline{\alpha K}=\frac{d^2}{a}$; derselbe ist demnach vom Anfangspunkt um die Strecke $=a-\frac{d^2}{a}=\frac{a^2-d^2}{a}$

entfernt. Nimmt man nun an, dass die Kugelfläche S durch den Punkt α hindurchgeht, so hat man zu setzen $c=\frac{a^2-d^2}{a}$. Durch diese Substitution geht die obige Gleichung über in die folgende:

$$(\xi-c)^2+\eta^2+\zeta^2-\left(\frac{dc}{a}\right)^2=0.$$

Mit Rücksicht darauf, dass während der Transformation der Punkt α als ein Punkt der Oberfläche unverändert bleibt, erhält man daraus das Resultat:

Das Bild einer beliebigen Kugelfläche in Bezug auf eine feste Kugelfläche, welche durch den dem Centrum der letzteren als Pol hinsichtlich der ersteren entsprechenden Punkt geht, ist eine Kugelfläche, deren Centrum mit diesem Pol zusammenfällt.

6. Aus der Elementargeometrie ist ferner bekannt, dass der geometrische Ort aller der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten p und p_1 ein constantes Verhältniss haben, ein System excentrischer Kugelflächen ist, deren Mittelpunkte sämmtlich auf der Linie $\overline{pp_1}$ liegen, sowie dass für jede dieser Kugeln die Punkte p und p_1 Pole sind. Wenn man nun um den einen von ihnen, z. B. p, mit einem Radius $=\overline{pp_1}$ eine Kugel construirt und in Bezug auf dieselbe das obige System von Kugelflächen abbildet, so ist aus dem Vorigen ersichtlich, dass man wiederum ein System von Kugelflächen erhält, deren Mittelpunkte indess sämmtlich mit dem anderen Pole p_1 zusammenfallen.

7. Es ist nun im Folgenden das Bild eines Körpers zu untersuchen, welcher von zwei beliebigen, im Allgemeinen nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Dieselben können offenbar eine doppelte Lage gegen einander haben; entweder nämlich liegt die eine von ihnen ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der anderen. Dementsprechend wird im ersteren Falle der Körper von schalenförmiger Gestalt sein, im letzteren dagegen wird er sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstrecken und im Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzen. Welche Lage indess auch die beiden Grenzflächen gegen einander haben, es werden sich immer, wie die Geometrie lehrt, zwei Punkte p und p_1 so construiren lassen, dass sie in Bezug auf jede der begrenzenden Kugelflächen einander als Pole entsprechen, auch werden beide ganz ausserhalb des Körpers liegen. Construirt man nun um irgend einen von ihnen, z. B. p, eine durch den anderen p_1 hindurchgehende Kugelfläche und bildet in Bezug auf dieselbe den gegebenen Körper ab, so leuchtet ein, dass der letztere sich in einen von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen und daher allseitig begrenzten Körper verwandeln wird. Es wird im Folgenden dargethan werden, dass auch die Aufgabe, die Wärmevertheilung in einem von zwei excentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körper zu finden, auf die ein-

fachere und bekanntere zurückgeführt werden kann, die sich auf einen von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körper bezieht. Zuvor sind aber noch einige zur Uebertragung nöthige Formeln zu entwickeln.

8. Wenn man vom Anfangspunkt des Coordinatensystems, als Mittelpunkt der Kugelfläche S, einen sehr schmalen Kegel construirt, so wird derselbe aus irgend einer der gegebenen Grenzflächen ein Element ds, aus deren Bild ein Element $d\sigma$ herausschneiden. Da man jedes derselben als die sphärische Projection des anderen ansehen kann, so findet die Relation statt:

$$\frac{ds \, . \cos\left(\frac{n}{r}\right)}{r^2} = \frac{d\sigma \, . \cos\left(\frac{\nu}{\varrho}\right)}{\varrho^2},$$

in welcher $\left(\frac{n}{r}\right)$ und $\left(\frac{\nu}{\varrho}\right)$ diejenigen spitzen Winkel bezeichnen, welche die auf den Flächenelementen ds und $d\sigma$ errichteten Normalen mit dem gemeinsamen Radiusvector r oder ϱ bilden. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung ergiebt sich indess, was sich auch allgemein von je zwei entsprechenden Oberflächenelementen beweisen lässt, dass diese Winkel unter sich gleich sind. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{d\sigma}{\varrho^2};$$

oder wenn man, um späteren Zweideutigkeiten auszuweichen, die Entfernungen der Elemente ds und $d\sigma$ vom Anfangspunkt mit e und ε bezeichnet

$$\frac{ds}{e^2} = \frac{d\sigma}{\varepsilon^2}.$$

9. Kehren wir noch einmal zu den Transformationsformeln in No. 1 zurück. Dieselben lassen sich auch auf folgende Weise schreiben:

$$\xi\,(x^2+y^2+z^2) - c^2 x = 0,$$
$$\eta\,(x^2+y^2+z^2) - c^2 y = 0,$$
$$\zeta\,(x^2+y^2+z^2) - c^2 z = 0.$$

Betrachtet man in ihnen die Coordinaten ξ, η, ζ als constante Parameter, so ersieht man sofort, dass dieselben drei Systeme von Kugelflächen darstellen, welche sich, weil jede von ihnen durch den Anfangspunkt geht, gegenseitig durchsetzen.

Differentiirt man dieselben, so erhält man:

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -2c^2 \frac{x}{r^4} x + \frac{c^2}{r^2}$	$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2c^2 \frac{y}{r^4} x$	$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -2c^2 \frac{z}{r^4} x$
$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -2c^2 \frac{x}{r^4} y$	$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -2c^2 \frac{y}{r^4} y + \frac{c^2}{r^2}$	$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -2c^2 \frac{z}{r^4} y$
$\frac{\partial \xi}{\partial} = -2c^2 \frac{x}{r^4} z$	$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -2c^2 \frac{y}{r^4} z$	$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -2c^2 \frac{z}{r^4} z + \frac{c^2}{r^2}$

Multiplicirt man diese Gleichungen je zwei und zwei mit einander und addirt die senkrechten Reihen, so findet sich:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial z}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial z}=0.$$

Diese Gleichungen zeigen an, dass die drei Systeme von Kugelflächen einander unter rechten Winkeln schneiden.

10. Es soll nun der Ausdruck $\Delta^{xyz}W=0$ transformirt werden, in welchem, wie es gebräuchlich ist, der Kürze wegen

$$\Delta^{xyz}=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

gesetzt ist. Mit Rücksicht darauf, dass die neu eingeführten Coordinaten als die Parameter dreier orthogonalen Flächensysteme aufgefasst werden können, findet die Jacobi'sche Formel:

$$LMN\Delta^{xyz}W=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{MN}{L}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{LN}{M}\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{LM}{N}\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)$$

Anwendung, in welcher der Kürze halber

$$L^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2,$$

$$M^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$N^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2$$

gesetzt ist. Um die ebengenannten Grössen zu erhalten, hat man nur nöthig, die Transformationsformeln in No. 1 zu differentiiren

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=-2c^2\frac{\xi}{\varrho^4}\xi+\frac{c^2}{\varrho^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta}=-2c^2\frac{\eta}{\varrho^4}\xi \qquad \frac{\partial x}{\partial \zeta}=-2c^2\frac{\zeta}{\varrho^4}\xi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=-2c^2\frac{\xi}{\varrho^4}\eta \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta}=-2c^2\frac{\eta}{\varrho^4}\eta+\frac{c^2}{\varrho^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial \zeta}=-2c^2\frac{\zeta}{\varrho^4}\eta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=-2c^2\frac{\xi}{\varrho^4}\zeta \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta}=-2c^2\frac{\eta}{\varrho^4}\zeta \qquad \frac{\partial z}{\partial \zeta}=-2c^2\frac{\zeta}{\varrho^4}\zeta+\frac{c^2}{\varrho^2}$$

die erhaltenen Gleichungen ins Quadrat zu erheben und senkrecht zu addiren. Man erhält schliesslich:

$$L^2=\frac{c^4}{\varrho^4},\quad M^2=\frac{c^4}{\varrho^4},\quad N^2=\frac{c^4}{\varrho^4},$$

oder

$$L=M=N=\frac{c^2}{\varrho^2}.$$

Durch Einsetzung derselben geht die Jacobi'sche Formel über in

$$\frac{c^6}{\varrho^6}\,\varDelta^{xyz}\,W=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right),$$

oder

$$\frac{c^4}{\varrho^6}\,\varDelta^{xyz}\,W=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\varrho^3}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right).$$

Sie ist indess noch einer weiteren Vereinfachung fähig. Bezeichnet man nämlich mit φ und ψ zwei beliebige Functionen von ξ,η,ζ, so gelten die Differentialgleichungen:

$$\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\xi}=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

$$\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\eta}=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

$$\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\zeta}=\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\zeta},$$

oder wenn man sie zum zweiten Male differentiirt:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\xi}\right)=\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\eta}\right)=\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\zeta}\right)=\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}-\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}.$$

Addirt man dieselben, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\psi^2\frac{\partial\frac{\varphi}{\psi}}{\partial\zeta}\right)=\psi\,\varDelta\,\varphi-\varphi\,\varDelta\,\psi.$$

Setzt man hierin die beliebigen Functionen $\varphi=\frac{1}{\varrho}W$ und $\psi=\frac{1}{\varrho}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)=\frac{1}{\varrho}\,\varDelta\left(\frac{1}{\varrho}\,W\right)-\frac{1}{\varrho}\,W\,\varDelta\,\frac{1}{\varrho},$$

oder, da bekanntlich $\varDelta\frac{1}{\varrho}=0$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)=\frac{1}{\varrho}\,\varDelta\left(\frac{1}{\varrho}\,W\right).$$

Es geht demnach die Transformationsformel über in:

$$\frac{c^4}{\varrho^5} \Delta^{xyz} W = \Delta^{\xi\eta\zeta}\left(\frac{1}{\varrho} W\right).$$

Für den Fall, dass $\Delta^{xyz} W = 0$ ist, erhält man mithin die entsprechende Gleichung $\Delta^{\xi\eta\zeta} \frac{1}{\varrho} W = 0$, oder wenn man die Entfernung des Punktes ξ, η, ζ vom Anfangspunkt wie vorhin mit ε bezeichnet:

$$\Delta^{\xi\eta\zeta}\left(\frac{1}{\varepsilon} W\right) = 0.$$

§. 2.

Lösung der Aufgabe für den besonderen Fall, dass die den Körper begrenzenden Kugelflächen concentrisch sind.

11. Die Aufgabe, um deren Lösung es sich hier handelt, lässt sich in doppelter Weise aussprechen. Physikalisch aufgefasst lautet dieselbe:

„Gegeben ist ein von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossener Körper. Es soll nach Eintritt des stationären Temperaturzustandes die Vertheilung der Wärme im Innern desselben bestimmt werden, wenn die Temperatur eines jeden Punktes der Grenzflächen eine gegebene und unveränderliche ist."

In die Sprache der Analysis übertragen:

„Es ist die Function V so zu bestimmen, dass

Ia) $\Delta^{\xi\eta\zeta} V$, in jedem Punkte im Innern des Körpers $= 0$,

Ib) daselbst V nebst den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \eta}, \frac{\partial V}{\partial \zeta}$ stetig und endlich ist;

II. dass die Function V in jedem Punkte der Grenzflächen einen gegebenen und unveränderlichen Werth annimmt."

Die Gleichungen unter I), zu denen im Allgemeinen noch hinzutritt die Bedingung

Ic) dass, falls der Körper sich ins Unendliche erstreckt, εV, wo ε die Entfernung des Punktes ξ, η, ζ vom Anfangspunkt darstellt, überall einen endlichen Werth behält, heissen (nach Neumann*), weil sie nur von der Gestalt des vorgelegten Körpers abhängen, Hauptbedingungen, diejenigen unter II), weil sie ausserdem von gewissen Grenzwerthen abhängig sind, Nebenbedingungen. Es ist somit klar, dass für einen und denselben Körper unzählig viele Lösungen existiren, je nach der Festsetzung der Werthe, welche die Function V in den Punkten der Grenzflächen annehmen soll. Dieselben lassen sich jedoch sämmtlich, wie die Untersuchungen von Green

*) Neumann, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Pag. 14.

und Neumann gezeigt haben, auf eine einzige zurückführen, nämlich auf folgende Aufgabe:

Es ist die Function G zu bestimmen, welche

I. den Hauptbedingungen Genüge leistet,

II. in einem beliebigen Punkte (o) der Oberfläche den Werth T_{10} erlangt, wenn man unter T_{10} den reciproken Werth der Entfernung des Punktes (o) von einem beliebigen, aber festen Punkte (1) im Innern des Körpers versteht, so dass also $G_0' = T_{10}$ ist.

Ist nämlich die Function G für einen Körper ermittelt und versteht man unter η_0' die Grösse

$$\eta_0' = \frac{d G_0'}{dn} - \frac{d T_{10}}{dn},$$

wo n die Richtung der im Punkte o nach Aussen errichteten Normale darstellt, so findet man die gesuchte Function durch die Gleichung:

$$4\pi V_1 = \int \eta_0' V_0 \, do,$$

in welcher do das Flächenelement im Punkte o darstellt und die Integration auf alle Elemente der Grenzflächen auszudehnen ist.

12. Diese Beziehungen sollen angewendet werden, um den Werth der Function V zunächst für einen von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Körper zu ermitteln. Bezeichnet man mit σ einen Punkt der äusseren, mit τ einen Punkt der inneren Grenzfläche, ferner mit $d\sigma$ und $d\tau$ die Flächenelemente in den Punkten σ und τ, so ist die Gleichung, durch welche die Function V bestimmt ist:

$$4\pi V_1 = \int \eta_\sigma' V_\sigma \, d\sigma + \int \eta_\tau' V_\tau \, d\tau,$$

in welchen die Grössen η die Werthe haben:

$$\eta'_\sigma = \frac{d G_\sigma'}{dn} - \frac{d T_{1\sigma}}{dn},$$

$$\eta'_\tau = \frac{d G_\tau'}{dn} - \frac{d T_{1\tau}}{dn}.$$

Berücksichtigt man, dass die in $d\sigma$ errichtete Normale dieselbe Richtung hat, wie der Radiusvector r, die in $d\tau$ errichtete aber eine dem letzteren entgegengesetzte, so lassen sich die obigen Werthe auch folgendermaassen darstellen:

$$\eta'_\sigma = + \frac{d G_\tau'}{dr} - \frac{d T_{1\sigma}}{dr},$$

$$\eta'_\tau = - \frac{d G_\tau'}{dr} + \frac{d T_{1\tau}}{dr}.$$

Da in denselben $T_{1\sigma}$ und $T_{1\tau}$ bekannte Functionen sind, so handelt es sich darum, die Green'sche Function G zu ermitteln.

13. Es sei, wie oben, 1 ein im Innern des Körpers beliebig angenommener, aber fester Punkt, dagegen o ein veränderlicher Punkt, ihre Polarcoordinaten r_1, ω_1, φ_1 und r, ω, φ, dann ist

$$T_{10} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\vartheta}},$$

wo

$$\cos\vartheta = \cos\omega . \cos\omega_1 + \sin\omega . \sin\omega_1 . \cos(\varphi - \varphi_1)$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck lässt sich auf doppelte Weise nach Kugelfunctionen entwickeln

$$T_{10} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} . P^n(\cos\vartheta) \\ \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} . P^n(\cos\vartheta) \end{cases}$$

von denen die erstere Entwickelung anzuwenden ist, so lange der Punkt (o) innerhalb einer mit dem Radius r_1 um das gemeinsame Centrum construirten Kugel, die letztere dagegen, wenn er ausserhalb derselben liegt. Schreibt man der Kürze wegen P_{10}^n für $P^n(\cos\vartheta)$, da diese Function nur von der Lage der Punkte o und 1 abhängt, so ist demnach

$$T_{10} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_{10}^n & r < r_1 \\ & \text{für} \\ \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_{10}^n & r > r_1. \end{cases}$$

Hinsichtlich der Function $P^n(\lambda)$ hat Laplace gezeigt, dass dieselbe der Gleichung genügt

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(1-\lambda^2)\frac{\partial P^n(\lambda)}{\partial\lambda} + n(n+1) P^n(\lambda) = 0,$$

vermittelst welcher sich leicht beweisen lässt, dass jedes Glied der obigen Reihen

$$r^n P_{10}^n \text{ und } \frac{1}{r^{n+1}} P_{10}^n$$

der Gleichung genügt

$$\varDelta r^n P_{10}^n = 0 \text{ und } \varDelta \frac{1}{r^{n+1}} P_{10}^n = 0.$$

Aus einfacher geometrischer Anschauung erhellt ferner, dass jede von diesen Grössen sammt ihren ersten Differentialquotienten, so lange der Punkt 0 im Innern des Körpers bleibt, stetig und endlich ist. Es folgt daraus, dass jede von ihnen den obigen Hauptbedingungen Genüge leistet. Dasselbe gilt auch von jedem aus ihnen beliebig zusammengesetzten Ausdrucke

$$J = A r^n P_{10}^n + B \frac{1}{r^{n+1}} P_{10}^n = \left[A r^n + B \frac{1}{r^{n+1}}\right] P_{10}^n.$$

Da diese Function ebenso, wie die Function G den Hauptbedingungen genügt, so wird sie mit derselben identisch sein, wenn beide auch den-

selben Nebenbedingungen genügen; es ist demnach zu untersuchen, ob die bisher willkürlichen Constanten A und B sich so bestimmen lassen, dass die Functionen J und G oder, was dasselbe ist, die Functionen J und T dieselben Grenzwerthe besitzen, d. h. dass die Gleichungen stattfinden

$$J_\sigma = T_{1\sigma} \text{ und } J_\tau = T_{1\tau}.$$

Nach der obigen Entwickelung hat man aber

$$T_{1\sigma} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_1^n}{r_\sigma^{n+1}} P_{1\sigma}^n$$

$$T_{1\tau} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_\tau^n}{r_1^{n+1}} P_{1\tau}^n,$$

sowie

$$J_\sigma = \Sigma \left[A r_\sigma^n + B \frac{1}{r_\sigma^{n+1}} \right] P_{1\sigma}^n,$$

$$J_\tau = \Sigma \left[A r_\tau^n + B \frac{1}{r_\tau^{n+1}} \right] P_{1\tau}^n.$$

Daraus geht hervor, dass, wenn die Functionen J und G identisch sein sollen, einerseits die für J entwickelten Reihen von $n=0$ bis $n=\infty$ summirt werden müssen, andererseits, dass die willkürlichen Constanten A und B so bestimmt werden müssen, dass

$$A r_\sigma^n + B \frac{1}{r_\sigma^{n+1}} = \frac{r_1^n}{r_\sigma^{n+1}},$$

$$A r_\tau^n + B \frac{1}{r_\tau^{n+1}} = \frac{r_\tau^n}{r_1^{n+1}}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$A = \frac{1}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_\tau^{2n+1} - r_1^{2n+1}}{r_\tau^{2n+1} - r_\sigma^{2n+1}},$$

$$B = \frac{r_\tau^{2n+1}}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_\sigma^{2n+1} - r_1^{2n+1}}{r_\sigma^{2n+1} - r_\tau^{2n+1}}.$$

Versteht man nun unter A und B die genannten Grössen, so stellt sich die gesuchte Function dar

$$G_0' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[A r^n + B \frac{1}{r^{n+1}} \right] P_{10}^n.$$

14. Es sind gegenwärtig die Grössen η selbst zu berechnen. Da die Function T bekannt, die Function G soeben ermittelt ist, hat man beider Differentialquotienten zu bilden. Berücksichtigt man, dass die Function P_{10}^n von der Coordinate r unabhängig ist, so ergiebt sich

$$\frac{dG_0'}{dr} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[A n r^{n-1} - B(n+1) \frac{1}{r^{n+2}} \right] P_{10}^n,$$

desgleichen findet man die Differentialquotienten von T_{10}

$$\frac{d T_{10}}{dr} = - \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1) \frac{r_1^n}{r^{n+2}} P_{10}^n \text{ für } r > r_1,$$

$$\frac{d T_{10}}{dr} = + \sum_{n=0}^{n=\infty} n \frac{r^{n-1}}{r_1^{n+1}} P_{10}^n \text{ für } r < r_1.$$

Setzt man diese Werthe der Differentialquotienten in die Gleichungen, durch welche die Grössen η_σ' und η_τ' bestimmt werden,

$$\eta_\sigma' = + \frac{d G_\sigma'}{dr} - \frac{d T_{1\sigma}}{dr},$$

$$\eta_\tau' = - \frac{d G_\tau'}{dr} + \frac{d T_{1\tau}}{dr}$$

ein, so erhält man

$$\eta_\sigma' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[+ A n r_\sigma^{n-1} - B(n+1) \frac{1}{r_\sigma^{n+2}} + (n+1) \frac{r_1^n}{r_\sigma^{n+2}} \right] P_{1\sigma}^n,$$

$$\eta_\tau' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[- A n r_\tau^{n-1} + B(n+1) \frac{1}{r_\tau^{n+2}} + n \frac{r_\tau^{n-1}}{r_1^{n+1}} \right] P_{1\tau}^n.$$

Werden jetzt für die Grössen A und B ihre Werthe substituirt, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$\eta_\sigma' = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_\sigma^{n-1}}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_1^{2n+1} - r_\tau^{2n+1}}{r_\sigma^{2n+1} - r_\tau^{2n+1}} P_{1\sigma}^n,$$

$$\eta_\tau' = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_\tau^{n-1}}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_1^{2n+1} - r_\sigma^{2n+1}}{r_\tau^{2n+1} - r_\sigma^{2n+1}} P_{1\tau}^n.$$

Man erhält somit das Resultat:

Bezeichnet man mit η_σ' und η_τ' die oben aufgestellten Ausdrücke, so ist der Werth der Function V im Punkte (1) bestimmt durch die Gleichung

$$4\pi V_1 = \int \eta_\sigma' V_\sigma \, d\sigma + \int \eta_\tau' V_\tau \, d\tau.$$

§. 3.

Zurückführung der Lösung des allgemeinen Problems auf den im §. 2 behandelten speciellen Fall.

15. Die Aufgabe, deren Lösung die vorliegende Untersuchung zum Gegenstande hat, lautet, wie bekannt ist, folgendermaassen:

Gegeben ist ein von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossener Körper. Es ist die Function W zu bestimmen, welche

I. im Innern des Körpers den Hauptbedingungen genügt,

II. in Punkten σ und τ der Grenzflächen gegebene, unveränderliche Werthe annimmt.

Es war früher gezeigt, dass der vorgelegte Körper, mag er endlich begrenzt sein oder sich nach allen Richtungen bis ins Unendliche erstrecken, nach der in §. 1 auseinandergesetzten Methode sich in einen Körper verwandeln lässt, welcher von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossen

ist. Es ist daher von Wichtigkeit, zu untersuchen, in welcher Art sich die Bedingungsgleichungen der Function W für den erhaltenen Körper transformiren. Es mag deshalb daran erinnert sein, dass zunächst nach No. 10 die Bedingungsgleichung Ia) $\Delta^{xyz} W = 0$ übergeht in die ähnliche $\Delta^{\xi\eta\zeta}\left(\frac{1}{\varepsilon} W\right) = 0$, wo ε die Entfernung des Punktes $\xi\eta\zeta$ vom Anfangspunkt darstellt. Um die hier auftretende Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ zu untersuchen, sind die beiden Fälle, von denen oben die Rede war, einzeln zu betrachten.

Ist der zu untersuchende Körper nach allen Richtungen endlich begrenzt, so liegt der Anfangspunkt ausserhalb des durch die Transformation erhaltenen; es kann daher niemals $\varepsilon = 0$, also $\frac{1}{\varepsilon} = \infty$ werden. Da auch die Function W im Innern des Körpers stetig ist, so folgt, dass daselbst die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ ebenfalls stetig und endlich ist. Dasselbe lässt sich auch von ihren ersten Differentialquotienten darthun.

Ist dagegen der Körper nach allen Richtungen hin unbegrenzt, so liegt der Anfangspunkt in dem durch die Transformation erhaltenen Körper selbst, und es könnte daher fraglich erscheinen, ob die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ im Anfangspunkte endlich ist. Indessen tritt für diesen Fall noch die Bedingung Ic) hinzu, welche besagt, dass die Function eW auch für $e = \infty$ endlich bleibt. Da nun $eW = \frac{c^2}{\varepsilon} W$ ist, so ergiebt sich, dass die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ auch für $\varepsilon = 0$, d. h. im Anfangspunkte endlich bleibt. Dasselbe gilt, wie sich leicht zeigen lässt, auch für die ersten Differentialquotienten derselben.

Aus diesen Erörterungen geht hervor, dass, wie auch der ursprüngliche Körper beschaffen sein mag, die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ im Innern des transformirten Körpers

Ia) der Gleichung $\Delta\left(\frac{1}{\varepsilon} W\right) = 0$ genügt,

Ib) sammt ihren ersten Differentialquotienten stetig und endlich ist.

Dies sind nichts anderes, als die vier Hauptbedingungen für den transformirten Körper, da die Bedingung Ic) hier, weil derselbe jedenfalls endlich begrenzt ist, ihre Bedeutung verliert. Es ist demnach noch übrig, die Nebenbedingungen zu transformiren. Da jedem Punkte s und t des ursprünglichen Körpers ein Punkt σ und τ des transformirten entspricht,

so folgt $W_s = W_\sigma$ und $W_t = W_\tau$. Die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ nimmt folglich in Punkten der Grenzflächen die bestimmten Werthe $\frac{1}{\varepsilon_\sigma} W_s$ und $\frac{1}{\varepsilon_\tau} W_t$ an.

Man erhält somit schliesslich das Resultat:

Die Function $\frac{1}{\varepsilon} W$ genügt

I. im Innern des Körpers den Hauptbedingungen,

II. sie nimmt auf den Grenzflächen die unveränderlichen Werthe $\frac{1}{\varepsilon_\sigma} W_s$ und $\frac{1}{\varepsilon_\tau} W_t$ an.

Es war aber im §. 2 die Aufgabe gelöst worden, für einen Körper derselben Art die Function V zu ermitteln, welche

I. im Innern den Hauptbedingungen genügt,

II. auf den Grenzflächen gegebene feste Werthe V_σ und V_τ annimmt.

Da nun eine jede Function durch die obigen Bedingungen unzweideutig bestimmt ist, so müssen die Functionen $\frac{1}{\varepsilon} W$ und V, weil sie beide den Bedingungen I genügen, identisch sein, wenn dies auch hinsichtlich der Bedingungen II der Fall ist. Setzt man demnach

$$\frac{1}{\varepsilon_\sigma} W_s = V_\sigma \text{ und } \frac{1}{\varepsilon_\tau} W_t = V_\tau,$$

so folgt

$$\frac{1}{\varepsilon} W = V$$

oder

$$W = \varepsilon V.$$

Es leuchtet hieraus ein, dass die gestellte allgemeine Aufgabe, weil zurückgeführt auf einen besonderen schon behandelten Fall, ebenfalls als gelöst anzusehen ist. Es ist jedoch noch nöthig, zu untersuchen, welche Bedeutung für den ursprünglichen Körper die Grössen, welche in der Function V enthalten sind, besitzen. Vor Allem liegt die Frage nahe, in welcher Weise die Coordinaten r, ω, φ in die gegebene Figur sich übertragen lassen.

16. Es seien in der letzteren, wie früher, p und p_1 die beiden Pole, um den Pol p sei mit der Polardistanz $\overline{pp_1}$ die Kugelfläche construirt, in Bezug auf welche ω das Bild eines beliebigen Punktes o sei. Aus den Principien der Tranformation ergiebt sich alsdann

$$\overline{po} \cdot \overline{p\omega} = \overline{pp_1}^2,$$

folglich

$$\Delta\, p o p_1 \sim \Delta\, p p_1 \omega$$

und daraus

$$\overline{p_1 \omega} : \overline{pp_1} = \overline{p_1 o} : \overline{po}.$$

Setzt man, wie früher, $\overline{pp_1} = c$ und erwägt, dass $\overline{p_1\omega}$ nichts anderes ist, als die Polarcoordinate r, so hat man

$$r = c \cdot \frac{\overline{p_1 o}}{\overline{p o}}.$$

Der hier auftretende Quotient der Entfernungen des variabeln Punktes o von den beiden Polen lässt sich als neue Coordinate K einführen, so dass

$$r = c.K.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke pop_1 und $pp_1\omega$ ist ferner ersichtlich, dass

$$\angle pp_1\omega = \angle pop_1,$$

wo $\angle pp_1\omega$ das Supplement des Winkels ist, welcher sonst als Polarcoordinate ω betrachtet wurde, an deren Stelle $\angle pop_1$, d. h. der Winkel, den die Radien po und $p_1 o$ mit einander bilden, als neue Coordinate Ω eingeführt werden soll, so dass man hat

$$\omega = \pi - \Omega.$$

Was die dritte Coordinate φ anbelangt, welche den Winkel darstellt, den die durch den variabeln Punkt ω und die X-Axe gelegte Ebene mit der XY-Ebene bildet, so soll dafür der Winkel, welchen die durch den entsprechenden Punkt o und die X-Axe hindurchgelegte Ebene mit der XY-Ebene bildet, als neue Coordinate Φ eingeführt werden. Da die genannten Ebenen indessen nach No. 3 zusammenfallen, so hat man

$$\varphi = \Phi.$$

17. Mit Hilfe der soeben aufgestellten Transformationsformeln

$$r = c.K$$
$$\omega = \pi - \Omega,$$
$$\varphi = \Phi,$$

lässt sich zunächst zeigen, dass der Ausdruck

$$\cos\omega.\cos\omega_1 + \sin\omega.\sin\omega_1.\cos(\varphi - \varphi_1)$$

in den folgenden übergeht

$$\cos\Omega.\cos\Omega_1 + \sin\Omega.\sin\Omega_1.\cos(\Phi - \Phi_1),$$

d. h. dass er unverändert bleibt, abgesehen davon, dass an die Stelle der monopolaren Coordinaten die dipolaren getreten sind, wenn man nämlich die neu eingeführten Coordinaten $K\Omega\Phi$, weil sie sich auf zwei Pole beziehen, dipolare nennt im Gegensatz zu den gewöhnlichen Polar- oder monopolaren Coordinaten. Da der obige Ausdruck das Argument der Function P bildet, so gilt ein Gleiches offenbar auch von dieser und man hat

$$P_{1\sigma}{}^n = P_{1s}{}^n \quad \text{und} \quad P_{1\tau}{}^n = P_{1t}{}^n.$$

Durch die Substitution derselben verwandeln sich die Grössen η in die folgenden

$$\eta_\sigma' = \frac{1}{c^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{K_s{}^{n-1}}{K_1{}^{n+1}} \cdot \frac{K_1{}^{2n+1} - K_t{}^{2n+1}}{K_s{}^{2n+1} - K_t{}^{2n+1}} P_{1s}{}^n,\ .$$

$$\eta_\sigma' = \frac{1}{c^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{K_t{}^{n-1}}{K_1{}^{n+1}} \cdot \frac{K_1{}^{2n+1} - K_s{}^{2n+1}}{K_t{}^{2n+1} - K_s{}^{2n+1}} P_{1t}{}^n.$$

Die Function V wird aber repräsentirt durch die Gleichung

$$4\pi V_1 = \int \eta_\sigma' V_\sigma d\sigma + \int \eta_\tau' V_\tau d\tau.$$

Nach Einsetzung der Werthe

$$V_\sigma = \frac{1}{\varepsilon_\sigma} W_s \text{ und } V_\tau = \frac{1}{\varepsilon_\tau} W_t,$$

sowie

$$V_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} W_1$$

ergiebt sich die Gleichung

$$4\pi W_1 = \varepsilon_1 \int \eta_\sigma' \frac{W_s}{\varepsilon_\sigma} d\sigma + \varepsilon_1 \int \eta_\tau' \frac{W_t}{\varepsilon_\tau} d\tau$$

$$= \int \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\sigma} \eta_\sigma' W_s d\sigma + \int \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\tau} \eta_\tau' W_t d\tau,$$

Zur Transformation der Flächenelemente $d\sigma$ und $d\tau$ dienen die Formeln in No. 8

$$\frac{ds}{e_s^2} = \frac{d\sigma}{\varepsilon_\sigma^2} \text{ und } \frac{dt}{e_t^2} = \frac{d\tau}{\varepsilon_\tau^2}$$

oder

$$d\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma^4}{c^4} ds \text{ und } d\tau = \frac{\varepsilon_\tau^4}{c^4} dt.$$

Durch Substitution derselben geht die Gleichung über in

$$4\pi W_1 = \int \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_\sigma^3}{c^4} \eta_\sigma' W_s ds + \int \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_\tau^3}{c^4} \eta_\tau' W_t dt.$$

Dieselbe lässt sich wiederum in die Normalform bringen

$$4\pi W_1 = \int H_s' W_s ds + \int H_t' W_t dt,$$

wenn man unter H_s^1 und H_t^1 die folgenden Ausdrücke versteht

$$H_s' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_\sigma^3}{c^4} \eta_\sigma' = \frac{c^4}{e_1 e_s^3} \eta_\sigma',$$

$$H_t' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_\tau^3}{c^4} \eta_\tau' = \frac{c^4}{e_1 e_t^3} \eta_\tau',$$

oder mit Rücksicht auf die Werthe von η_σ' und η_τ'

$$H_s' = \frac{c^2}{e_1 e_s^3} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{K_s^{n-1}}{K_1^{n+1}} \cdot \frac{K_1^{2n+1} - K_t^{2n+1}}{K_s^{2n+1} - K_t^{2n+1}} P_{1s}^n,$$

$$H_t' = \frac{c^2}{e_1 e_t^3} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{K_t^{n-1}}{K_1^{n+1}} \cdot \frac{K_1^{2n+1} - K_s^{2n+1}}{K_t^{2n+1} - K_s^{2n+1}} P_{1t}^n.$$

18. Um die Grösse e, welche den Abstand des variabeln Punktes o vom Anfangspunkt darstellt, ebenfalls durch die dipolaren Coordinaten auszudrücken, hat man im $\varDelta\, p\, \omega\, p_1$

$$\overline{p\omega}^2 = \overline{pp_1}^2 - 2\overline{pp_1}\cdot\overline{p_1\omega} \cos \widehat{pp_1\omega} + \overline{p_1\omega}^2$$

oder

$$\varepsilon^2 = c^2 + 2c.r.\cos\omega + r^2.$$

Setzt man darin $r = c.K$ und $\omega = \pi - \Omega$, so wird $\varepsilon = \frac{c^2}{e}$, und man erhält

$$\frac{c^2}{e^2} = 1 - 2K.\cos\Omega + K^2,$$

oder wenn man die stets positive Grösse

$$1 - 2K.\cos\Omega + K^2 = \psi^2$$

setzt,

$$e = \frac{c}{\psi}.$$

Durch diese Substitution gehen die obigen Gleichungen über in

$$H_s' = \frac{\psi_1 \psi_s^3}{c^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \cdot \frac{K_s^{n-1}}{K_1^{n+1}} \cdot \frac{K_1^{2n+1} - K_t^{2n+1}}{K_s^{2n+1} - K_t^{2n+1}} P_{1s}^n,$$

$$H_t' = \frac{\psi_1 \psi_t^3}{c^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \cdot \frac{K_t^{n-1}}{K_1^{n+1}} \cdot \frac{K_1^{2n+1} - K_s^{2n+1}}{K_t^{2n+1} - K_s^{2n+1}} P_{1t}^n.$$

Diese Formeln stimmen, abgesehen von der verschiedenen Bezeichnungsweise, vollständig mit denen überein, welche Herr Prof. Neumann vermittelst einer anderen Methode aufgestellt hat*).

19. Es war oben mehrmals die Behauptung ausgesprochen, dass die Untersuchung eines von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers hinsichtlich seiner Temperatur nur ein specieller Fall derjenigen ist, welche sich auf einen von zwei excentrischen Kugelflächen umschlossenen Körper bezieht. Inwiefern dies richtig ist, soll zum Schluss noch dargethan werden, indem gezeigt wird, dass durch gewisse Einschränkungen die im §. 3 gefundenen Formeln in die des §. 2 übergehen.

Es seien wiederum p und p_1 die beiden Pole, o ein variabeler Punkt, so stellt die Gleichung

$$\frac{\overline{op_1}}{\overline{op}} = Const.$$

ein System von nicht concentrischen Kugelflächen dar mit der gemeinschaftlichen Centrale $\overline{pp_1}$. Lässt man den Punkt p in die unendliche Ferne fortrücken, so wächst der Radiusvector $\overline{op}$ bis ins Unendliche und die Gleichung scheint ihre Bedeutung zu verlieren. Multiplicirt man jedoch vorher mit der Polardistanz $\overline{pp_1} = c$, so wird

$$\overline{op_1} \cdot \frac{c}{\overline{op}} = Const.$$

Lässt man jetzt den Punkt p bis nis Unendliche fortrücken, so convergirt der Quotient $\frac{c}{\overline{op}}$ gegen den Werth $= 1$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$\overline{op_1} = Const.$$

*) Neumann, Lösung des allgemeinen Problems u. s. w., pag. 109.

Dieselbe stellt jetzt ein System von concentrischen Kugelflächen dar, deren Mittelpunkte sämmtlich mit p_1 zusammenfallen. Hieraus zeigt sich zugleich, inwiefern die monopolaren Coordinaten in den dipolaren enthalten sind. Da nämlich $\frac{\overline{op_1}}{\overline{op}} = K$ oder $\overline{op_1} \cdot \frac{c}{\overline{op}} = c \cdot K$, so folgt $\overline{op_1}$ oder $r = c \cdot K$, oder endlich

$$K = \frac{r}{c} \text{ für } c = \infty.$$

Während sich der Pol p bis ins Unendliche entfernt, nähert sich zugleich der Radiusvector $\overline{op}$ mehr und mehr der durch o parallel zur Centralen gezogenen Geraden, und es geht demnach der Winkel Ω, welchen er mit dem andern Radiusvector $\overline{op_1}$ bildet, allmählich in denjenigen Winkel ω über, welchen der letztere mit der Centralen bildet, so dass man erhält

$$\Omega = \omega.$$

Was endlich den Winkel Φ betrifft, so bleibt derselbe unverändert und ist ein und dasselbe mit der Polarcoordinate φ, so dass

$$\Phi = \varphi$$

zu setzen ist. Vermittelst dieser Substitution ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$\cos \Omega \cos \Omega_1 + \sin \Omega \sin \Omega_1 \cos (\Phi - \Phi_1)$$

und daher auch die Function $P_{10}{}^n$, deren Argument er ist, unverändert bleibt, sofern an Stelle der dipolaren Coordinaten Ω und Φ die monopolaren ω und φ eingesetzt werden.

Hinsichtlich der Grösse e ist, da $e = c \cdot \frac{\overline{op}}{c}$ gesetzt werden kann, leicht einzusehen, dass sie gegen den Werth $= c$ convergirt.

Setzt man zugleich $K = \frac{r}{c}$, so erhält man schliesslich

$$H_s' = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_s^{n-1}}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_1^{2n+1} - r_t^{2n+1}}{r_s^{2n+1} - r_t^{2n+1}} \cdot P_{1s}{}^n,$$

$$H_t' = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{r_t^{n-1}}{r_1^{n+1}} \cdot \frac{r_1^{2n+1} - r_s^{2n+1}}{r_t^{2n+1} - r_s^{2n+1}} \cdot P_{1t}{}^n,$$

mit Rücksicht auf welche Gleichungen die Function W gefunden wird aus der Relation

$$4\pi W_1 = \int H_s' W_s ds + \int H_t' W_t dt.$$

Es ist augenscheinlich, dass diese Gleichungen vollständig mit denen übereinstimmen, welche in No. 14 entwickelt worden sind und damit ist die obige Behauptung gerechtfertigt.

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Zur Theorie der Maximal- und Minimalwerthe. Von Prof. KLEINFELLER in München.

Eine Function $F(x)$, deren n erste Differentialquotienten für $x=a$ sämmtlich Null werden, während $F^{(n+1)}(a)$ eine von Null verschiedene Grösse ist, soll bekanntlich für obengenannten Werth der Variabelen nur dann ein Grösstes oder Kleinstes werden können, wenn n eine ungerade Zahl ist. Dass aber diese Eigenschaft keine vollkommen allgemeine ist, sondern nur unter gewissen weiteren Bedingungen stattfinden kann, mag zunächst nachfolgendes Beispiel darthun.

Die zwei ersten Differentialquotienten der Function $(x-a)^{\frac{8}{3}}$, nämlich $\frac{8}{3}(x-a)^{\frac{5}{3}}$ und $\frac{40}{9}(x-a)^{\frac{2}{3}}$ werden offenbar für $x=a$ Null, während der dritte Differentialquotient derselben für den nämlichen Werth der Variabelen nicht Null, sondern unendlich gross wird. Der bisher für allgemein giltig angenommenen Regel zufolge könnte also $(x-a)^{\frac{8}{3}}$ für $x=a$ weder ein Maximum noch ein Minimum werden; und doch wird diese Function für $x=a$ ein Kleinstes, da sie für jeden reellen Werth der Variabelen positiv bleibt und für $x=a$ Null wird, also, während x durch a hindurchgeht, zuerst abnehmen und sodann wieder zunehmen muss. Vorstehendes Beispiel zeigt wohl zur Genüge, dass die im Eingange dieses Artikels angeführte Regel nur unter gewissen weiteren Bedingungen Giltigkeit haben kann und werden die letzteren sogleich klar werden, wenn man die Begründungsweise des fraglichen Gesetzes näher ins Auge fasst. Letzteres wird nämlich gewöhnlich mit Hilfe der Gleichung

$$F(a+h)-F(a)=\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}F^{(n+1)}(a+\theta h)$$

bewiesen, welche Gleichung nicht nur erfordert, dass die n ersten Differentialquotienten von $F(x)$ für $x=a$ Null werden, sondern auch noch voraussetzt, dass $F(x)$ sammt seinen $n+1$ ersten Differentialquotienten für $x=a$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet*), welche letztere Bedingung

---

*) Dass eine Function auch dann eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, wenn sie unendlich wird, ist hier immer stillschweigend vorausgesetzt.

in dieser Form genügt, weil hier nur unendlich kleine Werthe von h in Betracht kommen. Ist also n eine gerade Zahl und $F^{(n+1)}(a)$ von Null verschieden, so lehrt obige Gleichung in der That, dass $F(a+h)-F(a)$ das Vorzeichen wechseln muss, während h von einem unendlich kleinen negativen Werth zu einem unendlich kleinen positiven stetig übergeht, und dass mithin in diesem Falle $F(a)$ weder ein Maximal- noch ein Minimalwerth von $F(x)$ sein kann. Allein diese Eigenschaft gilt offenbar nur dann, wenn $F^{(n+1)}(x)$ für $x=a$ nicht unstetig wird. Was im letzteren Falle geschieht, lehrt obige Gleichung nicht und kann es auch nicht lehren, weil sie dann keine Giltigkeit mehr besitzt.

Es ist nun der Hauptzweck der nachfolgenden Untersuchungen, darzuthun, dass $F(x)$ auch dann noch einen Maximal- oder Minimalwerth für $x=a$ haben kann, wenn die $2m$ ersten Differentialquotienten dieser Function für $x=a$ Null werden, während der $(2m+1)^{\text{te}}$ nicht Null ist für diesen Werth der Variabelen; allein es wird dann noch die weitere Bedingung hinzugefügt werden müssen, dass $F^{(2m+1)}(x)$ für $x=a$ unstetig werden und, während x durch a hindurchgeht, das Vorzeichen wechseln muss. Es soll bei dieser Gelegenheit auch zugleich gezeigt werden, dass die Theorie vom Grössten und Kleinsten auch ohne Zuziehung des Taylor'schen Satzes durchgeführt werden kann und werden wir uns zu dem Ende im Folgenden lediglich nur auf den auch bisher schon bei Begründung der ersten Fundamentalsätze über Grösstes und Kleinstes gewöhnlich in Anwendung gebrachten bekannten Satz stützen, demzufolge eine Function $F(x)$, so lange sie stetig bleibt, bei wachsenden Werthen der Variabelen zu- oder abnehmen muss, je nachdem $F'(x)$ beziehungsweise positiv oder negativ ist.

Aus diesem Satze ergiebt sich bekanntlich sogleich, dass, während x wachsend durch a hindurchgeht, $F'(x)$ vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergehen muss, je nachdem $F(x)$ für $x=a$ beziehungsweise ein Maximum oder Minimum wird. Bleibt nun $F'(x)$ während dieses Zeichenwechsels fortwährend stetig, so muss $F'(a)$ Null sein und $F'(x)$ nimmt, während x wachsend durch a hindurchgeht, im Falle eines Maximums, stetig vom Positiven zum Negativen übergehend, fortwährend ab, so dass $F''(x)$ als erster Differentialquotient einer im Abnehmen begriffenen Function für $x=a\pm\delta$ negativ sein muss, wobei nicht nur hier, sondern auch im Folgenden unter δ stets eine gegen Null convergirende Grösse zu verstehen ist. Wäre dagegen, während immer noch $F'(a)=0$, $F(a)$ ein Minimalwerth von $F(x)$, so würde $F'(x)$, stetig vom Negativen zum Positiven übergehend, zunehmen, während x durch a hindurchgeht und $F''(x)$ müsste daher für $x=a$ positiv sein.

Nehmen wir nun an, $F'(a)$ sei nicht Null, so müsste $F'(x)$, um — während x durch a hindurchgeht — das Vorzeichen wechseln zu können, für $x=a$ unstetig werden. Fassen wir dabei speciell den Fall ins Auge,

wenn $F'(a) = \pm \infty$, so wird sich in Beziehung auf das Vorzeichen von $F''(a)$ gerade das entgegengesetzte Gesetz ergeben, als dort, wo $F'(a) = 0$.

I. $F''(a)$ wird nämlich positiv oder negativ, je nachdem $F(a)$ ein grösster oder kleinster Werth von $F(x)$ ist, wenn zugleich $F'(a) = \pm \infty$.

Dieses meines Wissens bis jetzt unbekannt gebliebene Gesetz wird ganz in derselben Weise bewiesen, wie das vorhergehende. Erlangt nämlich $F(x)$ für $x = a$ einen Maximalwerth und ist zugleich $F'(a) = \pm \infty$, so muss $F'(x)$, um vom Positiven zum Negativen übergehen zu können, während x durch a hindurchgeht, zuerst bis $+\infty$ zugenommen haben, sodann bei $x = a$ auf $-\infty$ überspringen und hierauf einem endlichen negativen Werth sich nähern, also wieder zunehmen. Da nun $F'(x)$ zunimmt, wenn x wachsend der Grösse a sich nähert, und abnimmt, wenn x abnehmend sich a nähert, so muss offenbar $F''(a \pm \delta)$ positiv sein. $F''(a)$ selbst wird also $+\infty$, weil $F'(a)$ unendlich gross ist und $F'(x)$ der Voraussetzung zufolge in unmittelbarer Nähe von $x = a$ keine weitere Unterbrechung der Stetigkeit erleiden soll.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass, falls $F(a)$ ein Minimalwerth von $F(x)$ ist und $F'(a) = \pm \infty$, $F'(x)$ zuerst bis $-\infty$ abnehmen, hierauf zu $+\infty$ überspringen und alsdann wieder abnehmen muss, während x durch a hindurchgeht. Da hier $F'(x)$ stets abnimmt, so ist $F''(a \pm \delta)$ negativ und $F''(a) = -\infty$.

Nachdem wir erkannt, wie aus dem Vorzeichen von $F''(a)$ nicht nur wenn $F'(a) = 0$, sondern auch wenn $F'(a) = \pm \infty$ auf die Existenz eines Maximal- oder Minimalwerthes von $F(x)$ geschlossen werden kann, wenden wir uns wieder dem Falle zu, wenn $F'(a) = 0$, und nehmen an, es sei auch $F''(a) = 0$, während noch immer $F(x)$ durch $x = a$ zu einem Grössten oder Kleinsten wird. Nehmen wir zunächst an, $F(a)$ sei ein Maximalwerth von $F(x)$, so ist $F''(a \pm \delta)$ negativ, und da $F''(a) = 0$, so muss $F''(a \pm \delta)$, als Function von δ betrachtet, zuerst zunehmen, während δ von einem unendlich kleinen negativen Werth an bis Null geht und sodann, während δ von Null an bis zu einem unendlich kleinen positiven Werth hin zunimmt, wieder abnehmen. $F''(x)$ besitzt also für $x = a$ ebenfalls einen Maximalwerth. Aehnlich erkennt man, dass, $F'(a) = 0$, $F''(a) = 0$ und $F(a)$ als Minimalwerth vorausgesetzt, $F''(x)$ für $x = a$ ebenfalls ein Minimum werden muss, da in diesem Falle $F(a \pm \delta)$ positiv ist, $F''(x)$ also, während x durch a hindurchgeht, von einem positiven Werth an bis zu Null herabsinken und sodann wieder zu einem positiven Werth heranwachsen muss.

II. Wird also $F(x)$ für $x = a$ ein Maximum oder Minimum, ist $F'(a) = 0 = F''(a)$, unterbrechen ferner $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ für $x = a$ ihre Stetigkeit nicht, so wird zugleich

mit $F(x)$ auch $F''(x)$ beziehungsweise ein Maximum oder Minimum für $x=a$.

Hieraus ergiebt sich sogleich, dass unter den sub II gemachten Voraussetzungen der erste Differentialquotient von $F''(x)$, nämlich $F'''(x)$, während x durch a hindurchgeht, vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergehen muss, je nachdem $F''(x)$ oder, was dasselbe ist, $F(x)$ für $x=a$ ein Grösstes oder Kleinstes wird. Findet dieser Uebergang in unstetiger Weise statt und wird dabei speciell $F'''(a) = \pm\infty$, so wird $F^{IV}(a)$ ebenfalls unendlich, und zwar entschieden $+\infty$, wenn $F(a)$ ein Maximalwerth und $-\infty$, wenn $F(a)$ ein Minimalwerth ist, wie unmittelbar aus I zu erkennen ist. Bleibt dagegen $F'''(x)$ stetig, während x durch a hindurchgeht, so ist $F'''(a)=0$ und das Vorzeichen von $F^{IV}(a)$ zeigt, je nachdem es $+$ oder $-$ ist, an, ob $F(a)$ beziehungsweise ein Minimal- oder Maximalwerth ist. Sollte jedoch $F^{IV}(x)$ für $x=a$ Null sein und stetig bleiben, so ergiebt sich unmittelbar aus II, dass $F^{IV}(x)$, als zweiter Differentialquotient von $F''(x)$, mit dieser letztgenannten Function und also auch mit $F(x)$ zugleich für $x=a$ beziehungsweise einen Maximal- oder Minimalwerth besitzen muss. $F^{V}(a)$ und $F^{VI}(a)$ würden sodann denselben Gesetzen genügen müssen, welche vorher in Beziehung auf $F'''(a)$ und $F^{IV}(a)$ ausgesprochen wurden; wäre also $F^{V}(a)=0=F^{VI}(a)$, so würde auch $F^{VI}(x)$ durch $x=a$ zugleich mit $F(x)$, $F''(x)$ und $F^{IV}(x)$ zu einem Maximum, beziehungsweise Minimum gemacht werden.

Die vorstehenden Betrachtungen verallgemeinert, ergeben zunächst folgende Eigenschaft der Functionen:

III. **Bleibt die Function $F(x)$ sammt ihren n ersten Differentialquotienten für $x=a$ stetig, werden diese Differentialquotienten für den genannten Werth der Variabelen sämmtlich gleich Null, ist endlich $2r$ eine ganze Zahl und nicht grösser als n, so erlangt $F^{(2r)}(x)$ für $x=a$ einen grössten oder kleinsten Werth, wenn $F(a)$ beziehungsweise ein Maximal- oder Minimalwerth von $F(x)$ ist.**

Da vorstehender Satz den eigentlichen Kern gegenwärtiger Untersuchung bildet, so dürfte es nicht ungeeignet erscheinen, denselben vor Uebergang zum Schlussresultat unabhängig von den obigen Betrachtungen mit einem Schlage ganz allgemein zu beweisen. Wir stützen uns dabei auf die bekannte Gleichung

$$F(a+h)=F(a)+\frac{h}{1}F'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{1.2.3\dots n}F^{(n)}(a+\theta h),$$

welche unter Voraussetzung eines unendlich kleinen Werthes von h immer

giltig bleibt, wenn die Function $F(x)$ sammt ihren n ersten Differentialquotienten für $x=a$ nicht unstetig wird. Angenommen, diese Bedingung sei erfüllt, es seien ferner $F'(a)$, $F''(a) \dots F^{(n)}(a)$ sämmtlich gleich Null, so kann man offenbar in obiger Gleichung statt n auch irgend eine der ganzen Zahlen von 1 bis n setzen. Wählen wir nun die gerade Zahl $2r < n$, so reducirt sich obige Gleichung auf

$$F(a+h)-F(a)=\frac{h^{2r}}{1.2.3\dots(2r)}F^{(2r)}(a+\theta h).$$

Lässt man in dieser Gleichung h von einem unendlich kleinen negativen zu einem unendlich kleinen positiven Werth übergehen, so bleibt dabei $F(a+h)-F(a)$ im Falle eines Maximums der Function $F(x)$ für $x=a$ immer negativ, im Falle eines Minimums dagegen stets positiv, und da h^{2r} immer positiv ist, $F^{2r}(a+\theta h)$ daher fortwährend dasselbe Vorzeichen wie $F(a+2)-F(a)$ besitzt, so bleibt $F^{(2r)}(a+\theta h)$, während h durch Null hindurchgeht, stets negativ, wenn $F(a)$ ein Maximalwerth von $F(x)$ ist, stets positiv dagegen, wenn $F(a)$ ein Minimalwerth ist. Da nun $F^{(2r)}(a)=0$, so muss $F^{(2r)}(a+\theta h)$, als Function von h betrachtet, während h durch Null hindurchgeht, zuerst von einem negativen Werth an bis zu Null zu- und sodann wieder bis zu einem negativen Werth hin abnehmen, für $x=a$ also einen Maximalwerth erreichen, wenn $F(a)$ ein solcher in Beziehung auf $F(x)$ ist. Wird $F(x)$ dagegen durch $x=a$ zu einem Minimum, so nimmt $F^{(2r)}(a+\theta h)$, während h wachsend durch Null hindurchgeht, von einem positiven Werth bis zu Null hin ab, von da an sodann wieder bis zu einem positiven Werth hin zu, erreicht demnach für $h=0$ einen Minimalwerth. Man erkennt also, dass unter gegenwärtigen Voraussetzungen $F^{(2r)}(a+\theta h)$ für $h=0$ oder, was dasselbe ist, $F^{(2r)}(x)$ für $x=a$ mit $F(x)$ zugleich beziehungsweise einen Maximal- oder Minimalwerth annimmt.

Durch geeignete Verbindung der im Vorigen gewonnenen Resultate ergiebt sich nun nachstehendes Schlussresultat, in welchem jedoch die schon früher bekannten Eigenschaften der Maximal- und Minimalwerthe nicht mehr näher berührt werden sollen.

IV. Wird für $x=a$ eine Function $F(x)$ sammt ihren $2m$ ersten Differentialquotienten nicht unstetig, werden genannte Differentialquotienten für diesen Werth der Variabelen sämmtlich gleich Null und erlangt $F(x)$ für eben denselben Werth von x einen grössten oder kleinsten Werth, so wird auch $F^{(2r)}(x)$ für $x=a$ beziehungsweise ein Grösstes oder Kleinstes und es muss daher, während x durch a hindurchgeht, $F^{(2m+1)}(x)$ vom Positiven zum Negativen oder vom Negativen zum Positiven übergehen, je nachdem $F(a)$ beziehungsweise ein Maximal- oder Minimalwerth von $F(x)$ ist.

Wird daher $F^{(2m+1)}(a)$ nicht gleich Null, so muss $F^{(2m+1)}(x)$ für $x=a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, um, während die Variabele durch diesen Werth hindurchgeht, sein Vorzeichen wechseln zu können. Sollte dabei $F^{(2m+1)}(a)=\pm\infty$ werden, so wird $F^{(2m+2)}(a)$ gleich $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem beziehungsweise $F(a)$ ein Maximal- oder Minimalwerth ist.

Es bedarf wohl schliesslich kaum noch der Erwähnung, dass durch die umgekehrte Reihe von Schlüssen leicht dargethan werden kann, wie eine auf obige Eigenschaften der Function basirte Regel zur Aufsuchung von Maximal- und Minimalwerthen in der That auch immer ihren Zweck erreichen muss.

Die betreffende Regel liesse sich übrigens in Verbindung mit dem bis zu I Mitgetheilten kurz folgendermassen in Worte kleiden:

V. Um die Werthe der Variabelen zu finden, welche eine gegebene Function $F(x)$, deren n erste Differentialquotienten für $x=a$ Null sind und zugleich stetig bleiben, zu einem Maximum oder Minimum machen, braucht man nur die Werthe zu bestimmen, für welche, wenn n gerade ist, $F^{(n)}(x)$ und, wenn n ungerade ist, $F^{(n-1)}(x)$ beziehungsweise ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Aus den vorangegangenen Entwickelungen ergiebt sich auch offenbar nachstehende Wahrheit:

VI. Sind die n ersten Differentialquotienten einer Function $F(x)$ für $x=a$ sämmtlich Null und zugleich stetig, ist jedoch $F^{(n+1)}(a)$ von Null verschieden, so besitzt $F(x)$ für $x=a$ weder einen Maximal- noch einen Minimalwerth, wenn bei einem ungeraden n die Function $F^{(n+1)}(x)$, während x durch a hindurchgeht, unter Aenderung des Vorzeichens unstetig wird, bei einem geraden n dagegen $F^{(n+1)}(a)$ entschieden positiv oder negativ ist, einerlei, ob dabei $F^{(n+1)}(x)$ für $x=a$ stetig bleibt, oder unstetig, z. B. unendlich gross wird.

Für ein ungerades n würde sich das soeben erwähnte Gesetz auch aus nachstehendem Satze ergeben, dessen Beweis entweder analog der im Obigen mitgetheilten Begründung der Lehre vom Grössten und Kleinsten oder auch unmittelbar mit Hilfe der Gleichung

$$F(a+h)-F(a)=\frac{h^{2m+1}}{1.2.3\ldots(2m+1)}F^{(2m+1)}(a+\theta h)$$

geführt werden kann.

VII. Sind die n ersten Differentialquotienten von $F(x)$ für $x=a$ sämmtlich Null und zugleich stetig, ist ferner $F(a)$ weder ein Maximal- noch ein Minimalwerth von $F(x)$, so ist, wenn $2m+1$ eine ganze Zahl $\leqq n$ bedeutet, $F^{(2m+1)}(a)$ ein Minimal- oder Maximalwerth von $F^{(2m+1)}(x)$, je nachdem, während x durch a hindurchgeht, $F(x)$ beziehungsweise zu- oder abnimmt.

XXIV. Ueber Curvenbündel dritter Ordnung. Von Prof. Th. Reye in Zürich.

Die Eigenschaften der Raumcurven III. Ordnung sind bekanntlich denjenigen der Kegelschnitte in mancher Hinsicht analog. So z. B. wird ein Kegelschnitt aus je zwei seiner Punkte durch projectivische Strahlenbüschel projicirt; eine Raumcurve III. Ordnung dagegen aus je zwei ihrer Secanten durch projectivische Ebenenbüschel, und zugleich wird ihr Secantensystem aus je zwei ihrer Punkte durch collineare Ebenenbündel projicirt. Die Tangenten eines Kegelschnittes können durch zwei projectivische gerade Gebilde erzeugt werden; ebenso die Schmiegungsebenen einer Raumcurve III. Ordnung durch drei projectivische Gerade oder auch durch zwei collineare Ebenen, welche letzteren zugleich alle Tangenten und Axen der Raumcurve (d. h. die Schnittlinien ihrer Schmiegungsebenen) erzeugen. Durch einen Kegelschnitt ist ein ebenes Polarsystem bestimmt, in welchem jeder Tangente ihr Berührungspunkt und überhaupt jeder Geraden ein Punkt zugeordnet ist; andererseits ist durch eine Raumcurve III. Ordnung ein Nullsystem bestimmt, in welchem jede Schmiegungsebene ihrem Berührungspunkte, jede Tangente sich selbst, und überhaupt jede Ebene einem in ihr liegenden Punkte, sowie jede Gerade einer Geraden zugeordnet ist*).

Für einen wichtigen Abschnitt der Kegelschnittslehre ist jedoch ein Analogon bei den Raumcurven III. Ordnung bisher nicht gefunden worden, nämlich für die Lehre von den Kegelschnittsbüscheln. Alle Kegelschnitte, die durch vier reelle oder imaginäre Punkte einer Ebene gelegt werden können, bilden einen solchen Büschel, dessen Haupteigenschaften folgende sind. Von einer beliebigen Geraden werden die Kegelschnitte in den Punktenpaaren eines involutorischen geraden Gebildes geschnitten; dagegen werden zwei Gerade, welche durch je einen gemeinschaftlichen Punkt der Kegelschnitte gehen, durch den Büschel in projectivischen Punktreihen geschnitten. Die Polaren eines beliebigen Punktes der Ebene in Bezug

---

*) Bezüglich der hier angeführten und weiterhin benutzten Sätze verweise ich auf meine „Geometrie der Lage", II. Abth. p. 68—88.

auf die Kegelschnitte gehen sämmtlich durch einen Punkt, und die Pole einer Geraden der Ebene liegen auf einem Kegelschnitt. Zu einigen dieser Sätze die analogen für die Raumcurven III. Ordnung aufzustellen und zu beweisen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

1. Die Gesammtheit aller Raumcurven III. Ordnung, welche durch fünf gegebene Punkte S, T, U, V, W hindurchgehen, nenne ich einen Curvenbündel III. Ordnung; man kann denselben als das Analogon des Kegelschnittsbüschels ansehen. Die fünf gemeinschaftlichen Punkte der Raumcurven sollen die Knotenpunkte des Curvenbündels genannt werden; zwei oder vier derselben können imaginär sein; auch können sie paarweise zusammenfallen, wobei die Verbindungslinie eines solchen Paares zu einer gemeinschaftlichen Tangente der Raumcurven wird. Ich mache über die Knotenpunkte nur die Annahme, dass keine vier derselben in einer Ebene liegen. Mit k^3, k_1^3, k_2^3 werde ich einzelne Curven des Bündels, mit k^2, k_1^2 aber Kegelschnitte und mit F^2, F_1^2 Flächen II. Ordnung bezeichnen.

2. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes geht im Allgemeinen eine einzige Curve k^3 des Bündels. Dieselbe wird aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt und ist als Schnittlinie von zwei solchen Kegelflächen leicht zu construiren. Liegt insbesondere P mit drei Knotenpunkten in einer Ebene, so zerfällt k^3 in die Verbindungslinie u der letzten beiden Knotenpunkte und denjenigen Kegelschnitt k^2, welcher P mit den drei ersten Knotenpunkten und einem Punkte von u verbindet. Nur durch diejenigen Punkte, welche mit zwei Knotenpunkten in einer Geraden u liegen, können mehr als eine, nämlich unendlich viele k^3 gelegt werden; jede derselben zerfällt in die Gerade u und einen k^2, welche durch die übrigen drei Knotenpunkte geht und die u schneidet.

3. Zwei Curven k^3 und k_1^3 des Bündels können allemal durch eine geradlinige F^2 verbunden werden. Ziehen wir nämlich von irgend zwei Punkten der k^3 Secanten an k_1^3 und verbinden wir dieselben mit k_1^3 durch eine F^2, so geht diese auch durch k^3; denn sie hat mit k^3 mehr als sechs Punkte gemein. Diese F^2 ist entweder eine Kegelfläche mit einem der fünf Knotenpunkte als Mittelpunkt, oder eine Regelfläche, und im letzteren Falle bestehen ihre beiden Regelschaaren aus Secanten von je einer der Curven k^3 und k_1^3. Dass nämlich nicht eine dieser Regelschaaren aus gemeinschaftlichen Secanten von k^3 und k_1^3 bestehen kann, folgt aus dem Satze: Jede Gerade s, welche mit keinen zwei Knotenpunkten in einer Ebene liegt, ist Secante von einer einzigen Curve k^3 des Bündels. Diese k^3 wird aus s und beliebigen zwei von den zehn Verbindungslinien der Knotenpunkte durch drei projectivische Ebenenbüschel projicirt, und ist völlig bestimmt, weil die projectivische Verwandtschaft dieser Büschel schon durch die fünf Knotenpunkte festgestellt wird.

4. Von einer beliebigen Ebene φ, die durch keinen der fünf Knotenpunkte hindurchgeht, werden die Curven des Bündels III. Ordnung in Polardreiecken eines ebenen Polarsystemes geschnitten. Jede Gerade a von φ ist Secante von einer einzigen k^3 und kann dem Punkte A zugeordnet werden, in welchem k^3 von φ ausserhalb a geschnitten wird. Umgekehrt finden wir zu A die zugeordnete Gerade a, indem wir durch A eine k^3 legen und in φ deren nicht durch A gehende Secante aufsuchen. Um den obigen Satz zu beweisen, haben wir nur noch zu zeigen, dass a sich um einen Punkt B dreht, wenn A die zu B zugeordnete Gerade b beschreibt. Dieses folgt aber aus 3. Denn die beiden durch A und B gehenden Curven $k_a{}^3$ und $k_b{}^3$ des Bündels können durch eine F^2 verbunden werden, welche alle von den Punkten der einen Curve an die andere gezogenen Secanten enthält. Liegt nun A auf b, so geht F^2 durch b und durch diejenige in φ liegende Secante a von $k_a{}^3$, welche von b ausserhalb A geschnitten wird; und da F^2 auch durch B geht, so muss B auf a liegen, und der Satz ist bewiesen.

5. Wenn der Punkt A auf $\overline{ST}$ liegt, so zerfällt k^3 in $\overline{ST}$ und einen durch U, V, W gehenden und die $\overline{ST}$ schneidenden k^2. Daraus folgt: Die zehn Seitenflächen des aus den Knotenpunkten gebildeten räumlichen Fünfecks $STUVW$ schneiden das ebene Polarsystem φ in Geraden, deren Pole auf den gegenüberliegenden Kanten des Fünfecks enthalten sind. Das Polarsystem φ kann also äusserst leicht construirt werden. Dasselbe ist auch in demjenigen räumlichen Polarsystem enthalten, in welchem die Ebene φ einem der fünf Knotenpunkte zugeordnet ist und die übrigen vier Knotenpunkte ein Poltetraëder bilden. — Diejenigen Geraden von φ, welche durch ihre Pole hindurchgehen, umhüllen bekanntlich einen Kegelschnitt, die sogenannte Ordnungscurve des Polarsystemes. Daraus folgt: Die Ebene φ wird von unendlich vielen Curven des Bündels berührt, und zwar in den Punkten eines Kegelschnittes, der aber auch imaginär sein kann.

6. Jeder Strahl t des Knotenpunktes S wird von einer einzigen k^3 des Bündels berührt, weil eine Raumcurve III. Ordnung bestimmt ist durch fünf Punkte und die Tangente von einem derselben. Andererseits ist jeder Strahl s des Raumes Secante einer einzigen k^3, wenn s mit keinen zwei Knotenpunkten in einer Ebene liegt. Ich behaupte nun: Ist Σ eine durch den Knotenpunkt S gehende Ebene, und wird jedem Strahle s von Σ ein Strahl t von S zugewiesen, so dass t diejenige k^3 berührt, von welcher s eine Secante ist, so ist dadurch die Ebene Σ reciprok auf den Strahlenbündel S bezogen. Oder mit anderen Worten: wenn s sich in Σ um einen Punkt P dreht, so beschreibt zugleich der entsprechende Strahl t von S eine Ebene. — Zum

Beweise legen wir durch P eine Curve $k_p{}^3$ des Bündels und bezeichnen mit Q deren dritten, von P und S verschiedenen Schnittpunkt mit Σ, sowie mit π diejenige durch Q gelegte Ebene, welche in S die $k_p{}^3$ berührt. Jede andere k^3, welche von π in S berührt wird und deren Tangente t also in π liegt, kann mit $k_p{}^3$ durch eine F^2 verbunden werden. Und weil π die Curven k^3 und $k_p{}^3$ in S berührt und zugleich die $k_p{}^3$ in Q schneidet, so wird auch F^2 von π im Punkte S berührt und in der Geraden $\overline{SQ}$ geschnitten. Folglich wird F^2 auch von Σ in zwei Geraden geschnitten, von denen die eine $\overline{SQ}$ Secante von $k_p{}^3$ ist, und die andere s durch den gemeinschaftlichen Punkt P von $k_p{}^3$ und Σ gehen und eine Secante von k^3 sein muss (3). Jeder in π liegenden Geraden t von S entspricht also wirklich eine durch P gehende Gerade s von Σ, und unser Satz ist bewiesen.

7. Die reciproke Verwandtschaft, welche so durch den Curvenbündel zwischen dem Strahlenbündel S und der Ebene Σ hergestellt wird, ist durch das Tetraëder $TUVW$ der übrigen vier Knotenpunkte völlig bestimmt. Denn jedem Punkte, in welchem Σ von einer Kante des Tetraëders geschnitten wird, entspricht die Ebene, durch welche aus S die gegenüberliegende Kante projicirt wird. Auch sind der Strahlenbündel S und die ihm reciproke Ebene Σ zugeordnete Gebilde eines Polarsystemes, von welchem $TUVW$ ein Poltetraëder ist. Die Ordnungsfläche dieses Polarsystemes wird von Σ in S berührt und kann mit Σ zwei Gerade gemein haben. Dieselben fallen zusammen mit den entsprechenden Strahlen des Bündels S und sind, wie man leicht erkennt, Tangenten von zwei Curven k^3, welchen die Ebene Σ im Punkte S sich anschmiegt.

8. Werden durch einen Knotenpunkt S zwei Ebenen Σ und Σ_1 gelegt, und je zwei nicht durch S gehende Gerade s und s_1 derselben einander zugewiesen, welche von einer und derselben k^3 des Bündels Secanten sind, so werden dadurch die Ebenen Σ und Σ_1 collinear auf einander bezogen; denn sie sind beide reciprok zu dem Tangentenbündel S.

9. Wenn eine Gerade w durch einen Knotenpunkt W geht, so ist sie Secante von unendlich vielen k^3. Dieselben liegen auf der Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die fünf Strahlen w, $\overline{WS}$, $\overline{WT}$, $\overline{WU}$, $\overline{WV}$ gelegt werden kann, und werden von den Strahlen dieser Kegelfläche in projectivischen geraden Gebilden geschnitten. Denn sie werden aus jedem anderen Knotenpunkte S durch einen Büschel von Kegelflächen II. Ordnung projicirt, von welchem die genannten geraden Gebilde Schnitte sind. Die von $\overline{SW}$ verschiedenen Strahlen dieser Kegelflächen, welche die Kegelfläche $W(wSTUV)$ berühren, sind bekanntlich die Tangenten der Curven k^3 im Punkte S; also: Die Tangenten aller dieser k^3 in einem anderen Knotenpunkte S bilden einen Strahlenbüschel, dessen

Ebene die Kegelfläche W ($wSTUV$) II. Ordnung im Strahle $\overline{SW}$ berührt und welcher zu den vorhin erwähnten geraden Gebilden projectivisch ist.

10. Wenn man je zwei solche Strahlen der Knotenpunkte S und T einander zuweist, welche eine und dieselbe k^3 berühren, so entspricht also jedem Strahlenbüschel von S, dessen Ebene durch einen dritten Knotenpunkt W, V oder U hindurchgeht, ein projectivischer Strahlenbüschel in T, dessen Ebene gleichfalls durch resp. W, V oder U geht. Aber auch die Ebenenbüschel $\overline{SU}$ und $\overline{TU}$ (oder $\overline{SV}$ und $\overline{TV}$) sind dadurch projectivisch auf einander bezogen; denn sie schneiden zwei homologe Ebenen der Büschel $\overline{SW}$ und $\overline{TW}$ in projectivischen Strahlenbüscheln. Daraus folgt aber*): Werden je zwei solche Strahlen der Knotenpunkte S und T einander zugewiesen, welche eine und dieselbe Curve des Bündels berühren, so wird dadurch zwischen den Strahlenbündeln S und T eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt; d. h. jedem Strahlenbüschel von S (oder T) entspricht im Allgemeinen in T (resp. S) eine zu ihm projectivische Kegelfläche II. Ordnung, welche durch die übrigen drei Knotenpunkte hindurchgeht.

11. Werden durch die Knotenpunkte S und T die resp. Ebenen Σ und Σ_1 gelegt und je zwei nicht durch S oder T gehende Strahlen derselben einander zugewiesen, welche von einer und derselben k^3 des Bündels Secanten sind, so ist dadurch zwischen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades hergestellt; d. h. jedem Strahlenbüschel der einen Ebene entsprechen im Allgemeinen die Tangenten eines Kegelschnittes in der anderen Ebene, und alle solche Kegelschnitte sind einem bestimmten Hauptdreiecke eingeschrieben. Der Beweis folgt daraus, dass die Strahlenbündel S und T einander geometrisch verwandt und den resp. Ebenen Σ und Σ_1 reciprok sind. Das Hauptdreieck von Σ (oder Σ_1) ist eine Projection des Dreieckes UVW aus dem Punkte T (resp. S).

12. Die sämmtlichen Curven des Bündels, welche eine beliebig gegebene Gerade g schneiden, liegen in einer Fläche, welche ausser der Geraden g noch die zehn Verbindungslinien der Knotenpunkte enthält und zweimal durch diejenige k^3 geht, von welcher g eine Secante ist. Mit jeder Verbindungsebene von drei Knotenpunkten hat die Fläche drei Gerade und einen Kegelschnitt gemein (2); sie ist deshalb von der fünften Ordnung. Liegt g mit zwei Knotenpunkten S, T in einer Ebene, so zerfällt die Fläche in die Ebene $\overline{UVW}$ und eine Fläche vierter Ordnung. Letztere geht zwei-

*) Vgl. Seydewitz in Grunert's Archiv für Mathem. Bd. 7 p. 113—148, sowie meinen Aufsatz über die geometr. Verwandtschaften zweiten Grades in der Zeitschrift f. Mathem. Bd. XI, p. 297.

mal durch die Gerade $\overline{ST}$ und wird von jeder durch $\overline{ST}$ gelegten Ebene ausserdem in einem die Punkte S und T enthaltenden Kegelschnitt getroffen. Nämlich zwischen zwei beliebigen durch $\overline{ST}$ gehenden Ebenen besteht eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades, wenn je zwei von S und T verschiedene Punkte derselben einander zugewiesen werden, die auf einer und derselben Curve des Bündels liegen; zwei Hauptpunkte der Ebenen fallen mit S und T zusammen. Dieser Satz ist ähnlich wie derjenige von Nr. 10 zu beweisen mit Hilfe von 9; aus ihm folgt, dass jeder Geraden g der einen Ebene ein durch S und T gehender Kegelschnitt der anderen entspricht.

13. Hinsichtlich einer k^3 ist bekanntlich jedem Punkte P des Raumes ein Punkt P_1 conjugirt, d. h. P und P_1 sind einander conjugirt hinsichtlich jeder durch k^3 gelegten F^2, und die Gerade $\overline{PP_1}$ ist eine Secante der k^3. Die sämmtlichen Punkte P_1, welche einem gegebenen Punkte P conjugirt sind hinsichtlich der Curven k^3 des Bündels, liegen in einer Fläche F^3 dritter Ordnung. Projicirt man nämlich eine k^3 aus den Knotenpunkten durch Kegelflächen II. Ordnung und sucht in Bezug auf diese die Polarebenen von P, so schneiden sich dieselben in einem Punkte P_1. Die sämmtlichen k^3 werden aber aus jedem Knotenpunkte (S) durch einen Büschel von Kegelflächen II. Ordnung projicirt, indem letztere sich in vier Strahlen ($\overline{ST}$, $\overline{SU}$, $\overline{SV}$, $\overline{SW}$) schneiden müssen; die Polarebenen von P in Bezug auf alle solche Kegelflächen bilden also fünf Ebenenbüschel, deren Axen s, t, u, v, w durch die resp. fünf Knotenpunkte gehen. Bewegt sich nun k^3 auf einer Kegelfläche K^2 zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte S, so liegt P_1 mit s in der Polarebene von P in Bezug auf K^2 und beschreibt einen die Geraden t, u, v, w schneidenden Kegelschnitt. Daraus erkennen wir, dass die Ebenenbüschel s, t, u, v, w in der von Herrn F. August*) untersuchten Weise doppelt projectivisch auf einander bezogen sind, also eine Fläche F^3 III. Ordnung erzeugen. Auf F^3 liegen die Geraden s, t, u, v, w und die zehn Geraden, welche vom Punkte P durch je eine Kante und die gegenüberliegende Fläche des Fünfecks $STUVW$ harmonisch getrennt sind, sowie die Tangente der durch P gehenden k^3 im Punkte P. Diese letztere k^3 wird aus P durch eine Kegelfläche II. Ordnung projicirt, deren sämmtliche Strahlen die F^3 in P osculiren und welche sechs Strahlen mit F^3 gemein hat.

Zürich, im Mai 1868.

---

*) F. August, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (*diss. inaug.*, *Berolini* 1862).

XXV. Einfache lineare Construction der Flächen zweiter Ordnung aus neun und ihrer Durchdringungscurven aus acht Punkten. Von Prof. TH. REYE in Zürich.

Eine Raumcurve k^4 vierter Ordnung, in welcher zwei Flächen F^2 zweiter Ordnung sich schneiden, ist bekanntlich durch acht ihrer Punkte völlig bestimmt. Nur müssen diese Punkte von einander unabhängig sein, d. h. es dürfen von ihnen keine vier in einer Geraden, keine sechs in einer Ebene und nicht alle acht in einer Raumcurve k^3 dritter Ordnung liegen, auch dürfen sie nicht die einzigen gemeinschaftlichen Punkte von drei Flächen zweiter Ordnung sein. In besonderen Fällen kann die k^4 aus einer k^3 und einer Secante derselben bestehen, oder auch aus zwei Kegelschnitten, die zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein haben und welche auch in je zwei sich schneidende Gerade zerfallen oder sich auf je eine Gerade reduciren können.

Sind von einer k^4 acht von einander unabhängige oder mehr als acht Punkte bekannt, so kann in jeder Verbindungsebene von drei dieser Punkte der vierte Schnittpunkt mit k^4 linear (d. h. mit ausschliesslicher Hilfe von Geraden und Ebenen) construirt werden, und man gelangt so zu unendlich vielen Punkten der Raumcurve. Legt man dagegen durch zwei jener Punkte eine Ebene und verlangt deren anderen beiden Schnittpunkte mit k^4, so bedarf man zur Construction derselben der Hilfe eines Kegelschnittes, weil diese Aufgabe vom zweiten Grade ist. Wir wollen sowohl jene lineare als auch diese Construction zweiten Grades ausführen; die erstere wird alsdann genügen, um von einer durch neun Punkte gegebenen Fläche zweiter Ordnung alle Kegelschnitte linear zu construiren, welche durch je drei dieser Punkte hindurchgehen. Ausser einigen bekannten Sätzen über die Raumcurven vierter Ordnung werden wir nur die Sätze 4 und 5 des vorhergehenden Aufsatzes über Curvenbündel dritter Ordnung benutzen.

1. Die Schnittcurve k^4 von zwei Flächen zweiter Ordnung kann mit jedem Punkte P des Raumes durch eine einzige F^2 verbunden werden. Liegt P auf einer Secante von k^4, so ist die Fläche F^2 geradlinig und jede Gerade derselben ist eine Secante von k^4. Alle durch k^4 gehenden F^2 bilden einen Flächenbüschel zweiter Ordnung, der von einer beliebigen Ebene in einem Kegelschnittsbüschel und folglich von einer Geraden g im Allgemeinen in einem involutorischen Gebilde geschnitten wird. Aus diesen bekannten Sätzen folgt: Werden durch eine beliebige Gerade g zwei Ebenen gelegt, welche die k^4 in zwei Vierecken schneiden, so treffen die sechs Paar Gegenseiten der letzteren die Gerade g in sechs Punktenpaaren eines involutorischen Gebildes. Je zwei solche Gegenseiten liegen nämlich auf einer durch k^4 gehenden F^2.

2. Sind also von einer k^4 vier in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, D bekannt, so construirt man in jeder Verbindungsebene von drei anderen schon bekannten Punkten P, Q, R folgendermaassen ihren vierten Schnittpunkt S mit k^4. Man bringt die drei Paar Gegenseiten des Viereckes $ABCD$ zum Durchschnitt mit der Ebene $\overline{PQR}$ und erhält so drei Paar zugeordnete Punkte eines involutorischen geraden Gebildes g. In diesem sucht man zu den drei Punkten, welche g mit den Seiten des Dreiecks PQR gemein hat, die zugeordneten Punkte, und verbindet dieselben mit den resp. gegenüber liegenden Eckpunkten des Dreiecks. Dann schneiden sich (zufolge 1) die drei Verbindungslinien in dem gesuchten Punkte S. Sollten in besonderen Fällen zwei von den Verbindungslinien mit zwei Seiten des Dreiecks zusammenfallen, so wird k^4 von der dritten im Schnittpunkte dieser Seiten berührt, wie sich ebenfalls aus 1) leicht ergiebt.

3. Von einer k^4 seien bekannt zwei ebene Vierecke $ABCD$ und $PQRS$, ausserdem aber zwei Punkte U, V. Es seien zu construiren die übrigen zwei Punkte X, Y, welche eine beliebige, durch U und V gelegte Ebene ε mit k^4 gemein hat. — Wir nehmen an, dass ε durch keinen Eckpunkt der beiden Vierecke hindurchgeht, weil dieser Fall schon in 2) erledigt wurde. Die Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ (oder $PQRS$) schneiden die Ebene ε in drei Paar zugeordneten Punkten eines involutorischen geraden Gebildes g (resp. g_1). Verbinden wir nun U und V mit dem Schnittpunkte G von g und g_1 und mit den beiden Punkten, welche dem G in g und g_1 zugeordnet sind, durch einen Kegelschnitt k^2, so liegt dieser auf einer durch k^4 gehenden F^2 (1) und geht folglich auch durch die gesuchten Punkte X und Y. Andererseits ist die Gerade $\overline{XY}$ leicht zu construiren; denn sie und $\overline{UV}$ schneiden g und ebenso g_1 in einem Paare zugeordneter Punkte. Man braucht also nur noch k^2 mit $\overline{XY}$ zum Durchschnitt zu bringen, was auf bekannte Art geschieht, und die Punkte X, Y sind gefunden.

4. Die Construction einer k^4 aus acht gegebenen Punkten ist nach 2) und 3) leicht ausführbar, sobald zunächst ein der k^4 eingeschriebenes ebenes Viereck gefunden ist. Die Lösung dieser Hauptaufgabe aber stützt sich auf den Satz: E i n e k^4 u n d e i n e k^3, w e l c h e f ü n f P u n k t e u n d e i n e d u r c h k e i n e n d e r s e l b e n g e h e n d e S e c a n t e s g e m e i n h a b e n, l i e g e n a u f e i n e r d u r c h s g e h e n d e n F l ä c h e z w e i t e r O r d n u n g. Die k^4 kann mit s durch eine F^2 verbunden werden, und auf F^2 giebt es eine k_1^3, welche durch die fünf Punkte geht und die Gerade s zur Secante hat. Weil aber nur eine einzige, den letzten beiden Bedingungen genügende Raumcurve dritter Ordnung existirt, so muss k_1^3 mit k^3 identisch sein.

5. V o n e i n e r k^4 s i n d a c h t u n a b h ä n g i g e P u n k t e g e g e b e n, v o n d e n e n k e i n e v i e r i n e i n e r E b e n e l i e g e n; e s i s t d e r j e n i g e

neunte Punkt D von k^4 zu construiren, welcher mit drei A, B, C der gegebenen in einer Ebene liegt. — Die letzten fünf gegebenen Punkte bilden ein räumliches Fünfeck, dessen zehn Seiten wir mit der Ebene $\overline{ABC}$ zum Durchschnitt bringen. Ordnen wir den zehn Schnittlinien die resp. Punkte zu, welche die gegenüberliegenden Kanten des Fünfecks mit der Ebene $\overline{ABC}$ gemein haben, so erhalten wir zehn Paar zugeordnete Elemente eines ebenen Polarsystemes. In diesem bestimmen wir zu den Seiten des Dreiecks ABC die Pole und verbinden dieselben mit den gegenüberliegenden Eckpunkten von ABC; die drei Verbindungsgeraden schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte D. — Legen wir nämlich durch das Fünfeck einen Curvenbündel dritter Ordnung, so wird derselbe von $\overline{ABC}$ in dem genannten Polarsystem geschnitten. Eine k^3 des Bündels hat die Gerade $\overline{AB}$ zur Secante und schneidet die Ebene $\overline{ABC}$ noch in dem Pole C_1 von $\overline{AB}$. Zugleich liegt diese k^3 mit k^4 und $\overline{AB}$ auf einer F^2, welche von $\overline{ABC}$ noch in einer zweiten, durch C, D und C_1 gehenden Geraden geschnitten wird, und somit liegt der gesuchte Punkt D auf $\overline{CC_1}$, wie zu beweisen war.

6. Wenn in speciellen Fällen zwei Seiten des Dreiecks ABC einander conjugirt sind in dem soeben benutzten Polarsystem, so liegt der Pol der dritten Seite auf der Tangente von k^4 im gegenüberliegenden Eckpunkte und man gewinnt diese Tangente durch unsere Construction. Fällt aber der Pol einer Seite $\overline{AB}$ zusammen mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte C, so besteht die k^4 aus der durch C gehenden k^3 des Curvenbündels und ihrer Secante $\overline{AB}$. Ich unterlasse es, diese besonderen Fälle, in denen die Aufgabe ebenfalls als gelöst zu betrachten ist, weiter zu erörtern. Dagegen fasse ich das Ergebniss von 5) in folgendem Satze zusammen: Liegen von neun beliebigen Punkten einer k^4 irgend vier A, B, C, D in einer Ebene, so sind in dem Polarsystem, in welchem vier von den übrigen fünf Punkten ein Poltetraëder bilden und dem fünften die Ebene $\overline{ABCD}$ zugeordnet ist, je zwei Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ einander conjugirt.

7. Von einer Fläche zweiter Ordnung sind neun von einander unabhängige Punkte gegeben, die nicht alle auf einer k^4 liegen. Die Schnittlinie der Fläche mit der Verbindungsebene von irgend drei A, B, C dieser Punkte ist zu construiren. Man bestimmt nach 5) die vierten Schnittpunkte der Ebene $\overline{ABC}$ mit irgend welchen k^4, welche A, B und C mit je fünf von den übrigen sechs gegebenen Punkten verbinden. Sobald zwei solche vierte Schnittpunkte gefunden sind, kann der, auch durch sie hindurchgehende, gesuchte Kegelschnitt auf bekannte Art gezeichnet werden.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die in 5) und 7) auszuführenden Constructionen zuerst von v. Staudt (in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage Nr. 591 und 592) angegeben worden sind, jedoch mit ganz anderer Begründung.

Zürich, im Mai 1868.

XXVI. Gelegentliche Bemerkung über die Ellipse. Bezeichnet $E(1, x)$ die Länge des Quadranten einer aus den Halbachsen 1 und $x < 1$ construirten Ellipse, so giebt der Ausdruck

$$M = \int_0^1 4\,E(1, x)\,dx = 4\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\varphi + x^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi$$

das arithmetische Mittel der Umfänge aller Ellipsen, deren gemeinschaftliche grosse Halbachse $= 1$ ist, und deren kleine Halbachsen die von 0 bis 1 stetig auf einander folgenden echten Brüche sind Das obige Doppelintegral würde nach Ausführung der auf x bezüglichen Integration eine logarithmische Form erhalten; man vermeidet dieselbe durch Anwendung der identischen Gleichung

$$\int_0^1 \sqrt{\alpha + \beta x^2}\,.\,dx = \frac{\sqrt{\alpha + \beta}}{2}\left\{1 + \int_0^1 \frac{\alpha\,du}{\alpha + \beta - \beta u^2}\right\},$$

welche giebt

$$M = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{1 + \int_0^1 \frac{\cos^2\varphi}{1 - u^2 \sin^2\varphi}\,du\right\}$$

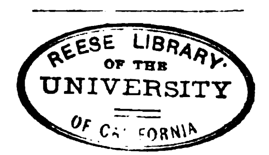
$$= \pi + 2\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{1 - u^2 \sin^2\varphi}\,du\,d\varphi.$$

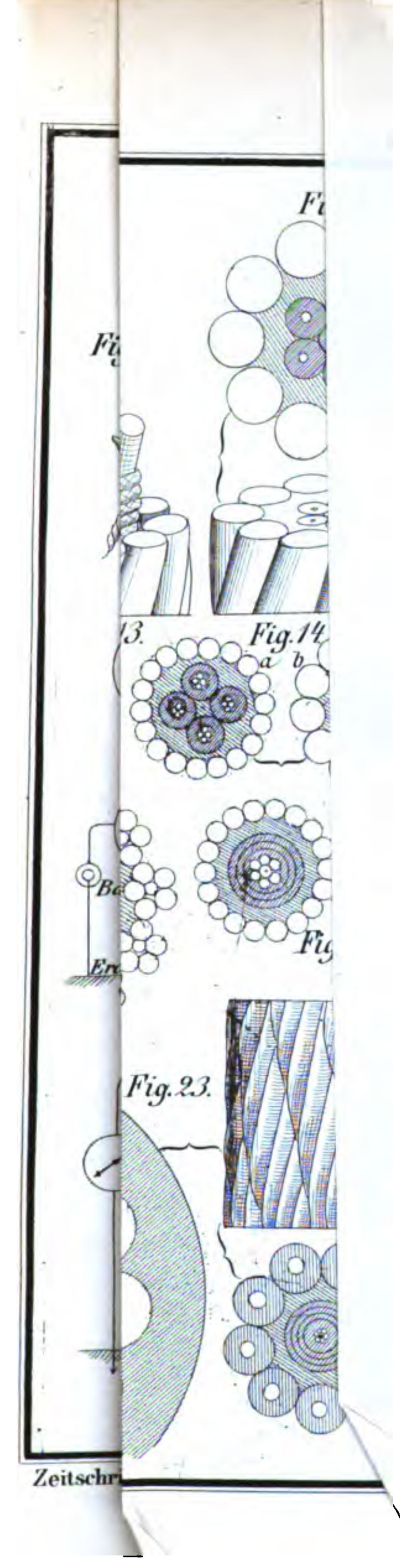
Nach Ausführung der angedeuteten Integrationen findet man sehr leicht

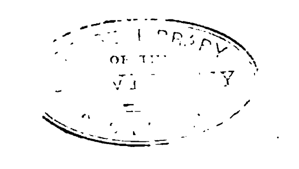
$$M = \tfrac{1}{2}\pi^2 = 4{,}9348022,$$

also ist das gesuchte Mittel gleich der Peripherie eines mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ beschriebenen Kreises.

SCHLÖMILCH.




Fig.14.
a
b
Fig.23.
Zeitschr



Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



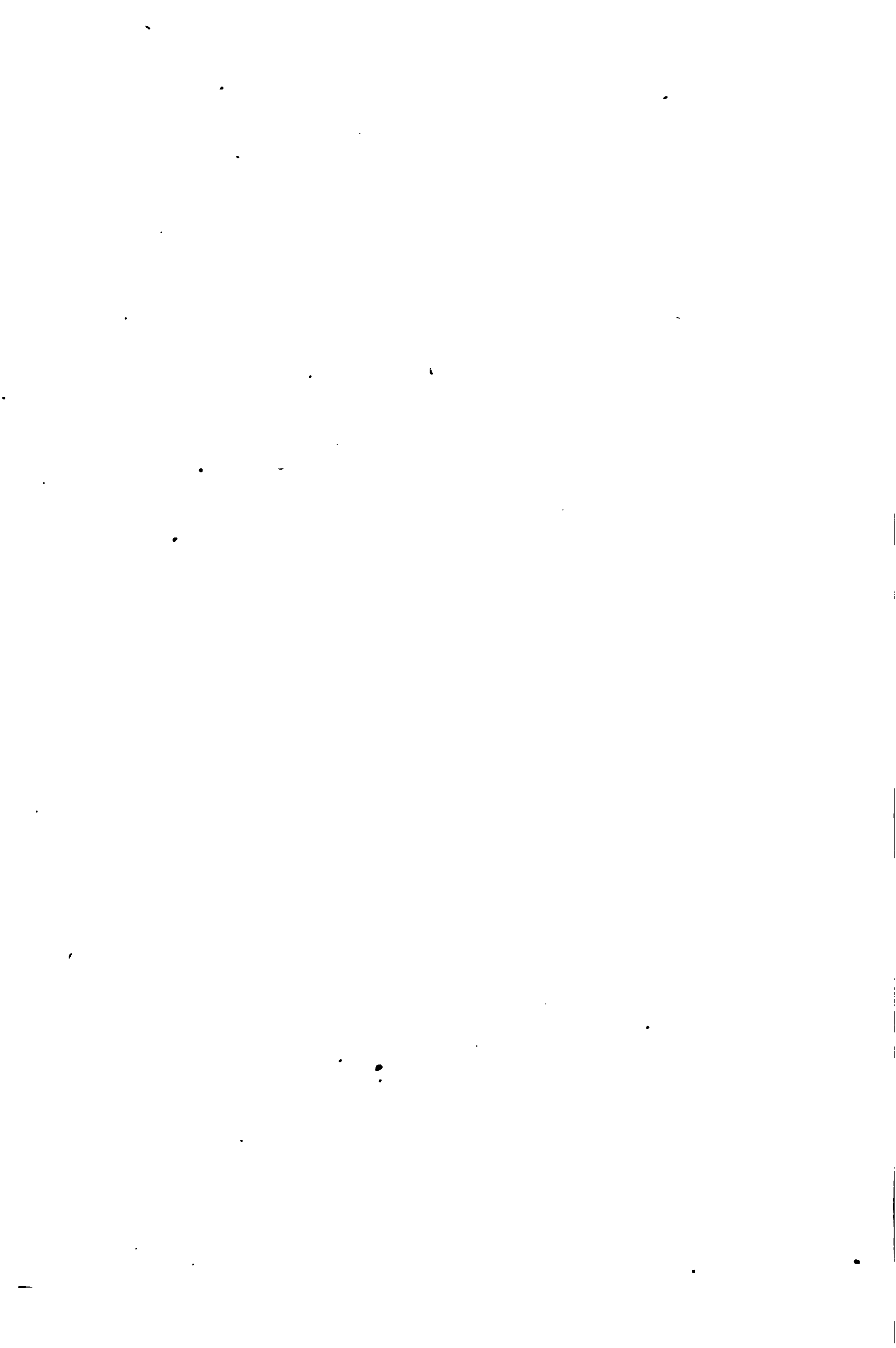
Dreizehnter Jahrgang.



LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1868.



Inhalt.



Literaturzeitung.

Recensionen.

Aufgaben aus der analytischen Mechanik, von Dr. A. FUHRMANN, Assistent für Mathematik und Vermessungslehre an der königl. polytechnischen Schule zu Dresden. Mit einem Vorworte von Dr. O. SCHLÖMILCH, königl. sächs. Hofrath, Professor etc. etc. In zwei Theilen. Erster Theil: Aufgaben aus der analytischen Geostatik. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1867.

Da eine Besprechung des vorliegenden Werkes hier unpassend sein würde, so möge das Vorwort des Unterzeichneten Platz finden. Es lautet:

„Wenn es schon zur tieferen Kenntniss einer fremden Sprache unerlässlich ist, nicht nur das Geschriebene oder Gesprochene zu verstehen, sondern auch selbst die Sprache reden zu können, so darf man von der Sprache der exacten Wissenschaften um so mehr behaupten, dass sie nicht blos gelernt, sondern auch geübt sein will. Findet man doch häufig genug unter seinen Zuhörern solche, keineswegs unbegabte Studirende, welche zwar alles Vorgetragene bestens verstanden haben, die sich aber äusserst ungeschickt anstellen, sobald ihnen die selbständige Lösung einer Aufgabe zugemuthet wird, die etwas mehr verlangt, als die Substitution specieller Werthe in allgemeine Formeln. Dieser Erfahrung dankt das hiesige Polytechnikum schon seit langer Zeit die bewährte Einrichtung, den Vorträgen über reine und angewandte Mathematik besondere Repetitionen beizugeben. Letztere beschränken sich nicht auf eine blosse Wiederholung des Vorgetragenen, vielmehr suchen sie durch zahlreiche Beispiele, welche von den Studirenden theils coram omnibus weiss auf schwarz gerechnet, theils zu Hause bearbeitet werden, dem Jünger der Wissenschaft die erforderliche Gewandtheit in der Lösung von Aufgaben zu verschaffen. Die nämliche Einrichtung empfiehlt auch der deutsche Ingenieurverein in seinem Organisationsplane der polytechnischen Institute, jedoch mit dem ausdrücklichen Wunsche, dass die Repetitionen womöglich von dem vortragenden Professor selbst abgehalten werden möchten. Gegen die Zweckmässigkeit dieses Vorschlags lässt sich aber ein Bedenken erheben. Da Niemand seine Indivi-

dualität verleugnen kann, so wird der repetirende Professor seiner Anschauungs- und Ausdrucksweise treu bleiben, also nur noch einmal sagen, was er schon im Vortrage gesagt hat; der Assistent dagegen bringt die Sache unter einem anderen Gesichtspunkte und in anderer Redeform wieder und bietet damit dem Zuhörer eine neue Seite des Gegenstandes dar. Wir machen ja nicht selten die Erfahrung, dass von zwei Rednern, die ihr Thema mit gleicher Klarheit behandeln, der eine sympathischer für uns ist, als der andere und dass wir eben deshalb den ersten leichter verstehen, während Andere den zweiten vorziehen; giebt man dies zu, so muss man es gerade bei abstracten Wissenschaften für einen Vortheil halten, wenn dem Studirenden die Gelegenheit geboten wird, über denselben Gegenstand zwei verschiedene Docenten zu hören. Eine praktische Schwierigkeit dürfte hieraus nicht entspringen, sobald sich der Assistent im Allgemeinen dem Gedankengange des Professors anzuschmiegen weiss, und der Professor kein Pedant ist, der da meint, dass es ohne seine sacramentalen Formeln gar nicht gehen könne.

Das hiesige Polytechnikum besitzt glücklicher Weise in Herrn Dr. Fuhrmann einen Assistenten, der meine Vorträge über höhere Analysis und analytische Mechanik wirksam zu unterstützen versteht, und ich habe es daher gern übernommen, dem Erstlingswerke desselben einige empfehlende Worte auf den Weg zu geben. Sowohl für Repetitionen als für das Selbststudium ist eine Aufgabensammlung ohne Zweifel ein willkommenes Hülfsmittel, und da in der That keine Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Mechanik existirt, welche den Bedürfnissen der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Instituten entspricht, so dürfte das vorliegende Buch wohl als eine zeitgemässe Erscheinung gelten. Der erste Theil desselben, welchem ein zweiter unverzüglich folgen wird, enthält nur Aufgaben aus der Statik fester Körper, wobei Probleme über die Elasticität und Festigkeit ausgeschlossen wurden, weil diese an polytechnischen Schulen in besonderen Vorlesungen ausführlich behandelt zu werden pflegen. Die meisten der mitgetheilten, für das erste Stadium der analytischen Mechanik berechneten Aufgaben sind neu; Bekanntes ist selten und nur dann aufgenommen worden, wenn sich später eine Verweisung darauf nöthig machte. Bei schweren Aufgaben findet man eine Andeutung über den Gang der Auflösung, bei leichteren ist nur das Resultat angegeben. Und damit sei diese anspruchslose, jedenfalls aber brauchbare Schrift den Lehrern und Jüngern der Wissenschaft bestens empfohlen.

Dresden, im August 1867.

SCHLÖMILCH.

Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis. Bearbeitet von Joh. Lieblein, Professor am Polytechnikum zu Prag. Prag, Verlag von J. Satow. 1867.

An dem Prager Polytechnikum ist die algebraische Analysis als selbständige Disciplin in den Lehrplan aufgenommen und findet ihre Vertretung in den Vorträgen des Verfassers. Dem letzteren machte sich hierbei der Mangel einer Aufgabensammlung fühlbar und dieser bewog ihn, „die eben so mühsame als wenig dankbare Bearbeitung“ eines solchen Hülfsbuches zu unternehmen. Dabei hat sich der Verfasser ziemlich genau dem Handbuch der algebraischen Analysis des Referenten angeschlossen, und dem entsprechend giebt die Sammlung zu jedem Capitel des genannten Buches (mit alleiniger Ausnahme des Capitels über die Mittelwerthe der Functionen) eine Reihe von Beispielen und Aufgaben mit nur kurzen Andeutungen zur Lösung der schwierigeren Aufgaben, nebst einigen, die behandelten Theorien ergänzenden Zusätzen. Hiermit dürfte der allgemeine Charakter des vorliegenden Werkchens bezeichnet sein; in Beziehung auf das Detail mögen noch einige Bemerkungen folgen.

Vor Allem ist rühmend anzuerkennen, dass die Sammlung, trotz ihres geringen Umfanges von 12 Bogen, einen grossen Reichthum an Beispielen und Aufgaben enthält, und dass die letzteren methodisch gut geordnet sind, d. h. eine Stufenfolge vom Leichten zum Schweren darbieten. Weniger einverstanden ist Referent mit der Trennung der Aufgaben von ihren Lösungen; werden nämlich die letzteren überhaupt mitgetheilt, so ist es für den Gebrauch des Buches ohne Zweifel bequemer, die Lösung unmittelbar nach der Aufgabe zu finden, statt sie in einem Anhange suchen zu müssen. Der letztere enthält übrigens eine Fülle werthvoller Bemerkungen, namentlich über unendliche Reihen, unendliche Producte und Kettenbrüche. Beispielweis seien erwähnt 1) der Satz, dass die unendlichen, nur positive Glieder enthaltenden Reihen

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\dots$$
$$\text{und } u_1+k\,u_k+k^2u_{k^2}+k^3u_{k^3}+\dots$$

gleichzeitig convergiren und divergiren, woraus für $k=2$ ein specieller Satz Cauchy's folgt; 2) die Transformationen verschiedener unendlicher Producte und Reihen, welche theils in der Theorie der elliptischen Functionen, theils bei der Untersuchung über die hypergeometrische Reihe eine Rolle spielen; 3) die Betrachtungen über die Convergenz und die geometrische Deutung der Kettenbrüche. Diese Proben werden hinreichend documentiren, dass der Verfasser weit mehr giebt, als man nach dem Titel seines Werkchens erwarten sollte, und dass derselbe überhaupt die Wissenschaft mit Freiheit und Geschick zu behandeln versteht. Und so fürchtet Referent keineswegs, dass der Verfasser eine „wenig dankbare“ Arbeit unternommen habe.

Schlömilch.

Anleitung zum Linearzeichnen, von Prof. DELABAR. 3 Hefte. Freiburg im Breisgau, Herder'sche Verlagshandlung.

Der Verfasser geht von der wohl unzweifelhaft richtigen Idee aus, dass der Unterricht im Linearzeichnen drei Stufen haben müsse. Auf der ersten Stufe steht das „geometrische Linearzeichnen", wobei es zunächst nur darauf ankommt, den Schülern Fertigkeit im Gebrauche der Zeichneninstrumente beizubringen, sie an genaue und reinliche Ausführung ihrer graphischen Arbeiten zu gewöhnen und bei dieser Gelegenheit eine Reihe oft vorkommender geometrischer Constructionen einzuüben. Die nächste Stufe enthält die „Elemente der darstellenden Geometrie" oder, wie Referent kürzer sagen würde, die Projectionslehre, deren Aufgabe ist, jeden begrenzten Körper in jeder beliebigen Lage darzustellen. Der letzten Stufe endlich gehört „die weitere Ausführung der rechtwinkligen Projectionsart" d. h. die eigentliche descriptive Geometrie, welche auch unbegrenzte Gebilde in Untersuchung nimmt und an diesen ganz dieselben Aufgaben durch Construction löst, welche in der analytischen Geometrie calculatorisch behandelt werden. Für diese drei Unterrichtsstufen sind nun die drei Hefte des obigen Werkes bestimmt; über deren Inhalt mögen einige Bemerkungen folgen.

Im ersten Hefte giebt der Verfasser zunächst einige praktische Winke über die Behandlung und Handhabung der Instrumente und sonstigen Materialien; die folgenden Abschnitte enthalten die gewöhnlichen Constructionen von Parallelen und Senkrechten, die Theilung von Geraden und Winkeln, die Anfertigung von Maassstäben etc. Bei den Kreistheilungen dürfte zweierlei zu erinnern sein. Erstens ist die Anwendung des Transporteurs zur Construction von $\frac{360^0}{7}$, $\frac{360^0}{11}$ etc. weder sonderlich bequem, noch hinreichend genau; man erhält viel bessere Resultate, wenn man die gesuchten Centriwinkel mittelst ihrer trigonometrischen Tangenten construirt, z. B.

$$\tan\frac{360^0}{7}=\frac{79}{63},\quad \text{Fehler } 0'',6$$
$$\tan\frac{360^0}{9}=\frac{73}{87},\quad \text{"}\ 2'',3$$
$$\tan\frac{360^0}{11}=\frac{232}{361},\quad \text{"}\ 0'',3$$

u. s. w.

Zweitens muss bei der Construction regelmässiger Vielecke davor gewarnt werden, dass der Zeichner die eine gefundene Seite im Kreise herumträgt, um die übrigen Seiten zu finden; denn hierbei wird der unvermeidliche Fehler, womit jene erste Seite behaftet ist, multiplicirt und der Schluss des Polygons selten erreicht. Vielmehr ist (wie schon Hofrath Kunze bemerkt hat) auf eine andere Weise zu verfahren, die hier in Erinnerung gebracht

und am Elfeck erläutert werden möge. Nachdem man die Seite $A_1 A_2$ gefunden hat, halbire man den übrigen Kreisbogen, welcher $\frac{10}{11}$ der Peripherie umfasst; der Halbirungspunkt ist die Ecke A_7. Von dieser schneide man rechts und links zwei Bögen $= arc A_1 A_2$ ab, man hat dann die Ecken A_6 und A_8; hierauf halbire man die Bögen $A_2 A_6$ und $A_8 A_1$, wodurch A_4 und A_{10} entstehen u. s. w. — Bei den folgenden Constructionen von Kegelschnitten und anderen Curven wäre es zweckmässig gewesen, die sehr einfachen Constructionen der Normalen anzugeben und dabei zu bemerken, dass die Durchschnitte der Normalen nahezu die Krümmungsmittelpunkte sind und dass sich mit deren Hülfe jede Curve aus kleinen Kreisbögen zusammensetzen lässt. Dieses Verfahren giebt weit genauere und zugleich weit elegantere Zeichnungen, als wenn die gefundenen Curvenpunkte aus freier Hand verbunden werden.

Im zweiten und dritten Hefte hat der Referent nichts Wesentliches zu erinnern gefunden, was bei der schon ziemlich festen Gestaltung der eigentlichen descriptiven Geometrie Niemanden überraschen wird.

Die Darstellung des Verfassers ist klar und durchaus leicht verständlich; die Figuren sind zwar dem kleinen Formate des Buches (Queroctav) angepasst, aber hinreichend deutlich.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 15. October bis 15. December 1867.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1866. Berlin, Dümmler. 1 Thlr. 16 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1866. Ebendas. 4 Thlr. 18 Ngr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. 1867. II. Bd. 2. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. VII[e] Série. Tome XI, No. 9. Leipzig, Voss. 8 Ngr.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Instituto de Bologna. Serie II. Tomo VI. Torino et Firenze, Loescher. 15 *l.*

Indice delle materie contenute:

Chelini, sugli assi centrali delle force e delle rotazioni nell' equilibrio e nel moto dei corpi.

Piani, del metodo newtoniano per la risoluzione approssimata delle equazione numeriche.

Cremona, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie; memoria prima.

Delle Gasa, Esame di alcune critiche osservazioni sull' elettricità statica.

Reine Mathematik.

Cantor, M., Euklid und sein Jahrhundert. Mathematisch-historische Skizze. Leipzig, Teubner. 18 Ngr.

Offerdinger, C., Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts. Tübingen, Fues. $^1/_5$ Thlr.

Natani, C., die Variationsrechnung. Anhang zur höheren Analysis. Berlin, Wiegandt & Hempel. $^2/_3$ Thlr.

Worpitzky, J., Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen und Reihensummen. Berlin, O. Müller. $^1/_3$ Thlr.

HEIME, F., Untersuchungen über relative Primzahlen, primitive und secundäre Wurzeln, quadratische Reste und Nichtreste. Berlin, Uthemann & Müller. ⅜ Thlr.

RIEMANN, B., Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. 2. Abdruck. Göttingen, Rente. 1½ Thlr.

GERLACH, H., Lehrbuch der Mathematik. 4 Theile in 1 Bd. 2. Aufl. Dessau, Aue. 1 Thlr. 26 Ngr.

REIDT, F., Die Elemente der Mathematik für höhere Lehranstalten. 1. Theil: Arithmetik; 2. Theil: Planimetrie. Berlin, Grote. 26 Ngr.

DRACH, A. v., Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte (Raumcurven 3. Ordnung). Leipzig, Teubner. 28 Ngr.

KOUTNY, E., Construction des Durchschnitts einer Geraden mit den Kegelschnittslinien (Akad.). Wien, Gerold. ⅕ Thlr.

DILLING, A., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebraischen Geometrie. Halle, Schmidt. 2 Thlr.

SALOMON, J., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Bd. Geometrie. 3. Aufl. Wien, Gerold. 1⅜ Thlr.

DE NIEM, Beweise und Auflösungen sämmtlicher Lehrsätze und Aufgaben der Jacobi'schen Anhänge zu van Swinden's Geometrie. 2 Theile. Halle, Schmidt. 3⅓ Thlr.

Van Swinden's Geometrie im Auszuge etc. Aus dem Holländischen übersetzt von de Niem. Ebendas. 12½ Ngr.

ROTTOK, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Hamburg, Jowien ½ Thlr.

SERRET, J. A., *Cours de calcul différentiel et intégral. Tome I. Calcul différentiel.* Paris, Gauthiers-Villars. pro compl. 22 Frcs.

HAAN, B. DE, *Nouvelles tables d'intégrales définies.* Leide, Engels. 14 Fl.

Angewandte Mathematik.

HANSEN, P. A., Die Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und ihre Anwendung auf die Geodäsie. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

BRETTNER, H., Mathematische Geographie. 5. Aufl. Von F. Bredow. Leipzig, G. E. Schulze. 12 Ngr.

FÖRSTER, W., Bericht der Berliner Sternwarte für das Jahr 1866. Berlin, Dümmler. ⅙ Thlr.

HEIS, E., Sammlung von 5 Sternkarten für die vier Himmelsgegenden und für den Zenith zum Einzeichnen der Sternschnuppen der Novemberperiode. Köln, Du Mont-Schauberg. 8 Ngr.

Auwers, B., Bestimmung der Parallaxe des Sterns 34 Groombridge durch chronographische Beobachtungen am Aequatoreal der Gothaer Sternwarte. Berlin, Dümmler. ⅙ Thlr.

Oehl, E., Versuch einer Theorie über Kometen. Wien, Pichler. ⅓ Thlr.

Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. 1. Theil: Aufgaben aus der analytischen Geostatik. Leipzig, Teubner. ⅔ Thlr.

Zech, Ueber die Schwingungsbewegungen der Locomotiven. Tübingen, Fues. ⅓ Thlr.

Brasseur, J., *Programme du cours de géométrie descriptive fait à l'université de Liège.* 4° Edit. Lüttich, Sazonoff. 2⅔ Thlr.

Physik.

Külp, E., Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Bd.: Wärmelehre von R. Dreser. Darmstadt, Diehl. 2 Thlr.

Lang, V. v., Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, Vieweg. 1⅙ Thlr.

Pranghofer, J., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Physik. 1. Theil: Mechanische Naturlehre. Wien, Braumüller. 1 Thlr.

Briot, Ch., Versuche über die mathematische Theorie des Lichtes. Uebersetzt und mit einem Zusatze vermehrt von W. Klinkerfues. Leipzig; Quandt und Händel. 1⅓ Thlr.

Tyndall, J., Die Wärme als eine Art der Bewegung. Autorisirte deutsche Ausgabe von Helmholtz und Wiedemann. Braunschweig, Vieweg. 2⅔ Thlr.

Gauss, C. F., Werke, 5. Bd. Mathematische Physik, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.. Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht. 7⅕ Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Ueber die geometrische Hypothesis in Plato's Menon von Dr. Adolph Benecke, Direktor des Gymnasiums zu Elbing. Elbing 1867. In Commission bei C. Meissner. 34 Seiten in 4^0 nebst einer Figurentafel.

In dem platonischen Dialoge, welcher den Titel „Meno" führt, befindet sich eine mathematische Stelle, welche, man darf wohl sagen Jahrhunderte lang, die Verzweiflung der Philologen verursachte, ohne den Mathematikern verständlicher zu sein. Referent hat deshalb in seiner jüngst in einem Separathefte dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung „Euclid und sein Jahrhundert" jene Stelle nur sehr im Vorübergehen (S. 46—47) berührt und darauf verzichtet ein besonderes Gewicht auf sie zu legen, weil, was hier zugestanden werden mag, mehrwöchentliche Beschäftigung mit jener Stelle ihm die Sache nur immer unklarer machte.

Fast gleichzeitig mit der genannten Abhandlung erschienen zwei Untersuchungen, die speciell auf die Meno-Stelle sich bezogen, welche aber vermöge dieser Gleichzeitigkeit bei unserer Zusammenstellung nicht mehr berücksichtigt werden konnten. Wir meinen die nachgelassene Abhandlung des vor einigen Jahren verstorbenen Gymnasialdirektors Fr. Carl Wex in Schwerin „Platons Geometrie im Menon und die Parabole des Pythagoras bei Plutarch" (Grunert's Archiv, Bd. XLVII, S. 131—163) und die Monographie des Herrn Benecke, welche in der Ueberschrift dieser Besprechung des Näheren genannt ist, Die erwähnte posthume Arbeit enthält manche schätzenswerthe Bemerkung (einige derselben sollen in diesem Referate noch Platz finden), ohne jedoch nach unserem Dafürhalten die eigentliche Frage zu lösen. Herr Benecke dagegen hat, wie wir wenigstens überzeugt sind, das Ei des Columbus gefunden. Er hat eine Uebersetzung und Erklärung vorgeschlagen, welche durch die Vereinigung folgender Vorzüge vor allen bisherigen Versuchen sich auszeichnet.

1. Der durch die Codices überlieferte Wortlaut des Textes wird unverändert erhalten, während man insgemein mehr oder weniger kühne Correkturen und Conjekturen sich erlaubte.

2. Der mathematische Sinn ist ein so elementarer und naheliegender, dass er jetzt in der That den Dienst leisten kann, den er leisten soll, als beleuchtendes Beispiel in einer durchaus nichtmathematischen Discussion gebraucht zu werden.

3. Die Benecke'sche Auffassung behandelt die früher schwierige Stelle nicht aus dem Zusammenhange des Dialoges herausgerissen, sie knüpft vielmehr unmittelbar an andere mathematische Versinnlichungen an, welche wenige Minuten vorher in demselben Gespräche benutzt worden waren und zur Zeichnung gewisser Figuren in den Sand Anlass gegeben hatten, welche man desshalb als noch vorhanden und weiter benutzbar voraussetzen muss.

Diese vereinigten Momente scheinen uns zwingend für die Richtigkeit der neuen Auffassung, und nur in zwei freilich nebensächlichen Dingen möchten wir von Herrn Benecke abweichen. Einmal glauben wir, dass allerdings der Kreis die erste Zeichnung ist, welche Sokrates entwirft, und zwar schon 73, *E* bei Gelegenheit des Runden, welches eine Figur, nicht aber die Figur überhaupt sei (*στρογγυλότητος πέρι εἴποιμ' ἂν ἔγωγε ὅτι σχῆμά τί ἐστιν, οὐχ οὕτως ἁπλῶς ὅτι σχῆμα*). Zweitens glauben wir, dass wo zuerst das 4füssige Quadrat gezeichnet wird 82, *C* und Sokrates die Frage stellt: Sind nicht auch diese durch die Mitte gehenden Linien eben dieselben? (*οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον*;) keineswegs die Diagonalen gemeint sind, sondern die Linien, welche die Mitten von je zwei gegenüberliegenden Seiten des Quadrates verbinden.

Für unsere erste Abweichung steht uns nur der Grund zur Verfügung, dass es immerhin möglich ist, dass Sokrates schon bei jener frühern Veranlassung eine Zeichnung entwirft, wenn auch an sich keine Nothwendigkeit dazu vorliegt; dass dagegen unter der Voraussetzung einer schon vorhandenen Kreisfigur neben dem Quadrate es später an der Hauptstelle 86, *E* viel natürlicher wird, dass Sokrates bei dem als Versinnlichung zu wählenden Beispiele die beiden vorhandenen Figuren benutzt, auf die zufällig sein Auge wieder fällt, als dass er jetzt erst dem Beispiele zu Liebe einen Kreis zeichnet.

Für die zweite Aenderung besitzen wir so viele Gründe, dass wir in Verlegenheit sind alle mitzutheilen, während für die Benecke'sche Auffassung, wie uns scheinen will, auch nicht ein stützendes Moment aufzufinden ist, es müsste denn sein, dass man sich auf die ihr entsprechende Uebersetzung bei Hieronymus Müller, Platon's sämmtliche Werke, Bd. II, S. 142 (Leipzig 1851), beriefe, wogegen uns die Autorität Stallbaums (Platonis Meno, prolegomenis et commentariis illustravit

Godofr. Stallbaumius, pag. 66 et 69. Lipsiae 1827) zur Seite steht. Blosse Namen gelten aber mit Recht Herrn Benecke so wenig, wie uns als Gründe, und so mögen einige von den Erwägungen genannt werden, durch welche wir uns bestimmen liessen. Die keinen Augenblick zu vernachlässigende Situation ist die, dass Sokrates einen ungebildeten Sklaven vor sich hat, dem er durch seine Fragen Aussprüche geometrischer Wahrheiten entlockt, von deren Kenntniss Jener sich nicht bewusst ist. Die Fragen des Sokrates allein würden dazu nicht ausreichen; mit Hülfe von in den Sand gezeichneten Figuren genügen sie. Alle herausgefragten Wahrheiten müssen daher solche sein, welche durch blosse Anschauung einleuchten, ohne dass ein eigentlicher geometrischer Beweis zu führen versucht würde. Während Herr Benecke diesen Gesichtspunkt im Uebrigen festhält, lässt er ihn hier aus den Augen. Die Identität der beiden Diagonalen scheint sich uns nicht ohne Weiteres der blossen Anschauung darzubieten, wie überhaupt zwei in ihrem Verlaufe sich schneidende Linien erfahrungsmässig weniger gut bezüglich ihrer Länge abgeschätzt werden können, als wenn die Linien nur in einem Endpunkte zusammenstossen, und diese wieder weniger gut als Parallellinien. Unsere Deutung giebt aber den ursprünglichen Vierecksseiten parallele und diesen ebenso wie unter sich gleiche Linien, was ebenfalls in dem oben citirten Wortlaute von des Sokrates Frage gelegen zu haben scheint. Ferner ist bei unserer Auffassung, welche die Seiten halbirt, das Quadrat viertheilt, einleuchtend, wesshalb Sokrates bei dieser ersten Figur, welche er dem Sklaven vorzeichnet, die Seite als 2 Fuss lang annimmt und nicht als 1 Fuss lang, was doch eigentlich näher liegt. Ferner ist auch Herr Benecke genöthigt nachher bei den Quadraten der 4 Fuss und 3 Fuss langen Seiten eine Zeichnung anzunehmen, welche der unsrigen analog ist, während in dem Texte des Dialogs bis dahin nicht die leiseste Andeutung sich findet, dass eine von neuen Grundgedanken ausgehende Construktion vorgenommen würde. Endlich halten wir es geradezu für entscheidend, dass 85,*A* die Diagonale gezogen und definirt (*αὕτη ἡ γραμμὴ ἡ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τείνει*) und 85,*B* auch benannt wird (*καλοῦσι δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί*). Das wäre der angewandten heuristischen Methode nach zu spät, wenn diese Linien schon in einem früheren Augenblicke der Besprechung gezogen worden wären.

Wir wiederholen es, dass wir selbst diese Bemerkungen nur für nebensächliche halten, keineswegs geeignet, das unstreitige Verdienst des Verfassers der uns vorliegenden Abhandlung irgendwie zu schmälern. Wir beabsichtigen durch deren Darlegung nur unser Interesse an dem Gegenstande zu erweisen und zu ergänzen, was uns übersehen scheint.

Zu demselben Zwecke führen wir aus der Wex'schen Abhandlung

zwei Stellen an, welche auf das missliche Wort παρατείνειν sich beziehen und für den philologischen Theil der Untersuchung nicht ohne Wichtigkeit sind. Herr Wex schreibt l. c. S. 137: „Wir befinden uns also hier auf dem Gebiete geometrischer Techniker und ihrer Elementar-Geometrie. Diese haben aber für ihre praktischen Operationen und zum Theil mechanischen Kunstgriffe auch besondere Kunstausdrücke. Man trete bei uns in eine Elementarklasse; da hören wir manche termini, wie eins borgen, eins im Sinne behalten, einen Bruch heben, eine Zahl zerfällen und Anderes. Hofft man diese mathematischen Kunstausdrücke auch in Schriften von Leibnitz, Euler, Gauss zu finden? Nun, ebensowenig suche man παρατείνειν bei den griechischen Mathematikern.“ Die zweite Stelle findet sich l. c. S. 161, Anmerkung ** und lautet: „Noch will ich denen, die παρατείνω für gleichbedeutend mit παραβάλλω halten möchten, eine Combination an die Hand geben, durch die sie ihre Meinung unterstützen können. In dem Euclid des Boethius bei Lachmann grammatici script. p. 385 finden sich folgende zwei Aufgaben neben einander gestellt: *Dato triangulo aequale parallelogrammum in dato rectilineo angulo constituere. — Iuxta rectam lineam dato triangulo dato rectilineo angulo parallelogrammum aequale praetendere.* In der ersteren Aufgabe ist *constituere* offenbar das Euclidische συστήσασθαι (Elem. I, 42) und in der zweiten wird man in dem *praetendere* das Euclidische παραβάλειν (Elem. I, 44) zu suchen haben. Man könnte also vermuthen, in dem griechischen Originale, welches Boethius vorgelegen, habe παρατείνω als Synonymon die Stelle von παραβάλλω vertreten. Wenigstens wird das geographische παρατείνω (ἡ δέ γ' Εὔβοια ἡδὲ παρατέταται Arist. Nub. 212. τῇ μὲν γὰρ τῆς Ἀραβίης οὖρος παρατέταται Herodot. II, I) im Lateinischen durch *praetendere* ausgedrückt. *Baeticae latere septentrionali praetenditur Lusitania.* Plin. N. H. III, 1, 2. Die übliche Uebersetzung des mathematischen παραβάλλειν durch *applicare* scheint modernen Ursprungs zu sein.“

Im Uebrigen verweisen wir Jeden, dem es um Uebersetzung der platonischen Worte und um deren Verständniss zu thun ist, auf die Benecke'sche Abhandlung, welcher wir recht viele Leser wünschen, und desshalb den Kern der Untersuchung hier nicht weiter enthüllen wollten, als nöthig schien um zu dessen Genusse einzuladen. Cantor.

Der Magnet im Alterthum von Prof. Gust. Albert Palm. Programm des königlich württembergischen evangelisch-theologischen Seminars Maulbronn zum Schluss des vierjährigen Curses von 1863—1867. Stuttgart 1867.

Die an und für sich fleissig gearbeitete Abhandlung besteht aus 7 Kapiteln mit folgenden Ueberschriften: 1. Was wussten die Alten vom Magnet? 2. Wie erklärten die Alten das, was sie vom Magnet wussten? 3. Die Benennungen des Magnets. 4. Woher bezogen die Alten den Magnet? 5. Der medicinische und magische Gebrauch des Magnets. 6. Die bildliche Verwendung des Magnets bei den verschiedenen Schriftstellern. 7. Das frei schwebende Bild. Daran knüpfen sich 52 Belegstellen aus den lateinischen und griechischen Schriftstellern, der verschiedensten Zeitalter welche im Originaltexte mitgetheilt werden.

Diese letztere Beilage macht das Programm des Herrn Palm zu einer immerhin schätzbaren Sammlung, während die Mühe, welche der Verfasser auf die eigentliche Abhandlung verwandte, als eine leider müssige bezeichnet werden muss. Derselbe kannte offenbar nicht die *Observations et théories des Anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques et sur les attractions électriques* von Th. Henri Martin, welche bereits in den *Atti dell' Academia Pontificia de' nuovi Lincei* für die Sitzungen vom 3. December 1864 und 8. Januar 1865 abgedruckt sind. Diese Untersuchungen des gelehrten Decan der philosophischen Facultät von Rennes enthalten aber absolut Alles, was auch Herr Palm jetzt auffand, und noch Einiges mehr.

Cantor.

Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. Von Carl Neumann. Leipzig 1867.

Es wird wohl kaum nöthig sein an die Wichtigkeit und an die vielfachen Anwendungen der Functionen zu erinnern, welchen die vorliegende Schrift gewidmet ist. Jeder, der sich eingehender mit dem Probleme der mathematischen Physik, z. B. mit der Theorie der Bewegung der Wärme beschäftigt, kennt dieselben, und wird daher das schöne Werkchen von Neumann mit Freuden begrüssen. Wiewohl der Herr Verfasser in der Vorrede die Absicht einer umfassenden Darstellung der ganzen Theorie dieser merkwürdigen Functionen bescheiden ablehnt, so glauben wir doch, dass Demjenigen, welcher sich behufs der Anwendung mit den wichtigsten Eigenschaften der Bessel'schen Functionen vertraut machen will, durch das vorliegende Werk nützliche Dienste geleistet werden, da durch die äusserst klare und elegante, und wie uns bedünkt, für die meisten Zwecke auch hinlänglich ausführliche Darstellung der wichtigsten Sätze und Formeln ihm manches mühsame Nachschlagen und Suchen erspart wird. Es soll damit natürlich nicht gesagt sein, dass dadurch nun die Acten über die Theorie der Bessel'schen Functionen als geschlossen zu betrachten seien. Im Gegentheil sind wir der Mei-

nung, dass diese Functionen späteren Forschungen noch ein ergiebiges Feld bieten, welche, in gehöriger Weise verallgemeinert, zu wichtigen Aufschlüssen über allgemeine Eigenschaften gewisser partieller Differentialgleichungen führen können. Ein solcher Zusammenhang mit einer partiellen Differentialgleichung, die für die Physik von grossem Interesse ist, findet sich, wiewohl nur als nebensächlicher Zweck des Herrn Verfassers, in dem letzten Abschnitt des in Rede stehenden Werkes angedeutet, und dieser Zusammenhang führt zu der merkwürdigen Entwickelung der Function $Y^{(o)}$ für ein Argument, das die Entfernung zweier Punkte ausdrückt, nach den Bessel'schen Functionen. Die Hauptaufgabe des Verfassers, deren Lösung ihm in völlig befriedigender Weise gelingt, ist der allgemeine Nachweis der Entwickelbarkeit einer Function eines complexen Arguments nach den Bessel'schen Functionen, und die Feststellung der Grenzen der Gültigkeit dieser Entwickelung. Das Hülfsmittel, welches zu diesem Ziele führt, ist dasselbe, welches schon von Cauchy zur Begründung der Taylorschen Reihe für complexe Argumente angewandt wurde, und dessen sich der Herr Verfasser schon früher zur Begründung der Entwickelung nach den Kugelfunctionen bedient hat. Es ist die von Cauchy aufgestellte Formel:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-c},$$

indem die Integration sich über eine beliebige geschlossene Curve in der z-Ebene erstreckt, in deren Innerem die Function $f(z)$ einwerthig und stetig ist. Aus dieser Formel lässt sich nun immer eine Entwickelung der Function $f(c)$ ableiten, wenn man eine entsprechende Entwickelung von $\frac{1}{z-c}$ finden kann. Eine solche Entwickelung liefert, wenn es sich um das Taylor'sche Theorem handelt, der binomische Satz, bei der Entwickelung nach Kugelfunctionen das Theorem von Heine. Es ergibt sich dabei, dass die Coefficienten der Entwicklung von $\frac{1}{z-c}$ nach steigenden Potenzen von c die fallenden Potenzen von z, nach Kugelfunctionen der ersten Art für das Argument c die Kugelfunctionen der zweiten Art für das Argument z werden, und daraus entspringen Entwickelungen für solche Functionen, die in einem zwiefach zusammenhängenden Gebiet eindeutig und stetig sind, welche im ersten Fall nach steigenden und fallenden, im zweiten nach Kugelfunctionen der ersten und zweiten Art fortschreiten. Um dem entsprechend die Entwickelung nach Bessel'schen Functionen zu finden, kam es also vor Allem darauf an, die Function $\frac{1}{z-c}$ nach diesen Functionen zu entwickeln. Die Coefficienten dieser Entwickelung sind Functionen von c,

welche Herr Neumann Bessel'sche Functionen der zweiten Art nennt, und die er in mannigfacher Weise ausdrücken lehrt.

Es würde zu weit führen, wollten wir hier des Weiteren auf die Mittel eingehen, durch welche der Verfasser diese Resultate gewinnt, nur müssen wir anerkennend hervorheben, dass er uns den Weg zeigt, der mit Sicherheit, wenn auch nicht mit voller Strenge zu dem gewünschten Ziele führt, und sich nicht damit begnügt, mit dem fertigen Resultat und dem zugehörigen strengen Beweis, der übrigens in vollständig befriedigender Weise erbracht wird, uns vor Augen zu treten. Der erwähnte strenge Beweis beruht auf der wirklichen Summation der gefundenen Reihe und ist durch das dabei zur Anwendung gekommene Prinzip der Aufstellung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für die gesuchte Summe bemerkenswerth.

Ein anderer Theil der Untersuchung ist derjenigen Differentialgleichung zweiter Ordnung gewidmet, von welcher ein partikuläres Integral durch die Bessel'sche Function der ersten Art gegeben ist. Hier ist nicht etwa, wie bei den Kugelfunctionen, die Bessel'sche Function zweiter Art das andere partikuläre Integral, sondern dieses zweite partikuläre Integral wird durch eine dritte Function ausgedrückt, welche gleichfalls interessante Eigenschaften besitzt, die zum Theil denen der Bessel'schen Function erster Art analog sind. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen sind etwas weitläufig und dürften vielleicht in Zukunft einer einfacheren Darstellung fähig sein, was auch der Verfasser am Schluss des dritten Abschnittes anerkennt.

Hoffen wir, dass das verdienstvolle Werkchen, dessen Lektüre bei der bekannten klaren Darstellungsweise des Verfassers eher einer Unterhaltung, als einer Anstrengung gleicht, zur Weiterverbreitung der Kenntniss dieser so interessanten und merkwürdigen Functionen beitragen und zu weiteren Forschungen über dieselben führen möge.

Heidelberg, im Januar 1868. HEINRICH WEBER.

Zeitschrift für Bibliographie und Geschichte der Mathematik herausgegeben von B. BONCOMPAGNI in Rom.

Vor wenigen Wochen erhielten wir die nachfolgend abgedruckte Ankündigung einer neuen Monatsschrift:

Le recueil intitulé „*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*“ est un ouvrage périodique dont on publie chaque mois un cahier de trois feuilles au moins, et de cinq au plus. Ces cahiers se vendent à Rome dans l'imprimerie des sciences mathématiques et physiques (Via Lata, n^0. 211 A) au prix de 35 centimes la feuille. Les personnes qui voudront bien envoyer des écrits destinés à être publiés dans

ce recueil, sont priées de les remettre au bureau de la poste dans des plis adressés à D. B. Boncompagni à Rome. Ceux de ces écrits qui seront redigés en italien, en français ou en latin, seront publiés textuellement dans ce Bulletin.

Wir sind überaus begierig auf das Erscheinen dieser Zeitschrift selbst, für deren ausgezeichnete Leistungen der Name des Herausgebers schon im Voraus bürgt. Wir treten sicherlich keinem Gelehrten irgend eines Landes zu nahe, wenn wir die Behauptung aussprechen, dass Prinz Boncompagni dermalen an der Spitze derer steht, die sich gleichzeitig mit Geschichte und Bilbliographie der Mathematik beschäftigen. Sein Fleiss, seine sorgsame Mühe, sein kein Opfer an Geld und Zeit scheuender Eifer haben ihm diese Stellung angewiesen und befähigen ihn wie keinen Anderen zur Mittelperson europäischer Gelehrsamkeit. Wir wünschen daher dem neuen Unternehmen den ergiebigsten Erfolg und möchten unsere eigenen wissenschaftlichen Freunde hiermit öffentlich zur Unterstützung desselben auffordern. Wir fürchten dabei nicht mit unseren eigenen redactionellen Interessen in Widerstreit zu gerathen, da es selbstverständlich ist, dass ein und derselbe Beitrag sehr wohl gleichzeitig in deutscher Sprache in unserer Zeitschrift und in fremder Sprache im Bulletino Boncompagni erscheinen kann.

Cantor.

Bibliographie

vom 15. December 1867 bis 1. März 1868.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. 1867. 1. u. 2. Heft. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. 1867. Band II, Heft 3. München, Franz. 16 Ngr.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 13. Band aus den Jahren 1866 und 1867. Göttingen, Dieterich. 7 Thlr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-phys. Classe. 27. Band. 1867. Wien, Gerold. 12⅓ Thlr.

Journal für reine und angewandte Mathematik (begründet von Crelle) herausgegeben von C. W. Borchardt. 68. Band. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von C. Bruhns. 2. Jahrg., Heft 3 u. 4. Leipzig, Engelmann. à ⅓ Thlr.

Annalen der Königl. Sternwarte bei München, herausgegeben von J. v. Lamont. 15. Band. 1867. München, Franz. 1⅔ Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1870, mit Ephemeriden der Planeten (1)—(93) für 1868. Herausgegeben von W. Foerster. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie, redigirt von E. Heis. Neue Folge. 11. Jahrg. 1868. No. 1. Halle, Schmidt. pro compl. 3 Thlr.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II, Tome XXIII. Torino, Loescher.

Indice delle materie contenute nella parte I:

Plana, J., Mémoire sur la loi du refroidissement des corps sphériques etc.

Genocchi, A., Intorno alla formazione ed integrazione d'alcune equazioni differenziali nella teorica delle funzioni ellitiche.

Govi, G., Sulla misura della amplificazione degli strumenti ottici e sul uso di un megametro etc.

Reine Mathematik.

Pfeiffer, J., Die Elemente der algebraischen Analysis zunächst für seine Schüler zusammengestellt. Leipzig, Voss. 18 Ngr.

Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Göttingen, Dieterich. 24 Ngr.

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. 2. Abtheilung. Hannover, Rümpler. 2 Thlr.

Peterson, K., Ueber Curven und Flächen. 1. Lieferung. Leipzig, Wagner. 5/6 Thlr.

Riemann, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen, Dieterich. 12 Ngr.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Band, 1. Abtheilung. Ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 1/2 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Schell, O., Ueber die Bestimmung der Constanten des Polarplanimeters. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Fils, A., Barometer-Höhenmessungen im Herzogthum S. Gotha. 2. Aufl. Weissensee, Grossmann. 1/3 Thlr.

Astrand, J., Neue einfache Methode für Zeit- und Längenbestimmung. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

Oppolzer, Th., Die Constanten der Präcession nach Leverrier. (Akad.) Ebend. 3 Ngr.

Auwers, A., Bestimmung der Bahn des Cometen III, 1860. (Akad.) Berlin, Dümmler. 1/2 Thlr.

Auwers, C. F., Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen. 2. Theil. Bestimmung der Elemente der Siriusbahn. Leipzig, Engelmann. 2 2/3 Thlr.

Clausius, R., Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Ein Vortrag. Braunschweig, Vieweg. 4 Ngr.

Boltzmann, L., Ueber die Anzahl der Atome in den Gasmolekulen und die innere Arbeit in Gasen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Handl, A., Beiträge zur Molekulartheorie. I. (Akad.) Ebend. 2 Ngr.

Mohr, F., Die mechanische Theorie der chemischen Affinität und die neuere Chemie. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

Moigno, A., *Leçons de mécanique analytique, rédigées principalement d'après les méthodes de A. Cauchy. Vol. I. Statique.* Leipzig, Alphons Dürr. 3 1/3 Thlr.

Physik.

MACH, E., Zwei populäre Vorträge über Optik. Graz, Leuschner & Lubensky. 8 Ngr.

FRIESACH, K., Ueber den Einfluss des den Schall fortpflanzenden Mittels auf die Schwingungen eines tönenden Körpers. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

STEFAN, J., Ueber einen akustischen Interferenzapparat. (Akad.) Ebend. 1½ Ngr.

WEYR, E., Ein Beitrag zur Theorie transversal-magnetischer Flächen. (Akad.) Ebend. 3 Ngr.

JELINEK, C., Ueber die Reduction der Barometerstände bei Gefässbarometern mit veränderlichem Niveau. (Akad.) Ebend. 2 Ngr.

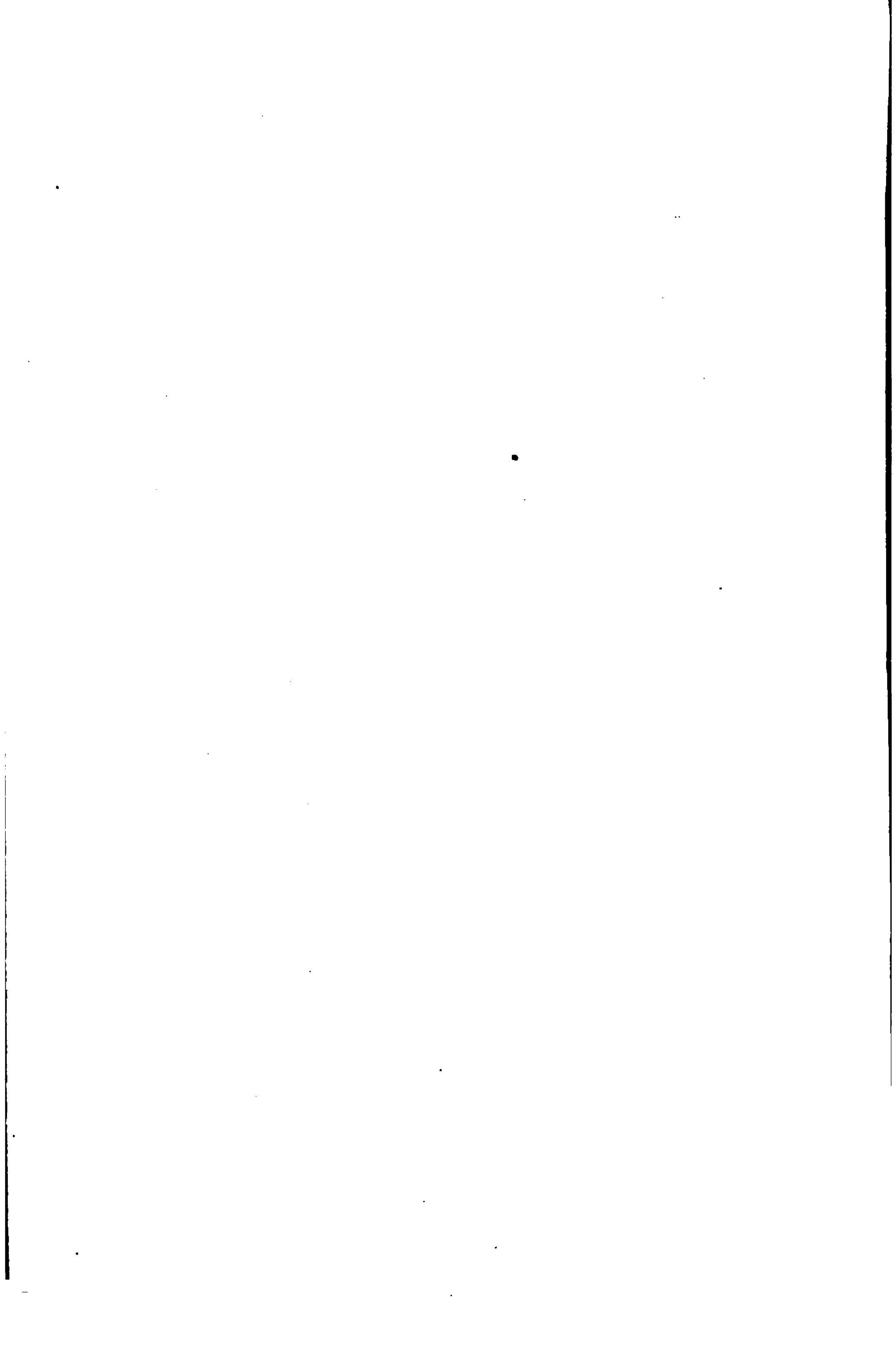
HANN, J., Ueber den Einfluss der Winde auf die mittleren Werthe der wichtigeren meteorologischen Elemente zu Wien. (Akad.) Ebend. 4 Ngr.

MEIBAUER, O., Der Novemberschwarm der Sternschnuppen. Berlin, Lüderitz. ⅓ Thlr.

SCHNEIDER, J., Fernere Nachrichten über die Fortschritte der Astrometeorologie. 3. Fortsetzung. Leipzig, List & Francke. 1¾ Thlr.

GUILLEMIN, A., *Les phénomènes de la physique. Ouvrage illustré.* Paris, Hachette & Co. 5⅓ Thlr.

RADAU, R., *L'acoustique ou les phénomènes du son.* Ebend. 2 Frcs.



Mittheilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

Auszug aus No. 1. 1868.

Notizen über künftig erscheinende Bücher.

Mathematik, Physik und technische Literatur.

Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement. Von C. Pluecker, Prof. an der Universität zu Bonn. 4.

Die analytische Geometrie der Ebene gründet sich auf die Betrachtung zweier veränderlichen Grössen, die, in der Ebene, zur Bestimmung eines Punktes oder einer geraden Linie nothwendig sind. Wenn wir uns zu den Betrachtungen im Raume erheben, erweitert sich der Gesichtspunkt dadurch, dass an die Stelle von zwei Veränderlichen drei treten, von denen die Bestimmung der Lage eines Punktes oder einer Ebene im Raum abhängig ist. Indem der Verfasser die gerade Linie als Raumelement einführt, treten vier Veränderliche auf, deren wir bedürfen, um eine gerade Linie im Raume, sei es, dass wir uns dieselbe als von einem Punkte beschrieben oder als von einer Ebene umhüllt denken zu bestimmen. Um diese neue Anschauungsweise fruchtbar zu machen, war es nothwendig, eine fünfte Veränderliche zur Bestimmung der geraden Linie einzuführen. Dadurch wird die analytische Darstellung einfach und symmetrisch und es eröffnet sich ein unermessliches Feld neuer Untersuchungen, die sich nicht auf Geometrie beschränken, sondern auch die Mechanik auf neue Principien zurückführen.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis; von Dr. O. Schloemilch, K. S. Hofrath und Prof. gr. 8.

Während einer zwanzigjährigen Lehrerthätigkeit hat der Verf. eine reiche Sammlung von neuen Aufgaben und Beispielen aus der höheren Analysis und deren Anwendungen auf die Geometrie zusammengebracht, deren Veröffentlichung er aus zwei Gründen unternimmt, einerseits weil eine möglichst grosse Auswahl von derartigen Uebungen immer wünschenswerth ist, hauptsächlich aber weil selbst die wenigen guten Bücher dieser Richtung sehr empfindliche Lücken zeigen. Das bekannte Werk von Sohncke z. B. enthält über unendliche Reihen weniger, als in jedem Lehrbuche zu finden ist, über Doppelintegrale ein einziges Beispiel, über dreifache Integrale sowie über die Integration der Differentialgleichungen gar nichts — d. h. es fehlen gerade diejenigen überaus wichtigen Partien, ohne welche man in der Mechanik, mathematischen Physik, physischen Astronomie etc. auch nicht einen Schritt thun kann. Ohne die elementaren Theile der höheren Analysis irgendwie zu vernachlässigen, wird das angekündigte Werk den genannten schwierigeren Partien besondere Aufmerksamkeit widmen und durch zahlreiche mit den nöthigen Erläuterungen versehene Beispiele das Studium derselben zu erleichtern versuchen.

Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen bearbeitet von Dr. WILH. SCHELL, Prof. am Polytechnicum zu Carlsruhe. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8.

Das unter der Presse befindliche Buch wird diejenigen Partien der Mechanik im Zusammenhange systematisch darstellen, welche eine rein theoretische Behandlung gestatten und welche die Basis für die physikalischen und technischen Wissenschaften bilden. Es soll die Grundlage für Vorträge über theoretische Mechanik an technischen Hochschulen bilden und insbesondere den Lehrgang im Grossen und Ganzen wiedergeben, den der Verfasser bei seinen eigenen Vorträgen am Polytechnikum zu Carlsruhe einzuhalten pflegt. Das Lehrziel desselben ist, nicht bloss eine Summe von Kenntnissen zu geben, deren der Techniker in seinem Berufe bedarf, sondern ihn auf eine gewisse Stufe mathematischer Bildung zu erheben, auf welcher er mit Leichtigkeit ein mechanisches Problem seines Faches in das Gewand der mathematischen Untersuchung einkleiden kann und die Mittel und Wege kenne, welche ihn zur Lösung desselben hinführen. Daneben soll das Buch allerdings auch ein Werk zum Nachschlagen sein und wird ein sorgfältiges Register den Handgebrauch desselben erleichtern.

Methode des Buches. Dasselbe benutzt durchweg die höhere Analysis und macht insbesondere einen ausgedehnten Gebrauch von der Methode des Unendlichkleinen, im strengen Sinne der heutigen Wissenschaft. Indessen ist dies nicht so zu nehmen, als ob dasselbe fortwährend an der Hand der Rechnung entwickele; vielmehr wird in vielen Partien desselben ein synthetischer Lehrgang gewählt und werden dessen Resultate rascher durch die Rechnung begründet. Der Zusammenhang der Mechanik mit den neueren Forschungen auf dem Gebiete der synthetischen und analytischen Geometrie wird vollständiger dargelegt werden, als es bisher in den Lehrbüchern der Mechanik geschehen ist, und wird der Verfasser nicht ermangeln, auch auf die allerneuesten Theorien des Imaginären und seiner Anwendung auf Mechanik die gebührende Rücksicht zu nehmen.

Systematischer Gang des Buches. Der erste Theil, die Geometrie der Bewegung, behandelt die Aequivalenz der Bewegungsart eines unveränderlichen Systems (Zusammensetzung und Zerlegung der Translationen und Rotationen um parallele Axen, um convergierende und gekreuzte Axen, die Schrankenbewegung etc., sowohl für endliche als unendlichkleine Amplituden; Anwendungen hiervon auf besondere Arten der Bewegung der Systeme; die relative Bewegung eines Punktes und des Systems, und entwickelt einige Gesichtspunkte für die Bewegung bestimmter Gattungen veränderlicher Systeme.

Der zweite Theil ist der Lehre von der Geschwindigkeit gewidmet; der dritte behandelt die Lehre von der Beschleunigung (in demselben werden die neueren Theorien über das Beschleunigungscentrum, Beschleunigungsaxen etc. Aufnahme finden); darin wird auch das Wesentliche über die Beschleunigungen höherer Ordnung entwickelt werden. Der vierte Theil behandelt die Ursachen der Beschleunigung oder die Kräfte. Die Theorie des Gleichgewichtes der Kräfte macht einen speziellen Abschnitt dieses Theiles aus.

Das Werk erscheint in Lieferungen zu 10 Bogen und wird im Laufe von 1¼ Jahr vollendet sein.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Von OTTO HESSE, Prof. an der Univ. zu Heidelberg. Zweite Aufl. gr. 8.

Nachdem das Buch schon seit einiger Zeit vollständig vergriffen ist, hat der hochverehrte Verfasser sich entschlossen, eine zweite Auflage zu bearbeiten. Dieselbe wird wesentlich vermehrt im Laufe des Sommers 1868 erscheinen.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Nouvelles tables d'intégrales définies, *par* D. Bierens de Haan. *Leide, P. Engels.* 1867.

Das vorliegende Werk bildet eine neue Auflage der im J. 1858 erschienenen *Tables d'intégrales définies* desselben Verfassers, die bereits seit einiger Zeit vergriffen waren. Wie sich erwarten liess, ist diese zweite Auflage eine vermehrte und verbesserte, vermehrt nämlich durch die während der Zwischenzeit bekannt gewordenen neuen Resultate, verbessert in so fern, als es dem Verf. durch Kürzung der früheren literarischen Angaben und durch Weglassung allzu bekannter Formeln gelungen ist, seinem Werke eine compendiösere Gestalt zu verleihen. Indem Ref. dem Fleisse und der Gelehrsamkeit des Verfassers von Neuem seine höchste Anerkennung zollt, wiederholt er gleichzeitig den schon früher ausgesprochenen Wunsch, dass es dem Verf. gefallen möge, eine ähnliche Sammlung doppelter und mehrfacher Integrale herauszugeben.

Schlömilch.

Theorie der elliptischen Functionen; Versuch einer elementaren Darstellung von Dr. H. Durège, ordentl. Prof. am Polytechnikum zu Prag. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1868.

Da es dem Verf. hauptsächlich um eine erste Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen zu thun ist, so hat derselbe in der zweiten Auflage die früher benutzten Methoden beibehalten, welche sich zwar nicht durch Strenge, wohl aber durch eine gewisse Leichtigkeit und Einfachheit empfehlen. Gegen diese didaktische Rücksicht lässt sich im vorliegenden Falle nichts einwenden, weil der Verf. seine Leser keineswegs mit der Miene verabschiedet, als ob nun die ganze Theorie vollständig und zweifellos begründet sei, sondern vielmehr den eigentlich dunkelen Punkt (die unendliche Vieldeutigkeit der Integrale zwischen complexen Grenzen) ausdrücklich hervorhebt und die Mittel zu dessen Aufklärung angiebt. Bei dem Additionstheoreme ist zweckmässigerweise die Sturm'sche Methode in den Vordergrund gestellt worden; neu hinzugekommen ist ein

lehrreicher Abschnitt über das Abel'sche Theorem. Und hiermit sei das sorgfältig gearbeitete und seinem Zwecke vollkommen entsprechende Werk von Neuem bestens empfohlen.

SCHLÖMILCH.

In den Berichten der mathem.-physischen Classe der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1865, findet sich eine historische Bemerkung des Herrn Baltzer, in welcher ich lese:

> „Was nun das Wort Million anlangt, so war ich verwundert, dasselbe beim Numeriren bis zum 18. Jahrh. hartnäckig vermieden zu sehen."

und ferner:

> „Die Million gehört also gewiss nicht Girard, vermuthlich auch nicht einem ältern Arithmetiker; erst im 18. Jahrh. hat Million als abstractes Zahlwort allgemeinern Eingang gefunden."

und endlich:

> „Man wird also Girard für den Autor dieser Bildungen*) halten dürfen, bis Citate aus früherer Zeit aufgefunden werden."

Zu diesen drei Aeusserungen habe ich Folgendes zu bemerken: Ob ich nun gleich mit Herrn Baltzer glaube, *il milione* sei eine italienische Bildung, meine ich doch, dass die Franzosen sie zuerst als reines Zahlwort gebraucht haben. In der *Arithmetique de Jean Trenchant, departie en trois liures. Ensemble un petit discours des changes, avec l'art de calculer aux Getons*, wovon der erste Druck im J. 1557, eine neue Auflage 1610 erschienen ist, findet sich Seite 11: *puis iusques à dix cens mile, qui sont un milion: puys iusques à dix cens millions, qui sont un miliart*, und Seite 13: *ainsi procedant de lieu en lieu, le precedent vers main gauche est tousiours decuple de son sequēt: comme enseigne l'echelle de numeration, sçavoir est. Nōbre, dizeine, centeine, miliers, dizeine de miliers, centeine de miliers, milions, dizeine de milions, centeine de milions, miliars, dizeine de miliars, centeine de miliars, miliers de miliars*; und Seite 15: *Soit pour exemple, 579. 837. 420, qui s'exprime 579 milions, 837 mille, 420. Parlant qui sçait nombrer trois figures, c'est depuis les cens, il nombrera facilement tous nombres.*

In *L'Arithmetique de Jaques Peletier du Mans. Departie en quatre liures. Troisieme edition reuend et augmentee. Par Jean de Tournes M. DC. VII* finde ich Seite 16: *La forme est telle, 123 451 234 678 567 Le premier poinct est sous 7, qui se prend en sa simple et naturelle valeur: le second est sous 8 et est le siege de mil: le tiers est sous 4, et est le siege de Millions: le quart est sous 1 qui est le siege de Mille Millions: et le dernier sous 3, qui est le siege de Milliars: c'est a dire millions de millions....... Et partant, la figure prochaine vers la senestre (qui est au second lieu apres le poinct des Milliars) signifie dixaines*

*) Bilion, Trilion, Quadrilion.

de Milliars et l'autre figure signifie centaines, aussi de Milliars. Hierdurch wird es deutlich, dass am Ende des 16. Jahrh. das Wort Million in Frankreich schon allgemein üblich gewesen; und dieser Gebrauch leuchtet noch heller hervor aus dem Satze des Pelletier, womit er die Anwendung des Wortes *Milliart* vertheidigt, Seite 19: *Je n'eusse point usurpé ce mot de Milliart, n'eust été l'autorité de Budé au Traicté de la Liure et de ses parties: et me fusse contenté de demeurer aux Millions;* wodurch er also aussagt, dass dies Wort schon allgemein bekannt war und also keiner Vertheidigung mehr bedurfte.

Im Jahre 1607 schlug Robbert Robbertz, ein Niederländischer Rechenmeister, öffentlich an, die Zahl
1 357 328 400 000 761 010 843 278 140 030 045 728 345 730 285 927 003 210
Holländisch auszusprechen. Er erhielt darüber folgenden Brief von Jacob van der Schuere, Rechenmeister zu Haarlem:

„Guter Freund Robbert Robbertz. Ihnen sei Seligkeit. Gestern am Mittage ist mir einer Ihrer gedruckten Zettel zugekommen mit der oben angegebenen Aufgabe, um diese Niederdeutsch auszusprechen, und wiewohl man solches früher niemals von mir verlangt hat, und ich auch niemals darüber gedacht habe [ob ich gleich ein echter Liebhaber der echten Niederdeutschen*) Sprache sei], so sah ich mich doch genöthigt, sie gut Niederdeutsch wiederzugeben, wie's hierunten folget. Ich hätte sie zwar mit tausendmal, tausendmal, tausendmal u. s. f. aussprechen können, aber das würde allen Niederdeutschen eine ganz zu finstre und schwindliche Sache gewesen sein.... Zu Haarlem in meiner Studirstube, als Phöbus fünfmal hinter Thetys mit ihrem Hunde versteckt gewesen, wieder der frohen Aurora folgend, uns das hellste Weltlicht angeboten hat mit einem hell leuchtenden Antlitze im Jahre 1607.

Ew. dienstfertiger Diener
J. van der Schuere."**)

Die Namen, welche er zum Benennen dieser Zahl einführt, sind:

---

*) Niederdeutsch sagte man damals für Niederländisch.

**) In der Originalsprache ist der Brief folgender:
Goeden Vriendt Robbert Robbertsz, ulieden zy saligheydt. Gesteren middagh is my behandight een uwer ghedruckte Briefkens, met de bovengestelde opgave, om in Nederduyts uyt gesproken te hebben; Ende haewel my 't selve noyt te voren af-geeyseht is geweest: Ick oock noyt sulex overdacht hebbe (niet legenstaende ick een recht bemmder der rechte Neder-Duytsche sprake ben), too ben ick noch tansghedrongen geweest, 't selve in goed Neder-Duyts te beantwoorden, als hier volghet. Ick sonde det wel met duysentmael duysentmael duysent, etc. uytghesproken hebben, maer dat sonde voor al temoel de Nederduytschen, een alte malle duyster duyselinghe gheweest zyn.... t' Haerlem in myn overdenckplaets, als Phoebus vyfmael achter Thetis met synen hond gescholen hebbende, wederomme de blyde Aurora volgende, ons is gekomen 't lichtste Wereldlicht voordragen met een klaerlachende aenschyn, in 't jaer 1607.

U. lieden dienst-willigen dienaer.

erstes Glied tausend, zweites Glied tausend, drittes Glied tausend*) u. s. f., wo wir Million, Billion, Trillion u. s. w. aussprechen. Die aufgegebene Zahl lautet dann: Ein neuntes Glied tausend, drei hundert sieben und funfzig tausend drei hundert acht und zwanzig achtes Glied tausend, vier hundert tausend siebentes Glied tausend u. s. f.

In einem zweiten Briefe, welchen er den 21. December 1608 an denselbigen Robbert Robbertsz richtete, sagt er u. m.: „Ich meine nicht, dass Gott mir eine neue Zahlenbenennung offenbart hat, sondern dass Er mir's im Sinn hat kommen lassen, die Fremdwörter zu verdeutschen wie folgt:

million	nenne ich	erstes	Glied	tausend
bimillion oder *billion*		zweites	„	„
trimillion oder *trillion*		drittes	„	„
quadrimillion oder *quadrillion*		viertes	„	„
quintimillion oder *quillion*		fünftes	„	„
seximillion oder *sexillion*		sechstes	„	„
septimillion oder *septillion*		siebentes	„	„
octomillion oder *octillion*		achtes	„	„
nonemillion oder *nonillion*		neuntes	„	„

und so weiter, wie gross eine Zahl auch sein möge."

In diesem Briefe spricht v. d. Schuere noch von den französischen Schriftstellern Jean Gentils, der 1554 in Paris, und Estienne de la Roche, der 1538 in Lyons Bücher herausgegeben hat, worin die Benennung der Zahlen ganz klar und deutlich wird angezeigt. — Diese Bücher sind mir weiter unbekannt; ich kann also keine Nachrichten geben, welcher Methode beim Aussprechen sie folgten.

Alle diese Schriftsteller sind älter als Girard, der seine Prolation erst im Jahre 1629 veröffentlichte. Wenn ich nun in Betrachtung nehme:

a) dass Girard seine erste Schrift im Jahre 1626 herausgab;
b) dass er immer französisch schrieb, oder in's Französische übersetzte;
c) dass er anfängt in den Niederlanden bekannt zu werden um die Zeit, als die Hugenotten in Frankreich durch Richelieu um alle ihre Vorrechte gebracht wurden;
d) dass er in seinen Schriften dann und wann seinen Hass wider einen gewissen Kardinal nicht verschweigen kann**);

dann schliesse ich daraus, dass Girard ein geborener Franzose ist, der wegen der Verfolgung in Frankreich nach den Niederlanden ausgewiesen ist und sich in Leyden hat niedergelassen. Aus seinem Vaterlande brachte er die Benennung grosser Zahlen mit nach Holland, wo sie jedoch aus französischen Büchern schon früher bekannt geworden und von einigen schon in Gebrauch gekommen waren. Wahrscheinlich hat er im Anfange

---

*) *Eerste lit duysent, tweede lit duysent, derde lit duysent, enz.*

**) S. u. m. auch: *Oeuvres math. par S. Marolais. Reueue par Albert Girard. 1628.*

die holländische Sprache nicht verstanden, und ist also fremd geblieben van der Schuere's Arbeit; er giebt in seiner Prolation die Methode, wie sie schon lange in Frankreich üblich war und sagt auch nirgendwo, dass es seine Methode sei; doch weil seine Werke, hauptsächlich seine Uebersetzung von Stevin, mehr verbreitet worden ist, als die Bücher anderer holländischer und französischer Rechenmeister, hat man ihm eine Ehre zuerkannt, die er, welch ein grosser Mathematiker er auch gewesen, sich doch hiermit nicht verdient hat.

Aardenburg, 10. Febr. 1868. G. A. Vorsterman van Oyen,
Lehrer der Math. und Phys.

Bibliographie

vom 1. März bis 15. Juni 1868.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 1868. No. 1. Berlin, Dümmler. pro compl. 2 Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. 1867, Band II, Heft 4 und 1868, Band I, Heft 1. München, Franz. à 16 Ngr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1867. Bern, Huber & Comp. 1½ Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgeg. von J. A. Grunert. 48. Theil. 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Reine Mathematik.

Durège, H., Theorie der elliptischen Functionen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 3 Thlr.

Schlömilch, O., Handbuch der algebraischen Analysis. 4. Aufl. Jena, Frommann. 2⅔ Thlr.

Sohncke, L., Ueber den Zusammenhang hypergeometrischer Reihen mit höheren Differentialquotienten und vielfachen Integralen. Berlin, Calvary. 12 Ngr.

Pranghofer, J., Beiträge zu einer Abel'schen Gleichung und zu einem Satze von Parseval. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Clasen, B., Lehrbuch der elementaren Algebra. Luxemburg, Bück. 12 Ngr.

Bremiker, C., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Decimalstellen. Neue Stereotypausgabe. 1. Lief. Berlin, Nicolai. 12½ Ngr.

Vega, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 51. Aufl. Berlin, Weidmann. 1¼ Thlr.

Burbach, O., Grundriss der Planimetrie. Weimar, Böhlau. ⅓ Thlr.

Feld, A., und W. Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Cöln, Schmitz. 12 Ngr.

Spitz, C., Lehrbuch der Stereometrie. 3. Aufl. Leipzig, Winter. 24 Ngr.

Reidt, F., Die Elemente der Mathematik. 3. Theil: Stereometrie. 4. Theil: Trigonometrie. Berlin, Grote'sche Verlagsh. à ⅓ Thlr.

Schell, A., Geometrischer Beweis des Lehmann'schen Satzes über die Lage des Standortes in Bezug auf das Fehlerdreieck. (Akad.) Wien, Gerold. 5 Ngr.

Exner, K., Ueber die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen Curven von Radien durchschnitten werden. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Kiessling, H., *Huyghens de circuli magnitudine inventa;* ein Beitrag zur Lehre vom Kreise. Flensburg, Herzbruch. 16 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Mühll, K. v., Ueber ein Problem der Kartenprojection. Leipzig, Hinrichs. ⅓ Thlr.

Peschka, G., und E. Koutny, Freie Perspektive in ihrer Begründung und Anwendung. Hannover, Rümpler. 3⅓ Thlr.

Reitz, F. H., Theorie des Amsler'schen Planimeters. Hamburg, Grüning. 6 Ngr.

Höltschl, J., Das Pothenot'sche Problem in theoretischer und praktischer Beziehung; nebst einem kurzen Anhang über das Hansen'sche Problem. Weimar, B. Fr. Voigt. ¾ Thlr.

Frischauf, J., Theorie der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nebst deren Bahnbestimmung in elementarer Darstellung. Graz, Leuschner & Lubensky. 16 Ngr.

Spoerer, Beobachtungen von Sonnenflecken. No. III. Anclam, Dietze. ⅓ Thlr.

Kepleri, J., *Opera omnia, ed. Ch. Frisch.* Vol. VII. Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 5 Thlr.

Physik und Meteorologie.

Emsmann, A. H., Physikalisches Handwörterbuch für Jedermann. 2 Bde. 2. Aufl. Leipzig, O. Wigand. 5⅓ Thlr.

Frick, J., Anfangsgründe der Naturlehre. 6. Aufl. Freiburg i. Br., Wagner. 27 Ngr.

Greiss, C. B., Lehrbuch der Physik für Realschulen und Gymnasien. 2. Aufl. Wiesbaden, Kreidel. 1½ Thlr.

Fortschritte der Physik im J. 1865. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin, G. Reimer. 2⅙ Thlr.

Wachsmuth, A., Ueber die Ströme in Nebenschliessungen zusammengesetzter Ketten. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Magener, A., Das Klima von Posen. Resultate der meteorologischen Beobachtungen zu Posen von 1848 bis 1865. Posen, Lissner. 1⅓ Thlr.

Bruhns, C., Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen im Königr. Sachsen. 1866. Leipzig, Günther. 2⅓ Thlr.

Dove, H. W., Der Schweizer Föhn. Nachtrag zu „Eiszeit, Föhn und Scirocco". Berlin, D. Reimer. 6 Ngr.

Wild, H., Ueber Föhn und Eiszeit. Rectoratsrede. Bern, Jent & Reinert. 8 Ngr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1867.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. *Note sur une transformation géométrique.* *Cayley.* *Crelle LXVII*, 95. [Vergl. Bd. XII, Nro. 186]
2. *On tangential coordinates.* *Routh.* *Quart. Journ. math. VIII*, 111.
3. *Some formulae in trilinear coordinates.* *Walker.* *Quart. Journ. math. VIII*, 154.
4. Die Gleichungen der regulären Vielecke und Zerlegung derselben in Gleichungen niederer Grade. Schoenborn. Grun. Archiv XLVI, 425.
5. *On the geometry of the triangle.* *Griffiths.* *Quart. Journ. math. VIII*, 50.
6. Ueber das aus den Medianen eines gegebenen Dreiecks gebildete Dreieck. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 340.
7. *Investigation of the envelope of the straight line joining the feet of the perpendiculars let fall on the sides of a triangle from any position in the circumference of the circumscribed circle.* *Frerrers.* *Quart. Journ. math. VIII*, 209.

Vergl. Bipolarcoordinaten. Brennpunkte. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Kreisliniencoordinaten. Lemniscaten. Normalen. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

8. Analytisch-geometrische Entwicklungen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XII, 123. [Vergl. Bd. X, Nro. 259.]
9. Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Klasse. O. Hermes. Crelle LXVII, 153.
10. Untersuchungen über Strahlenquadrupel. Hermes. Crelle LXVII, 279.
11. *Sur certains paradoxes géométriques, qui s'expliquent par le dédoublement des équations données.* *Mathieu.* *N. ann. math. XXVI*, 177.
12. *On an integral expressing the range of conditioned variables.* *Monro.* *Quart. Journ. math. VIII*, 278.
13. Ueber die Curve, welche aus einem Ringe mit kreisförmigem Querschnitte durch eine Doppeltangentialebene ausgeschnitten wird. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XII, 183.
14. *Sections planes de la surface de révolution engendrée par une ellipse de Cassini tournant autour de son axe non-focal.* *Arm. Levy.* *N. ann. math. XXVI*, 73.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung. Ellipsoid. Geodätische Linien. Normalen 134. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Approximation.

15. *Calcul approximatif de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre avec* m *chiffres exacts.* *Ruchonnet.* *N. ann math. XXVI*, 84.

Vergl. Kettenbrüche 109.

Astronomie.

16. *On the lunar theory.* *Walton.* *Quart. Journ. math. VIII*, 297.

Attraktion.

17. *On an elementary proposition in attractions.* Routh. *Quart. Journ. VIII,* 320.
Vergl. Potential.

B.

Bessel'sche Funktionen.

18. Ueber die Entwicklung beliebig gegebener Funktionen nach Bessel'schen Funktionen. Neumann. Crelle LXVII, 310.

Bestimmte Integrale.

19. *A demonstration of Fourier's theorem.* Walton. *Quart. Journ. math. VIII,* 136.
20. Ueber einige Sätze aus der Theorie der θ-Funktionen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XII, 79.
21. Ueber die Entwickelbarkeit des Quotienten zweier bestimmten Integrale. Schlaefli. Crelle LXVII, 183.
22. *On the expansibility of a multiple integral.* Schlaefli. *Quart. Journ. math. VIII,* 370.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 12. Bessel'sche Funktionen. Gammafunktionen. Kettenbrüche 110. Ultraelliptische Transcendenten.

Bipolarcoordinaten.

23. Gleichung der magnetischen Curven. Zech. Zeitschr. Math. Phys. XII, 277.

Biquadratische Formen.

24. Zur Theorie der binären Formen vierten Grades. Clebsch. Crelle LXVII, 371.

Brennpunkte.

25. *On the formulae which connect the foci of a conic subject to three conditions.* Burnside. *Quart. Journ. math. VIII,* 31.

C.

Combinatorik.

26. *On partition and sums of powers of numbers.* Scott. *Quart. Journ. math. VIII,* 21. [Vergl. Bd. XI, Nro. 243.]
27. *On the problem of the fifteen schoolgirls.* Power. *Quart. Journ. math. VIII,* 263.
28. *Du chemin minimum d'un sommet d'un carré au sommet opposé par lignes brisées.* Gayon. *N. ann. math. XXVI,* 182.
29. *On nasik cubes.* Frost. *Quart. Journ. math. VIII,* 74.
Vergl. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Cubatur.

30. *Sur les secteurs terminés d'une part par une surface conique et de l'autre par une surface quelconque.* Kretkowski. *N. ann. math. XXVI,* 227.

Cubische Formen.

31. Ueber simultane binäre cubische Formen. Clebsch. Crelle LXVII, 360.

D.

Determinanten.

32. Darstellung symmetrischer Funktionen durch die Potenzsummen. H. Hankel. Crelle LXVII, 90.
33. *Sull' uso dei determinanti per rappresentare la somma delle potenze intere dei numeri naturali.* Siacci. *Annali mat. VII,* 19.
34. *Notes on determinants.* Horner. *Quart. Journ. VIII,* 157.
Vergl. Elimination. Invarianten.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

35. *Analytical metrics.* Clifford. *Quart. Journ. math. VIII,* 16, 119. [Vergl. Bd. XI, Nro. 250.]
36. *A consequence of Abr. Cayley's theory of skew determinants concerning the displacement of a rigid system of an even number of dimensions about a fixed origin.* Schlaefli. *Quart. Journ. math. VIII,* 167.
37. Ueber die Steiner'sche Fläche. Clebsch. Crelle LXVII, 1.

38. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Lüroth. Crelle LXVII, 130.
39. Ueber einige Identitäten. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XII, 89.
Vergl. Sphärik 173.

Differentialgleichungen.

40. Ueber die Bedingungen der Integrabilität einiger Differentialgleichungen. Letnikow. Zeitschr. Math. Phys. XII, 223.
41. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Dienger. Grun. Archiv XLVI, 34.
42. *On linear differential equations with particular integrals all of the same form.* Steen. *Quart. Journ. math. VIII*, 228.
43. *On linear differential equations of the third order.* Cockle. *Quart. Journ. math. VIII*, 373. [Vergl. Bd. XI, Nr. 258.]
44. Zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung mittelst Aufsteigen zu höherer (zweiter) Ordnung. Dienger. Grun. Archiv XLVI, 317.
45. Integration der Differentialgleichung $x\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \varkappa \left(x\frac{dy}{dx} + \mu y\right)$, in welcher λ, $\varkappa$ und μ constante Zahlen bezeichnen. S. Spitzer. Grun. Archiv XLVI, 25.
46. *Sur les équations simultanées homogènes.* Catalan. *Annali mat. VII*, 66. — Tortolini *ibid.* 70.
47. *Solution of a partial differential equation.* Schlaefli. *Quart. Journ. math. VIII*, 252.
Vergl. Funktionen 57.

Differentialquotient.

48. *On interpolation with reference to development and differentiation.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. VIII*, 52, 139. [Vergl. Bd. XI, Nro. 259.]

Drehungsmittelpunkt.

49. *Sulle proprietà geometriche e dinamiche de' centri di percossa ne moti di rotazione.* Chelini. *Annali mat. VII*, 217.

E.

Elimination.

50. *Solution of a problem of elimination.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 183.

Ellipse.

51. *Construction des axes d'une ellipse donnée par deux diamètres conjugués.* Trouillet. *N. ann. math. XXVI*, 181.
Vergl. Quadratur 163.

Ellipsoid.

52. Construction der Intensitätslinien eines dreiaxigen Ellipsoids mit Benutzung einer Kugelscala. Koutny. Grun. Archiv XLVI, 49.
53. Eine stereometrische Schulaufgabe, welche zu einer leichten Inhaltsbestimmung eines Ellipsoides führt. Martus. Grun. Archiv XLVI, 419.

F.

Faktorenfolge.

54. Ueber die Entwicklung des Produktes $\overset{n}{\Pi}(x) = 1(1+x)(1+2x)\dots(1+(n-1)x)$. Schlaefli. Crelle LXVII, 179.

Funktionen.

55. *Trouver la forme générale d'une fonction telle que* $\varphi(x+y).\varphi(x-y) = [\varphi(x)+\varphi(y)].[\varphi(x)-\varphi(y)]$. Roux. *N. ann. math. XXVI*, 74.
56. *Sur les fonctions périodiques.* Laurent. *N. ann. math. XXVI*, 267.
57. Beweis der Formel $e^{xi} = \cos x + i.\sin x$. K. L. Bauer. Grun. Archiv XLVI, 355.
58. Zerlegung des Productes von 4 Monomen ersten Grades in die algebraische Summe von 8 vierten Potenzen von Quatrinomen ersten Grades. Tardy. Grun. Archiv XLVI, 324.

Vergl. Bessel'sche Funktionen. Determinanten. Faktorenfolge. **Gammafunktionen.** Homogene Funktionen. Invarianten. Kettenbrüche. **Kugelfunktionen.** Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunktionen.

59. Ueber die Gammafunktionen $\Gamma\left(\frac{1}{z}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{z}\right) \ldots$, $\Gamma\left(\frac{z-1}{z}\right)$ und einen dieselben betreffenden Satz von Legendre. Stern. Crelle LXVII, 114.

Geodätische Linien.

60. *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche venguno rappresentate da linee rette.* Beltrami. *Annali mat. VII*, 185.

Geometrie (descriptive).

61. Perspectivische Darstellung der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen. Koutny. Zeitschr. Math. Phys. XII, 195.
Vergl. Ellipsoid 52.

Geometrie (höhere).

62. *Démonstration des relations plückeriennes.* Zeuthen. *N. ann. math. XXVI*, 200.
63. *Sull' inversione quadrica delle curve piane.* Hirst. *Annali mat. VII*, 49.
64. *Sur la diminution de la classe d'une courbe.* Painvin. *N. ann. math. XXVI*, 113.
65. *Mouvement d'une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée.* Durand. *N. ann. math. XXVI*, 80.
66. *Sur les courbes du troisième ordre.* Sartiaux. *N. ann. math. XXVI*, 68.
67. Ueber die 9 Schnittpunkte zweier Curven dritten Grades. Geiser. Crelle LXVII, 78.
68. *Sur les dépendances mutuelles des tangentes doubles des courbes du quatrième degré.* Steiner. *N. ann. math. XXVI*, 241.
Vergl. Kettenbrüche 107. Kreis 115.

Geschichte der Mathematik.

69. *Le Messâhat de Mohammed ben Moussa al Khârezmi.* Aristide Marre. *Annali mat. VII*, 269.
70. Abraham Judäus-Savasorda und Ibn Esra. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. XII, 1.
71. *Sur Petrus Adsigerius et les plus anciennes observations de la déclinaison de l'aiguille aimantée.* Wenckebach. *Annali mat. VII*, 159.
72. *Notice biographique sur Edmond Bour † 8 Mars 1866. N. ann. math. XXVI*, 145.
73. Nekrolog von G. K. C. von Staudt † 1. Juni 1867. Borchardt. Crelle LXVII, 217.

Gleichungen.

74. *Démonstration d'un théorème de M. Sylvester comprenant la règle de Newton sur le nombre des racines imaginaires.* Genocchi. *N. ann. math. XXVI*, 5.
75. *Théorèmes généraux sur les équations algébriques.* Poulain. *N. ann. math. XXVI*, 21. — Maffiotti *ibid.* 76, 78. [Vergl. Bd. XII, Nro. 283.]
76. Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Faktoren. Bretschneider. Grun. Archiv XLVI, 422.
77. *Etant donnée une équation réciproque* $f(x) = 0$ *quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en* y *obtinue en posant* $x + \frac{1}{x} = y$ *soit elle-même reciproque?* Giard. *N. ann. math. XXVI*, 126.
78. Kennzeichen ob eine Gleichung dem numerischen Werthe nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln besitze. Franz Müller. Grun. Archiv XLVI, 32.
79. *Limites des racines d'une équation de degré pair, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.* Laisant. *N. ann. math. XXVI*, 34.
80. *Limites des racines d'une équation de degré impair, dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.* Laisant. *N. ann. math. XXVI*, 35.
81. *Risoluzione di un problema relativo all' equazioni di terzo grado.* Tortolini. *Annali mat. VII*, 297.

82. *Sur le cas irréductible de l'équation du troisième degré.* Hermann. *N. ann. math. XXVI*, 270.
83. *Recherches sur les équations du cinquième degré.* M. Roberts. *Annali mat. VII*, 257.
84. *Valeur de coefficient de la première puissance de l'inconnue dans une équation du cinquième degré exprimée par les racines de l'équation.* Gayou. *N. ann. math. XXVI*, 37.
85. *Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables.* S. Roberts. *Crelle LXVII*, 266. [Vergl. Bd. XII, Nro. 242.]

H.

Homogene Funktionen.

86. Ueber einen besonderen Fall der orthogonalen Substitutionen. Stern. Crelle LXVII, 293.
Vergl. Biquadratische Formen. Cubische Formen. Determinanten. Invarianten.

Homographie.

87. *Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide.* Picart. *N. ann. math. XXVI*, 158.

Hydrodynamik.

88. *Sur l'équilibre des fluides.* Moutier. *N. ann. math. XXVI*, 216.
89. *On metacentre in a liquid of variable density.* Besant. *Quart. Journ. math. VIII*, 75.

Hyperbel.

90. Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel. Thiel. Grun. Archiv XLVI, 45.
91. Ueber einen Satz von der Hyperbel. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 337.
92. *Enveloppe des polaires de tous les points d'une parabole par rapport à un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole.* Nouaux. *N. ann. math. XXVI*, 38. — De Grossouvre *ibid.* 40.
Vergl. Normalen 133.

Hypergeometrische Reihe.

Vergl. Kettenbrüche 108.

I.

Imaginäres.

Vergl. Funktionen 57. Gleichungen 74, 75.

Invarianten.

93. *Degli invarianti e covariante delle forme binarie ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado.* Siacci. *Annali mat. VII*, 70.

K.

Kegelschnitte.

94. *On the foci, axes and asymptotes of conics referred to trilinear coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. VIII*, 348.
95. *Demonstration de quelques théorèmes par la transformation polaire.* Picquet. *N. ann. math. XXVI*, 89.
96. *Theorems relating to the group of conics passing through four given points.* Ferrers. *Quart. Journ. math. VIII*, 259.
97. *On the conics which pass through two given points and touch two given lines.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 211.
98. *Theorem relating to the four conics which touch the same two lines and pass through the same four points.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 162.
99. *On the conics which touch three given lines and pass through a given point.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*. 220.
100. *On some special forms of conics.* Taylor. *Quart. Journ. math. VIII*, 126, 343.
101. *On some special forms of conics.* Salmon. *Quart. Journ. math. VIII*, 235.
102. Bemerkung hinsichtlich der Priorität einiger Sätze über confocale Kegelschnitte. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XII, 276.

103. *On a locus in relation to the triangle.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 261.
104. *Lieu géométrique engendré au moyen de deux coniques homofocales.* Bertrand. *N. ann. math. XXVI*, 278.
105. *On a locus derived from two conics.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 77.
106. Elementar-geometrischer Beweis des Satzes: die Kegelschnitte werden von den in den Kegel gelegten Kugeln in ihren Brennpunkten berührt. Fresenius. Grun. Archiv XLVI, 321.
Vergl. Brennpunkte. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Normalen. Parabel.

Kettenbrüche.

107. Geometrische Deutung der Kettenbrüche. Lieblein. Zeitschr. Math. Phys. XII, 185.
108. Ueber die Kettenbruchentwicklung des Gauss'schen Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$. Thomé. Crelle LXVII, 299.
109. Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[n]{}$ in einen Kettenbruch. Seeling. Grun. Archiv XLVI, 80.
110. Ueber den Kettenbruch, in welchen sich $\int_\alpha^\beta f(z) \frac{dz}{x-z}$ verwandeln lässt. Heine. Crelle LXVII, 315.

Kreis.

111. *Theorem concerning six points on a circle.* Griffiths. *Quart. Journ. math. VIII*, 341.
112. *On the nine-point circle.* Griffiths. *Quart. Journ. math. VIII*, 15.
113. *Geometrical theorems concerning circles.* Walker. *Quart. Journ. math. VIII*, 47.
114. *Théorème ayant lieu lors de la transformation de deux cercles en deux autres par rayons vecteurs réciproques.* Vaison. *N. ann. math. XXVI*, 184.
115. *Investigations in connexion with Casey's equation of a pair of circles touching each of three given circles.* Cayley. *Quart. Journ. math. VIII*, 334.
Vergl. Rectification 166.

Kreislinien-Coordinaten.

116. Grundzüge eines Kreislinien-Coordinaten-Systems. Gyurkovich. Zeitschr. Math. Phys. XII, 265. [Vergl. Bd. XII, Nro. 302.)

Kreistheilung.

Vergl. Zahlentheorie 191.

Krümmung.

117. *On formulae of curvature in terms of trilinear coordinates.* Walton. *Quart. Journ. math. VIII*, 39.
118. *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa polaire réciproque.* Chemin. *N. ann. math. XXVI*, 49. [Vergl. Bd. XII, Nro. 49.]
119. *Sur les centres de courbure de deux courbes se déduisant géométriquement l'une de l'autre.* Lemaitre. *N. ann. math. XXVI*, 283.
Vergl. Oberflächen 139, 140.

Kugelfunktionen.

120. Kurzer Abriss einer Theorie der Kugelfunktionen und Ultrakugelfunktionen. Neumann. Zeitschr. Math. Phys. XII, 97.

L.

Lemniscate.

121. Ueber lemniscatische Coordinaten. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XII, 45.
Vergl. Mechanik 130.

M.

Maxima und Minima.

122. Elementarer Beweis des Satzes, dass das Minimum der Ablenkung beim Prisma eintritt, wenn Eintritts- und Austrittswinkel des Lichtstrahles gleich gross sind. Kahl. Zeitschr. Math. Phys. XII, 176.
Vergl. Combinatorik 28. Oberfläche 135.

Mechanik.

123. Neue analytische Entwicklung der allgemeinsten Gesetze der Statik. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 152.
124. Der Mittelpunkt oder das Centrum beliebig vieler auf beliebige Weise in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 276.
125. *On the equilibrium of a spherical envelope. Maxwell. Quart. Journ. math. VIII,* 325.
126. *On tension. Besant. Quart. Journ. math. VIII,* 35.
127. *On the composition of infinitesimal rotations. Cayley. Quart. Journ. math. VIII,* 7.
128. Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers. Zajackowski. Grun. Archiv XLVI, 19.
129. Wurfbewegung im widerstehenden Mittel und Construction der Flugbahn. Nell. Grun. Archiv XLVI, 361.
130. *Moto di un punto materiale lungo un arco della lemniscata Bernoulliana. Azzarelli. Annali mat. VII,* 284.
131. *Mouvements relatifs à la surface de la terre. Page. N. ann. math. XXVI,* 97.
Vergl. Attraktion. Drehungsmittelpunkt. Hydrodynamik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

132. Ueber den mittleren Fehler der Resultate aus trigonometrischen Messungen. Boersch. Grun. Archiv XLVI, 40.

N.

Normalen.

133. *Normales communes à une parabole et à une hyperbole équilatère données. Choron. N. ann. math. XXVI,* 252. — *Gérono ibid.* 258.
134. *On normals to conics and quadrics. Purser. Quart. Journ. math. VIII,* 66.

O.

Oberflächen.

135. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. Christoffel. Crelle LXVII, 218.
136. *Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe. Beltrami. Annali mat. VII,* 139.
137. *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie applicabili. Ulisse Dini. Annali mat. VII,* 25. [Vergl. Bd. XI, Nro. 158.]
138. *Sulla flessione delle superficie rigate. Beltrami. Annali mat. VII,* 105.
139. *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante. Ulise Dini. Annali mat. VII,* 5.
140. *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell' altro. Ulisse Dini. Annali mat. VII,* 205.
141. Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades. H. Schwarz. Crelle LXVII, 23.
Vergl. Cubatur. Determinanten in geometrischer Anwendung 37, 38. Geometrie (descriptive). Quadratur 164. Variationsrechnung.

Oberflächen 2ter Ordnung.

142. *Sur les surfaces gauches du second degré. Durrande. N. ann. math. XXVI,* 168, 207.
143. *On a theorem in quadrics. Purser. Quart. Journ. math. VIII,* 149.

144. *On the number of surfaces of the second degree which can be described to satisfy nine conditions.* Salmon. *Quart. Journ. math. VIII*, 1.
145. *Sur les tétraèdres conjugués à une surface du second ordre.* Maffiotti. *N. ann. math. XXVI*, 219.
146. *On a property of the director spheres of a system of quadrics touching a common system of planes.* Townsend. *Quart. Journ. math. VIII*, 10.
Vergl. Ellipsoid. Normalen 134.

Operationscalcül.

147. *On certain transformations in the calculus of operations.* Walton. *Quart. Journ. math. VIII*, 222.
148. *On the sums of the reciprocals, of their products and powers.* Worontzof. *Quart. Journ. math. VIII*, 185, 310.
149. *On the properties of the Δ^m o^n class of numbers and others analogous to them as investigated by means of representative notation.* Blissard. *Quart. Journ. math. VIII*, 85.

Optik.

150. Theorie des Anorthoskops und der anorthoskopischen Figuren. Fr. Weber. Zeitschr. Math. Phys. XII, 133.
Vergl. Maxima und Minima.

P.

Parabel.

151. *Inscrire dans une parabole un triangle dont un sommet soit donné, et qui soit semblable à un triangle donné.* Laisant. *N. ann. math. XXVI*, 124.
152. *Sur le roulement d'une parabole sur une autre.* Lemaitre. *N. ann. math. XXVI*, 136.
Vergl. Hyperbel 92. Normalen 133.

Planimetrie.

153. *Critical examination of Euclid's first principled compared to those of modern geometry, ancient and modern analysis.* Wolff. *Quart. Journ. math. VIII*, 301. [Vergl. Bd. XI, Nro. 371.]
154. Zur geometrischen Construction der vierten und der mittleren Proportionale. Weihrauch. Grun. Archiv XLVI, 336.
155. Auf das Entfernungsorts-Dreieck Bezügliches. Emsmann. Grun. Archiv XLVI, 121.
156. Zur Construction von Dreiecken mit Benutzung der Eigenthümlichkeiten des Entfernungsortsdreiecks. Emsmann. Grun. Archiv XLVI, 147.
157. Ueber das Verhältniss in welchem sich drei durch einen Punkt gehende Transversalen eines Dreiecks schneiden. v. Behr. Grun. Archiv XLVI, 331.
158. Die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke, die ein vollständiges Viereck darbietet, liegen in einer geraden Linie. C. Schmidt. Grun. Archiv XLVI, 328. — v. Behr ibid. 330. — Stammer ibid. 331.
159. *Tout quadrilatère dans les diagonales sont entre elles comme les sommes des produits des côtés, qui comprennent ces diagonales, est inscriptible.* D'Amoux & Caffarelli. *N. ann. math. XXVI*, 186.
160. Ueber das vierte Porisma von Fermat. Ofterdinger. Grun. Archiv XLVI, 1. — Nagel ibid. 11.
Vergl. Zahlentheorie 190.

Potential.

161. *Sull' attrazione di un cilindro omogeneo retto elissoidale.* Riemann. *Annali mat. VII*, 281.
Vergl. Attraktion.

Q.

Quadratur.

162. Ueber die Berechnung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren durch Trapeze. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 335.
163. Lösung zweier Aufgaben über Berechnung der Flächeninhalte verschiedentlich bestimmter Ellipsen. Matzka. Grun. Archiv XLVI, 300.
164. *Sulla quadratura di alcune superficie risultanti dalla intersezione di cilindri.* Lanciani. *Annali mat VII*, 169.

R.

Rectification.

165. *Sugli archi di cicloide.* Tortolini. *Annali mat. VII*, 211.
166. Zur elementaren Berechnung des Kreisumfangs. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 345.

Reihen.

167. *Sur une règle de convergence des séries.* Genocchi. *N. ann. math. XXVI*, 261.
168. Summirung einer nach Cosinussen vom Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe. Curtze. Grun. Archiv XLVI, 357.
169. *Sum of a series of particular form.* Ellis. *Quart. Journ. math. VIII*, 256.
170. Summirung der Quadrate von aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 327.
171. Ueber die Summe von Kubikzahlen, deren Wurzeln in arithmetischer Progression stehen. Grunert. Grun. Archiv XLVI, 326.

Vergl. Kettenbrüche 108.

S.

Schwerpunkt.

172. Ueber den Krümmungsschwerpunkt algebraischer Curven. Neumann. Zeitschr. Math. Phys. XII, 172.

Sphärik.

173. Ueber die Auflösung des sphärischen Dreiecks, wenn die drei Höhen desselben gegeben sind. Hunyady. Zeitschr. Math. Phys. XII, 91. [Vergl. Bd. XII, Nro. 145.]
174. *On the spherical ellipse referred to trilinear coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. VIII*, 283.

Vergl. Mechanik 125.

Stereometrie.

175. Ueber die regelmässigen Sternvielflache. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XII, 174.

Vergl. Ellipsoid 53. Kegelschnitte 106.

T.

Tetraeder.

176. Die Transversalen des Tetraeders und Sätze über die Transversalen im Viereck. Stammer. Grun. Archiv XLVI, 333.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 145.

Trigonometrie.

177. Goniometrischer Beweis einiger Gleichungen zwischen den Sinussen und Cosinussen gewisser Winkel. Thiel. Grun. Archiv XLVI, 134.
178. Beweis der Gleichung $16 \sin 20^0 . \sin 40^0 . \sin 60^0 . \sin 80^0 = 3$. Lindman. Grun. Archiv XLVI, 143. — Meyer ibid. 359.
179. *A new construction for the difference of two angles of a plane triangle.* Walker. *Quart. Journ math. VIII*, 323.
180. *Propriété du quadrilatère circonscriptible a deux cercles.* Dostor. *N. ann. math. XXVI*, 57.
181. Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier im Raume gelegener nicht paralleler Geraden. Bretschneider. Grun. Archiv XLVI, 501.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

182. Ueber die Transformation des zweiten Grades für die Abel'schen Funktionen erster Ordnung. Königsberger. Crelle LXVII, 58.
183. Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der Abel'schen Funktionen erster Ordnung. Königsberger. Crelle LXVII, 97.

V.

Variationsrechnung.

184. Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene. H. Weber. Crelle LXVII, 229.

W.

Wärmelehre.

185. Ueber das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ gegen Prof. Clausius. Bauschinger. Zeitschr. Math. Phys. XII, 180. [Vergl. Bd. XII, Nro. 388.]

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

186. Ueber das *Rouge et noir* und den Vortheil der Bank bei diesem Spiele. Oettinger. Crelle LXVII, 327.

Z.

Zahlentheorie.

187. *Intorno ad alcune somme di cubi.* Genocchi. *Annali mat. VII,* 151.
188. Summe von Kubikzahlen. Catalan. Zeitschr. Math. Phys. XII, 170. — *N. ann. math. XXVI*, 63, 276.
189. Zur Theorie der complexen Zahlen. Bachmann. Crelle LXVII, 200.
190. Dreiecke, in welchen a, b, c, r, ϱ und F rationale Zahlen sind. Ligowski. Grun. Archiv XLVI, 503. [Vergl. Bd. XII, Nro. 398.]
191. Ueber die Funktionen Y und Z, welche der Gleichung $\frac{4(x^p-1)}{x-1} = Y^2 \mp pZ^2$ Genüge leisten, wo p eine Primzahl der Form $4k \pm 1$ ist. v. Staudt. Crelle LXVII, 205.

Zinseszinsrechnung.

192. Ueber ein Problem der Forstwissenschaft. Clebsch. Crelle LXVII, 248.

Zur Abwehr.

Herr Prof. Bettrami hat bei Gelegenheit einer dem *Reale Istituto Lombardo* am 7. Mai d. J. gemachten Mittheilung über Raumcurven 3. O. an meiner im verflossenen Jahre in dieser Zeitschrift und zugleich als Separatabdruck veröffentlichten „Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte" verschiedene Fehler und Ungenauigkeiten gerügt und dieselbe als ein Plagiat aus Cremona's Arbeiten hingestellt. Um diese Beschuldigung zurückzuweisen, wird es, wie ich glaube, genügen, folgende im Eingang meiner Arbeit, worin die von mir benutzten Quellen, insbesondere auch die Abhandlungen Cremona's in den *Annali* genau angegeben sind, befindliche Worte anzuführen:

> „Mit Rücksicht darauf, dass einerseits synthetische Betrachtungen nicht Jedermann angenehm sind und anderseits die analytische Behandlung Cremona's ausserhalb seines Vaterlandes weniger bekannt sein mag, dürfte vielleicht nachfolgende Zusammenstellung der hauptsächlichsten Eigenthümlichkeiten der Raumcurven 3. O. nicht unerwünscht sein",

woraus doch deutlich hervorgeht, dass ich meine Arbeit nur als eine zusammenhängende Darstellung von schon Bekanntem in zum bequemen Studium geordneter Weise angesehen wissen wollte. Ob ich mich durch eine derartige Benutzung von fremden Arbeiten eines Plagiats schuldig gemacht habe, überlasse ich dem Urtheile des mathematischen Publikums.

Was die von Herrn Bettrami bemerkten Fehler betrifft, so bin ich Demselben für ihren Nachweis sehr zu Dank verpflichtet und werde die Verbesserungen derselben demnächst zugleich mit einem genauen Quellen- und Literaturnachweis, um allen Missdeutungen zu entgehen, veröffentlichen.

Marburg am 9. Juni 1868. C. A. von Drach.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Principien der Elektrodynamik. Eine mathematische Untersuchung von Dr. CARL NEUMANN. *Tubingae mense Julio anni* 1868, *formis Henrici Laupp.* (39 S.)

Prof. Neumann theilt in dieser zur fünfzigjährigen Jubelfeier der Bonner Universität verfassten Gratulationsschrift Näheres über seine in den Göttinger Nachrichten vom 16. Juni d. J. angekündigte Entdeckung eines Gesetzes mit, welches für die Mechanik und Physik von ausserordentlicher Wichtigkeit zu werden verspricht. Bei dem hohen Interesse des behandelten Gegenstandes möge es dem Referenten vergönnt sein, in den nachstehenden Zeilen die vollständige Ableitung des Weber'schen Grundgesetzes der Elektrodynamik aus den Neumann'schen Principien folgen zu lassen. Zur Vermeidung von Missverständnissen sei hier ausdrücklich bemerkt, dass es für den vorliegenden Zweck weniger darauf ankam, die Darstellung des Verfassers im Einzelnen zu reproduciren, als die Anwendung seiner Methode auf den einfachsten Fall zweier materiellen Punkte ausführlich darzulegen.

1.

Vermöge des Newton'schen Gravitationsgesetzes entsteht durch die gegenseitige Einwirkung zweier Punkte mit den Massen m und m_1, deren Coordinaten resp. $x\ y\ z$ und $x_1\ y_1\ z_1$ heissen mögen, eine bewegende Kraft

$$R = \frac{m m_1}{r^2},$$

welche auf beide Massen in der Richtung der Verbindungslinie r wirkt. Die Componenten der nach den rechtwinkligen Coordinaten zerlegten Kraft in Bezug auf m sind hiernach

$$R \cos\alpha,\ R \cos\beta,\ R \cos\gamma,$$

während für m_1 die entgegengesetzt gerichteten Componenten

$$-R \cos\alpha,\ -R \cos\beta,\ -R \cos\gamma$$

gelten. Bekanntlich hat man für Attractionskräfte

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y_1 - y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z}{r},$$

weil α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die Richtung von m nach m_1 mit den Coordinatenaxen bildet. Die sechs Differentialgleichungen der Bewegung werden somit

$$A)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=R\dfrac{x_1-x}{r}, & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=R\dfrac{y_1-y}{r}, \quad m\dfrac{d^2z}{dt^2}=R\dfrac{z_1-z}{r}, \\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=R\dfrac{x-x_1}{r}, & m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=R\dfrac{y-y_1}{r}, \quad m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=R\dfrac{z-z_1}{r}. \end{cases}$$

Es ist eine alte Bemerkung, dass die Ausdrücke der sechs Componenten auf der rechten Seite dieser Gleichungen durch partielle Differentiation der sogenannten Kräftefunction

$$U=\frac{m\,m_1}{r}.$$

nach den einzelnen Coordinaten erhalten werden können, wie vermöge der Gleichung

$$r\,r=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

sofort erhellt. Mithin nehmen die Gleichungen $A)$ die Gestalt an

$$B)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial x}, & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial y}, \quad m\dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial z}, \\ m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial y_1}, \quad m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=\dfrac{\partial U}{\partial z_1}, \end{cases}$$

eine Form, welche sich jederzeit herbeiführen lässt, sobald das sogenannte Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft Geltung hat.

Schreibt man zur Abkürzung

$$T=\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m\,v\,v,$$

wo

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

die Geschwindigkeit des Punktes m ausdrückt und die Summation auf die vorhandenen Massenpunkte zu erstrecken ist, so ist das genannte Princip in der Gleichung

$$T-U=h$$

enthalten. T führt den Namen der halben lebendigen Kraft und h bedeutet eine willkürliche Integrationsconstante.

Multiplicirt man nämlich die obigen Differentialgleichungen der Reihe nach durch

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt},\quad \frac{dx_1}{dt},\quad \frac{dy_1}{dt},\quad \frac{dz_1}{dt}$$

und addirt die Producte, so ergibt sich

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)=\frac{dU}{dt}$$

und durch Integration

$$\Sigma\,\tfrac{1}{2}\,m\,v\,v=U+Const.$$

2.

Sir W. R. Hamilton hat im Jahre 1834 die weitere Bemerkung hinzugefügt, dass die Differentialgleichungen B) die Bedingung dafür enthalten, dass die Variation des Integrals

$$u = \int (T + U)\, dt$$

verschwindet; dass man also umgekehrt aus der Gleichung

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0$$

die mechanischen Differentialgleichungen abzuleiten im Stande ist. Vorausgesetzt wird dabei, dass man nur solche Variationen der Coordinaten berücksichtigt, welche nebst ihren verschiedenen Differentialquotienten an den Integrationsgrenzen verschwinden. Auf die Bedeutung dieser Voraussetzung braucht man zunächst nicht weiter einzugehen, da sie, wie aus dem Folgenden erhellt, nur einen formalen Sinn hat. Es sollen einfach bei Bildung der Variation des Integrals diejenigen Glieder, die mit den an den Grenzen stattfindenden Werthen der Variationen und ihrer Differentialquotienten multiplicirt sind, ausser Rechnung bleiben. Neumann bezeichnet desshalb die Grösse δu als innere Variation.

Die Variation eines Integrals von der Form

$$u = \int F(x x' x'' \,..\, y y' y'' \,..\, z z' z'' \,..)\, dt,$$

wo zur Abkürzung $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$ etc. geschrieben ist, drückt die Aenderung aus, welche das Integral erfährt, wenn man die von t abhängigen Variabeln x um δx, y um δy, z um δz, folglich x' um $\delta x'$ $\left(\text{d. h. } \frac{dx}{dt} \text{ um } \frac{d\delta x}{dt}\right)$ u. s. w. wachsen lässt. Hier bedeuten die Incremente δx, δy, δz ganz beliebige Functionen der unabhängigen Integrationsvariabeln t und führen den Namen von Variationen, sofern sie als beliebig klein betrachtet werden, damit die höheren Potenzen in der Taylorschen Entwickelung ohne Einfluss bleiben. Man pflegt daher eine solche variirte Function $\xi = x + \delta x = \varphi t$ eine Nachbarfunction der Function $x = ft$ zu nennen, und kann dieselben unter dem Bilde zweier Nachbarcurven sich vorstellen, bei denen den Abcissen t die resp. Ordinaten ξ und x, deren Differenz δx jeden Grad der Kleinheit erreichen darf, zugehören. Das Verschwinden der Ordinatendifferenzen δx an den Integrationsgrenzen würde alsdann anzeigen, dass die Nachbarcurven sich in den Punkten schneiden (oder berühren) müssen, welche die Grenzwerthe von t zu Abscissen haben.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze folgt mit Weglassung der höheren Potenzen der Variationen

$$\delta u = \int \Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' \ldots \right) dt,$$

wo sich das Summationszeichen auf die verschiedenen Variationen oder Coordinaten bezieht. Man erhält leicht durch partielle Integration

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{d\delta x}{dt} dt = \frac{\partial F}{\partial x'} \delta x - \int \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} dt.$$

Da aber in Gemässheit der oben gemachten Voraussetzung δx an den Integrationsgrenzen verschwindet, so wird

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' \, dt = -\int \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{dx'} dt.$$

In derselben Weise folgt durch wiederholte partielle Integration

$$\int \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' \, dt = \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x' - \int \delta x' \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x''} dt$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x' - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x + \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} dt,$$

wo wiederum die vor das Integralzeichen getretenen in δx und $\delta x'$ multiplicirten Glieder verschwinden. Folglich ist

$$\int \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' \, dt = +\int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} dt,$$

und weiter

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'''} \delta x''' \, dt = -\int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} dt,$$

allgemein:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \delta x^{(n)} \, dt = (-1)^n \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} dt.$$

Hiernach ergibt sich

$$\delta u = \int \Sigma \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \pm \dots \right\} \delta x \, dt.$$

3.

Wenn der gefundene Integralausdruck für ganz beliebige Nachbarcurven (beliebiger Abhängigkeit der Variationen δx, δy, δz von t entsprechend) verschwinden soll, so müssen die Coefficienten der einzelnen Variationen unter dem Integralzeichen Null werden; mit anderen Worten, es müssen die Differentialgleichungen

$$C) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \pm \dots \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial y''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial y'''} \pm \dots \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial z'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial z''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial z'''} \pm \dots \end{aligned} \right.$$

erfüllt sein. Denn wären ein oder einige solche Coefficienten von Null verschieden, also der Coefficient von δx etwa gleich ψt, so könnte man z. B. $\delta x = \varepsilon \psi t$, $\delta y = \delta z = 0$ setzen und würde damit

$$\delta u = \varepsilon \int \psi \psi \, dt$$

erhalten, d. i. wegen des positiven Quadrates jedenfalls gegen die Voraussetzung von Null verschieden. Der von t unabhängige Factor ε ist hinzugefügt worden, um durch beliebige Kleinheit desselben die hinreichende Abnahme der Variation δx herbeizuführen.

Die Gleichungen C) führen den Namen der isoperimetrischen Differentialgleichungen und besitzen die Eigenschaft, ganz abgesehen von der speciellen Beschaffenheit der Function F eine Integration zuzulassen. Bildet man nämlich die Summe

$$S = \Sigma x' \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} \mp \ldots \right\}$$

und vergleicht damit den Werth des vollständigen Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x} + x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + x''' \frac{\partial F}{\partial x''} \ldots \right\},$$

so wird

$$\frac{dF}{dt} - S = \Sigma \left\{ \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} \right) + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x^{\text{IV}} \frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x'''} - x'' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\}.$$

Da aber S vermöge der isoperimetrischen Differentialgleichungen verschwindet, so erhält man die zugehörige Integralgleichung

$$F + Const = \Phi,$$

wenn

$$\Phi = \Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x'''} - x'' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\} \qquad D)$$

gesetzt wird.

Es ist nunmehr leicht, die Bedingung $\delta u = 0$ für $u = \int (T + U)\, dt$ auf das Stattfinden der mechanischen Differentialgleichungen zu reduciren. Man hat dazu in C) statt F nur $T + U$ zu substituiren. Da aber T nur die ersten Differentialquotienten der Coordinaten, die Kräftefunction U dagegen als Function von r nur die Coordinaten selbst (ohne deren Differentialquotienten) enthält, so folgt ohne Weiteres

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'}$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} m x' = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und analog für die übrigen Coordinaten.

Da in unserem die Anziehung zweier Punkte betreffenden Falle $U=\frac{m m_1}{r}$, so erhält man, wie bereits bemerkt,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{m m_1}{r^2}\frac{x-x_1}{r}=R\cos\alpha,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{m m_1}{r^2}\frac{y-y_1}{r}=R\cos\beta,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{m m_1}{r^2}\frac{z-z_1}{r}=R\cos\gamma,$$

mithin die dem Newton'schen Attractionsgesetze entsprechende Kraft

$$E)\qquad R=\frac{m m_1}{r^2}=-\frac{dU}{dr},$$

welche auf den Punkt $m=(x, y, z)$ in der durch die Winkel α, β, γ gegebenen Richtung wirkt. Aus den Gleichungen

$$\cos\alpha=\frac{x_1-x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y_1-y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z_1-z}{r}$$

folgt, dass diese Richtung in der Verbindungslinie r durch die Anziehung nach m_1 bestimmt ist.

Das allgemeine Integral $\Phi=F+h$ geht jetzt über in

$$T+U+h=\Sigma x'\frac{\partial T}{\partial x'}=2T$$

oder

$$T=U+h$$

und liefert demnach den Satz von der lebendigen Kraft.

4.

Prof. Neumann hat sich die Frage gestellt, welche Form der Kräftefunction U gegeben werden müsse, um auf dem nämlichen Wege, der uns jetzt von der Kräftefunction U zu der Newton'schen Kraft R geführt hat, aus dem in der Gleichung $\delta\int(T+U)\,dt=0$ enthaltenen Hamilton'schen Principe das Weber'sche Fundamentalgesetz der Elektrodynamik, mit anderen Worten, den Ausdruck

$$F)\qquad R=\frac{m m_1}{r^2}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\}$$

für die in der Verbindungslinie der beiden materiellen Punkte m und m_1 wirkende Kraft abzuleiten.

Das von ihm entdeckte Gesetz ertheilt folgende Antwort auf die gestellte Frage: „Wenn r_0 den Abstand der Punkte zur Zeit t_0 bezeichnet, die der Zeit t jedesmal um dasjenige Zeitintervall $t-t_0$ vorhergeht, „welches erforderlich ist, um die Entfernung $r=ft$ mit einer durch die „Constante c gegebenen Geschwindigkeit zurückzulegen, so ist

$$U=\frac{m m_1}{r_0}$$

„der gesuchte Werth der Kräftefunction."

Wir werden zunächst wiederum die Variation des Integrals $u = \int (T + U)\,dt$ zu bilden haben. Der Ausdruck der halben lebendigen Kraft T bleibt derselbe wie früher, nur abhängig von den ersten Differentialquotienten der Coordinaten; dagegen enthält U, wenigstens implicite, jetzt gleichzeitig die Coordinaten und ihre verschiedenen Differentialquotienten. Um diess anschaulich zu machen, bilden wir die Gleichung

$$r = ft = c\,(t - t_0), \qquad G)$$

welche der Definition gemäss angiebt, dass die Strecke r im Zeitintervall $t - t_0$ mit der Geschwindigkeit c durchlaufen wird. Durch diese Gleichung ist

$$t_0 = t - \frac{r}{c}$$

als Function von t bestimmt, und da

$$r_0 = ft_0$$

den Abstand zur Zeit t_0 ausdrücken soll, so erhält man nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$\begin{aligned} r_0 &= f\left(t - \frac{r}{c}\right) = ft - \frac{r}{c} f't + \frac{r^2}{2c^2} f''t - \frac{r^3}{6c^3} f'''t \pm \dots \\ &= r - \frac{rr'}{c} + \frac{r^2 r''}{2c^2} - \frac{r^3 r'''}{6c^3} \pm \dots, \end{aligned} \qquad H)$$

wenn die Differentialquotienten von $r = ft$ nach dem Argument t wie die derivirten Functionen durch Accente bezeichnet werden. Man kann also U als Function von r und seinen Differentialquotienten betrachten, worin implicite wiederum die Coordinaten und ihre Differentialquotienten enthalten sind.

Ebenso wird

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt_0} &= f't_0 = f'\left(t - \frac{r}{c}\right) = f't - \frac{r}{c} f''t + \frac{r^2}{2c^2} f'''t - \frac{r^3}{6c^3} f^{IV}t \pm \dots \\ &= r' - \frac{rr''}{c} + \frac{r^2 r'''}{2c^2} - \frac{r^3 r^{IV}}{6c^3} \pm \dots \end{aligned} \qquad I)$$

Bildet man jetzt

$$\delta u = \int \left(\frac{\partial U}{\partial r} \delta r + \frac{\partial U}{\partial r'} \delta r' + \frac{\partial U}{\partial r''} \delta r'' \dots + \Sigma \frac{\partial T}{\partial x'} \delta x' \right) dt$$

und reducirt wie früher durch partielle Integration, so wird bei Bildung der inneren Variation, da die Variation

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial x} \delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \delta y + \frac{\partial r}{\partial z} \delta z + \frac{\partial r}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} \delta z_1$$

so wie ihre Differentialquotienten, mit den Variationen der Coordinaten und deren Differentialquotienten an den Integrationsgrenzen verschwinden oder Null zu setzen sind:

$$\delta u = \int \left\{ \delta r \left[\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial U}{\partial r'''} \dots \right] - \Sigma\, \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} \right\} dt.$$

Substituirt man hier den eben angeführten Werth von δr, um nach den Variationen der Coordinaten ordnen zu können, so wird

$$\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial r'}+\left(\frac{d}{dt}\right)^2\frac{\partial U}{\partial r''}\mp\cdots\right]-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'}$$

der Coefficient von δx, und analog für die übrigen Coordinaten. Da diese Coefficienten verschwinden sollen, so erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'}=\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial r'}\right)+\left(\frac{d}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial r''}\right)\mp\cdots\right],$$

d. i. wegen

$$\frac{\partial U}{\partial r_0}=-\frac{mm_1}{r_0^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mm_1\frac{x-x_1}{r}\left[\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial r'}\right)+\left(\frac{d}{dt}\right)^2\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial r''}\right)\mp\cdots\right].$$

Durch Substitution der aus den Gleichungen H) und I) zu entnehmenden Werthe von

$$\frac{\partial r_0}{\partial r}=1-\frac{r'}{c}+\frac{rr''}{c^2}-\frac{r^2r'''}{2c^3}+\frac{r^3r^{IV}}{6c^4}+\cdots=1-\frac{1}{c}\frac{dr_0}{dt_0},$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial r'}=-\frac{r}{c},\quad \frac{\partial r_0}{\partial r''}=\frac{r^2}{2c^2},\quad \frac{\partial r_0}{\partial r'''}=-\frac{r^3}{6c^3},$$

u. s. w. ergibt sich

$$K)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=mm_1\frac{x_1-x}{r}\left\{\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{r}{r_0^2}+\frac{1}{2c^2}\left(\frac{d}{dt}\right)^2\frac{r^2}{r_0^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6c^3}\left(\frac{d}{dt}\right)^3\frac{r^3}{r_0^2}+\cdots-\frac{1}{cr_0^2}\frac{dr_0}{dt_0}\right\}.$$

5.

Die unendliche Reihe innerhalb der Parenthese lässt sich summiren, wenn man den Lagrange'schen Satz über die Entwickelung impliciter Functionen anwendet.

Um diess zu zeigen, wollen wir der Gleichung

$$G)\qquad r=ft=c\,(t-t_0)$$

eine analoge Gleichung

$$G^*)\qquad r_1=ft_1=c\,(t_1-t)$$

an die Seite stellen und dadurch die Zeit t_1 definiren, welcher der Abstand r_1 der beiden Massen entspricht. Es bedeutet hier t_1-t das Zeitintervall, welches seit der Zeit t verfliessen muss, um die Strecke r_1 mit der Geschwindigkeit c zu durchlaufen. Das nämliche Functionsverhältniss, welches früher zwischen t und t_0 festgesetzt worden ist, findet jetzt resp. zwischen t_1 und t statt.

Der Lagrange'sche Lehrsatz liefert unmittelbar die Entwickelung einer Function

$$\varphi t_1=\varphi t+x\,ft\,\varphi' t+\frac{1}{2}x^2\frac{d}{dt}(f^2t\,\varphi' t)+\frac{1}{3!}x^3\left(\frac{d}{dt}\right)^2(f^3t\,\varphi' t)+\text{etc.}$$

nach den Potenzen von x, wenn

$$t_1 = t + x f t_1$$

gegeben ist. Setzt man hier $x = \frac{1}{c}$, so wird

$$\varphi t_1 = \varphi t + \frac{1}{c} r \varphi' t + \frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} (r^2 \varphi' t) + \frac{1}{6c^3} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 (r^3 \varphi' t) + \text{etc.} \qquad L)$$

Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung nach t, so ergibt sich

$$\varphi' t_1 \frac{dt_1}{dt} = \varphi' t + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (r \varphi' t) + \frac{1}{2c^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 (r^2 \varphi' t) + \\ + \frac{1}{6c^3} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 (r^3 \varphi' t) + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit der zu summirenden Reihe überein, wenn

$$\varphi' t = \frac{1}{r_0^2}$$

gesetzt wird. Da gleichzeitig t in t_1 und t_0 in t übergehen, so folgt ohne Weiteres

$$\varphi' t_1 = \frac{1}{r^2},$$

mithin

$$\frac{1}{r^2} \frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{r}{r_0^2} + \frac{1}{2c^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{1}{6c^3} \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{r^3}{r_0^2} + \ldots$$

Bevor wir diesen Werth in K) substituiren, wollen wir den Differentialquotienten $\frac{dt_1}{dt}$ eliminiren, was mittelst der durch Differentiation von G^*) zu erhaltenden Relation

$$f' t_1 = \frac{dr_1}{dt_1} = c\left(1 - \frac{dt}{dt_1}\right)$$

oder

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \frac{dr_1}{dt_1}}$$

geschieht. Damit erhält man endlich

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m m_1 \frac{x_1 - x}{r} \left[\frac{1}{r^2 \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dr_1}{dt_1}\right)} - \frac{1}{c r_0^2} \frac{dr_0}{dt_0} \right].$$

Die Ausdrücke für die den übrigen Coordinaten entsprechenden Componenten werden ganz analog gebildet, und führen wegen $\frac{x_1 - x}{r} = \cos \alpha$ etc. zu dem gesuchten Ausdrucke für die in der Richtung der Verbindungslinie r zur Zeit t zwischen den Massenpunkten m und m_1 wirkenden bewegenden Kraft

$$R = \frac{m m_1}{r^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{c} \frac{dr_1}{dt_1}} - \frac{r^2}{c r_0^2} \frac{dr_0}{dt_0} \right]. \qquad M)$$

Es handelt sich nur noch um den Nachweis, dass dieser Werth, wenigstens in den ersten Gliedern bei der Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von c, mit der Formel des Weber'schen Grundgesetzes übereinstimmt. Hierzu hat man sich der bereits früher benutzten Gleichungen

$$r_0 = f t_0 = r - \frac{r r'}{c} \pm \text{etc.}$$

und

$$\frac{d r_0}{d t_0} = f' t_0 = r' - \frac{r r''}{c} \pm \text{etc.},$$

so wie des aus der Lagrange'schen Entwickelung L) für $\varphi t = f' t$ hervorgehenden Werthes

$$\frac{d r_1}{d t_1} = f' t_1 = f' t + \frac{1}{c} r f'' t + \ldots = r' + \frac{r r''}{c} + \ldots$$

zu bedienen. Man erhält ohne Schwierigkeit, wenn man die durch c^3 und die höheren Potenzen dividirten Glieder weglässt:

$$R = \frac{m m_1}{r^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{r'}{c} - \frac{r r''}{c^2} \ldots} - \frac{r' - \frac{r r''}{c} \ldots}{c\left(1 - \frac{r'}{c} \ldots\right)^2} \right\}$$

$$= \frac{m m_1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{r' r' - 2 r r''}{c c} \right\},$$

übereinstimmend mit der von W. Weber entdeckten Formel F) des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes.

6.

Um endlich die Gestalt zu untersuchen, in welcher der Satz von der lebendigen Kraft nunmehr erscheint, haben wir die Function

$$\Phi = \Sigma x' \frac{\partial T}{\partial x'} + \Sigma \left\{ x' \frac{\partial U}{\partial x'} + \left(x'' \frac{\partial U}{\partial x''} - x' \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x''' \frac{\partial U}{\partial x'''} - x'' \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial x'''} \right) + \ldots \right\}$$

zu bilden. Hier ist vor Allem zu bemerken, dass die beiden Summen auf der rechten Seite, die sich auf die 6 Coordinaten der beiden Punkte erstrecken, vereinfacht werden können. Die auf die homogene Function T der Differentialquotienten der Coordinaten bezügliche Summe ist vermöge eines bekannten Satzes gleich $2T$, während die von der Kräftefunction U abhängige Summe sich auf die Form

$$N) \quad V = r' \frac{\partial U}{\partial r'} + \left(r'' \frac{\partial U}{\partial r''} - r' \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r''} \right) +$$
$$+ \left(r''' \frac{\partial U}{\partial r'''} - r'' \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r'''} + r' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r'''} \right) + \ldots$$

bringen lässt.

Hiermit erhält man

$$\Phi = 2T + V = T + U + h$$

oder

$$T = U - V + h \qquad O)$$

für das an Stelle des Satzes von der lebendigen Kraft tretende Integral. Differentiirt man diesen Ausdruck, so wird

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{dV}{dt},$$

wo zugleich

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma m (x' x'' + y' y'' + z' z'') = \Sigma x' \frac{x_1 - x}{r} R$$

$$= -R \frac{dr}{dt}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass die in der Richtung der Entfernung wirkende bewegende Kraft

$$R = \frac{dW}{dt} : \frac{dr}{dt} = \frac{dW}{dr} \qquad P)$$

durch vollständige Differentiation der Function

$$W = V - U$$

nach der Entfernung erhalten werden kann.

Da ferner

$$\frac{dU}{dt} = r' \frac{\partial U}{\partial r} + r'' \frac{\partial U}{\partial r'} + r''' \frac{\partial U}{\partial r''} + \ldots$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(r'' \frac{\partial U}{\partial r'} + r' \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r'}\right) + \left(r''' \frac{\partial U}{\partial r''} - r' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r''}\right) +$$

$$+ \left(r^{\text{iv}} \frac{\partial U}{\partial r'''} + r' \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial U}{\partial r'''}\right) + \text{etc.},$$

so folgt

$$\frac{dW}{dt} = r' \left[\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial r'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial U}{\partial r'''} \pm \ldots\right] = R \frac{dr}{dt},$$

woraus die Richtigkeit des für V aufgestellten Werthes erhellt. Uebrigens kann man der Function W auch die Form geben

$$W = -\frac{m m_1}{r} \left\{ 1 - \frac{r' r'}{cc} - \frac{2 r'^3}{c^3} - \frac{18 r'^4 + 2 r r'^2 r'' - r^2 r''^2 + 2 r^2 r' r'''}{6 c^4} \ldots \right\}. \qquad Q)$$

Leipzig, 11. August 1868.

W. Scheibner.

— —

Schularithmetik, bearbeitet von A. TRAPPE, Professor und Prorector der Realschule am Zwinger in Breslau. Verlag der Universitätsbuchhandlung von F. Hirt in Breslau.

Referent würde das vorliegende Werkchen einfach ignorirt haben, wenn der Verfasser durch sein brauchbares, bereits in dritter Auflage erschienenes Lehrbuch der Physik nicht so bekannt wäre, dass wohl Mancher darauf hin auch die „Schularithmetik“ unbesehen kaufen dürfte. Leider stehen aber beide Bücher auf sehr verschiedenen Standpunkten, und während „die Physik“ des Verfassers den Entdeckungen der Neuzeit Rechnung trägt, macht die „Schularithmetik“ den Eindruck, als wäre sie der unveränderte Abdruck eines Werkes aus dem vorigen Jahrhundert. Zum Beweise mögen einige Proben folgen:

Auf Seite 79 behauptet der Verfasser, die Gleichung

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots \mathit{in\ inf.} = \frac{a}{1-e}$$

sei für jedes e richtig — er wendet sie auf die Fälle $a=3$, $e=\frac{1}{2}$ und $a=3$, $e=2$ an und sagt bezüglich des ersten Falles: „Es könnte scheinen, als ob durch Addition unendlich vieler Grössen eine unendlich grosse Summe entstehen müsste; da aber die Glieder immer kleiner werden, so werden sie auch endlich verschwindend klein.“ Was mit diesem unverständlichen Gerede erklärt werden soll, ist schwer abzusehen; sollte aber der Verfasser meinen, dass man gegen das Ende der Reihe hin ein paar Millionen Glieder weglassen dürfe, weil sie verschwindend klein sind, so müsste er die Voraussetzung machen, dass verschwindend kleine Summanden eine verschwindend kleine Summe geben. Wie unrichtig dieser Satz ist, zeigt schon das bekannte Beispiel

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

wenn $n = \infty$ genommen wird. — Noch wunderlicher lautet die Erklärung des für $a=3$, $e=2$ zum Vorschein kommenden absurden Resultates

$$3 + 6 + 12 + 24 + \dots \mathit{in\ inf.} = \frac{3}{1-2} = -3;$$

der Verfasser sagt nämlich: „Das Resultat sollte $= \infty$ sein, da die Reihe aus unendlich vielen immer grösser werdenden positiven Zahlen besteht. Der Widerspruch lässt sich dadurch erklären, dass die Aufgabe, eine unendliche Menge immer grösser werdender Zahlen zu addiren, etwas Unausführbares fordert; aber dennoch stellt der Ausdruck $\frac{3}{1-2}$ die Reihe dar, denn wenn man $1-2$ in 3 dividirt und wie bei Buchstaben verfährt, so erhält man die Reihe.“ Nach des Verfassers eigener Definition von positiven und negativen Grössen und nach dem

Obigen kann man sich also dadurch in Schulden stürzen, dass man Jahr aus Jahr ein Vermögen aufhäuft. — Die Sache ist aber viel einfacher: wer für $e > 1$

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots = S$$

setzt und mit diesem S weiter rechnet, als wenn es eine endliche bestimmte Grösse wäre (z. B. $S - S = 0$, $\frac{S}{S} = 1$), der hat schon von Hause aus eine falsche Voraussetzung gemacht und braucht sich dann über seine widersinnigen Resultate gar nicht zu verwundern. Diese Bemerkung gilt übrigens für alle Rechnungen mit unendlichen Reihen, Producten und Kettenbrüchen.

Seite 80 heisst es: „Eine unendliche fallende Reihe nennt man convergirend, eine unendliche steigende Reihe divergirend." Hiernach scheint der Verfasser nicht einmal zu wissen, dass die bekannte harmonische Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ zwar eine fallende ist aber divergirt. Weiter sagt der Verfasser: „eine divergirende Reihe lässt sich nicht addiren", obschon er zwei Zeilen vorher — 3 als Summe von $3 + 6 + 12 +$ etc. angegeben hat.

Die Gleichungen ersten Grades werden mit zwei Beispielen abgefertigt, von denen das zweite die Form

$$(\alpha - \beta x)\ (\gamma - \delta x) = 0$$

hat, also doch wohl nicht hierher gehörte.

Auf Seite 107 definirt der Verfasser eine Function von x als „eine Grösse, in welcher x vorkommt" und sucht dann den Satz zu beweisen: „Jede Function von x, welche dadurch zu Null wird, dass man $x = m$ setzt, hat den Factor $(x - m)$." Hier fehlt die Beschränkung des Satzes auf algebraische rationale Functionen; denn schon bei irrationalen Functionen (wie z. B. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{m}$) gilt der Satz nicht mehr.

In § 116 heisst es, wenn die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + \ldots = m + nx + rx^2 + \ldots$$

für jeden Werth von x gilt, so ist $a = m$, $b = n$ etc. Hier kann erstens die Voraussetzung dahin beschränkt werden, dass die anfängliche Gleichung nur innerhalb eines die Null umfassenden Intervalles zu gelten braucht, zweitens ist hinzuzufügen, dass bei unendlichen Reihen die gleichzeitige Convergenz beider Reihen vorhanden sein muss. Kann man hierüber nicht entscheiden, so läuft man Gefahr, die abenteuerlichsten Resultate zu erhalten. So ist z. B.

$$\int_0^\infty \frac{l(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2}\, dt = \pi l(1 + x),$$

wenn man aber beiderseits nach Potenzen von x entwickelt, so liefert die Vergleichung der Coefficienten von x, x^2 etc. durchgängig falsche Gleichungen.

wo sich das Summationszeichen auf die verschiedenen Variationen oder Coordinaten bezieht. Man erhält leicht durch partielle Integration

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{d\delta x}{dt} dt = \frac{\partial F}{\partial x'} \delta x - \int \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} dt.$$

Da aber in Gemässheit der oben gemachten Voraussetzung δx an den Integrationsgrenzen verschwindet, so wird

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' \, dt = - \int \delta x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{d x'} dt.$$

In derselben Weise folgt durch wiederholte partielle Integration

$$\int \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' dt = \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x' - \int \delta x' \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x''} dt$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x' - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x + \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} dt,$$

wo wiederum die vor das Integralzeichen getretenen in δx und $\delta x'$ multiplicirten Glieder verschwinden. Folglich ist

$$\int \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' dt = + \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} dt,$$

und weiter

$$\int \frac{\partial F}{\partial x'''} \delta x''' dt = - \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} dt,$$

allgemein:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \delta x^{(n)} dt = (-1)^n \int \delta x \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} dt.$$

Hiernach ergibt sich

$$\delta u = \int \Sigma \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \pm \dots \right\} \delta x \, dt.$$

3.

Wenn der gefundene Integralausdruck für ganz beliebige Nachbarcurven (beliebiger Abhängigkeit der Variationen δx, δy, δz von t entsprechend) verschwinden soll, so müssen die Coefficienten der einzelnen Variationen unter dem Integralzeichen Null werden; mit anderen Worten, es müssen die Differentialgleichungen

$$C) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \pm \dots \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial y''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial y'''} \pm \dots \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial z'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial z''} - \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial z'''} \pm \dots \end{aligned} \right.$$

erfüllt sein. Denn wären ein oder einige solche Coefficienten von Null verschieden, also der Coefficient von δx etwa gleich ψt, so könnte man z. B. $\delta x = \varepsilon \psi t$, $\delta y = \delta z = 0$ setzen und würde damit

$$\delta u = \varepsilon \int \psi \psi \, dt$$

erhalten, d. i. wegen des positiven Quadrates jedenfalls gegen die Voraussetzung von Null verschieden. Der von t unabhängige Factor ε ist hinzugefügt worden, um durch beliebige Kleinheit desselben die hinreichende Abnahme der Variation δx herbeizuführen.

Die Gleichungen C) führen den Namen der isoperimetrischen Differentialgleichungen und besitzen die Eigenschaft, ganz abgesehen von der speciellen Beschaffenheit der Function F eine Integration zuzulassen.

Bildet man nämlich die Summe

$$S = \Sigma x' \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} \mp \ldots \right\}$$

und vergleicht damit den Werth des vollständigen Differentialquotienten

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x} + x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + x''' \frac{\partial F}{\partial x''} \ldots \right\},$$

so wird

$$\frac{dF}{dt} - S = \Sigma \left\{ \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} \right) + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x^{\mathrm{IV}} \frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\}$$
$$= \frac{d}{dt}\Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x'''} - x'' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\}.$$

Da aber S vermöge der isoperimetrischen Differentialgleichungen verschwindet, so erhält man die zugehörige Integralgleichung

$$F + Const = \Phi,$$

wenn

$$\Phi = \Sigma \left\{ x' \frac{\partial F}{\partial x'} + \left(x'' \frac{\partial F}{\partial x''} - x' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x''} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(x''' \frac{\partial F}{\partial x'''} - x'' \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'''} + x' \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial x'''} \right) \ldots \right\} \qquad D)$$

gesetzt wird.

Es ist nunmehr leicht, die Bedingung $\delta u = 0$ für $u = \int (T + U)\, dt$ auf das Stattfinden der mechanischen Differentialgleichungen zu reduciren. Man hat dazu in C) statt F nur $T + U$ zu substituiren. Da aber T nur die ersten Differentialquotienten der Coordinaten, die Kräftefunction U dagegen als Function von r nur die Coordinaten selbst (ohne deren Differentialquotienten) enthält, so folgt ohne Weiteres

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'},$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} m x' = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und analog für die übrigen Coordinaten.

WITTSTEIN, TH., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. ⅔ Thlr.

SCHNEIDEWIND, O., Ueber die Convergenz unendlicher Reihen. Inaugural-Dissertation. Nordhausen, Haacke. ¼ Thlr.

SCHLÖMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 18 Ngr.

SERRET, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von G. v. Wertheim. Leipzig, Teubner. 2⅔ Thlr.

HECHEL, C., Compendium der Geometrie nach Legendre. 3 Thl. Sphärische Trigonometrie. Reval, Kluge's Verlag. ½ Thlr.

BAHNSON, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1 Thl. Hamburg, Rudolphi. 18 Ngr.

SCHONDORFF, A., Ueber die Minimalfläche, die von einem doppeltgleichschenkligen räumlichen Viereck begrenzt wird. (Göttingen) Güstrow, Opitz & Co. ⅚ Thlr.

SONNENBURG, A., Lehrbuch der gesammten Elementar-Geometrie für Gymnasien, Realschulen etc. 1. Thl. Ebene Geometrie. 2. Aufl. Bremen, Geisler. 1 Thlr. 12 Ngr.

KOUTNY, E., Construction der Kegelschnittlinien aus Punkten und Tangenten. Wien, Gerold's Sohn. 8 Ngr.

WEYR, E., Studien aus der höheren Geometrie. Wien, Gerold's Sohn. 6 Ngr.

KUNZE, M. F., Siebenstellige Kreisflächen für alle Durchmesser von 0,01 bis 99,99. Dresden, Schönfeld's Buchhandlung. 1 Thlr.

MATZKA, W., Beiträge zur Lehre der universellen Sammlung von Strecken, d. i. ihrer Aneinanderfügung mittels Parallelverschiebung. Prag, Calve'sche Universitätsbuchhandlung. ⅔ Thlr.

SCHUMANN, H., Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Gymnasien und Realschulen. 3. Thl. Ebene Trigonometrie. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 9 Ngr.

KOPPE, K., Anfangsgründe der analytischen Geometrie und der Lehre von den Kegelschnitten für den Schul- und Selbstunterricht. Essen, Bödeken. 24 Ngr.

HARMS, CHR., Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts. 2. Abth. Geometrische Aufgaben. Oldenburg, Stalling's Verlag. 12½ Ngr.

PLÜCKER, J., Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 1. Abth. Leipzig, Teubner. 3 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Galilée, *les droits de la science et la methode des sciences physiques par* Th. Henri Martin. Paris 1868 bei Didier et C[ie] *librairie académique.*

Wenige Gegenstände aus der Geschichte der Wissenschaften haben in den letzten 5 Jahren sich so eifriger Bearbeitung zu erfreuen gehabt, wie das Leben und die Schicksale des Gründers der modernen Mechanik. Herr Martin, der letzte Schriftsteller über Galilei, hatte in einer seinem Buche angehängten bibliographischen Notiz unseren Aufsatz im 9. Bande dieser Zeitschrift mit Nr. LIII zu bezeichnen und gelangt dann noch bis zu Nr. LXVII unter Aufzählung nur solcher Abhandlungen, welche er gelesen hat, und welche leicht noch vermehrt werden könnten, z. B. durch den Aufsatz von Joh. Streit: „Galileo Galilei, ein Vortrag, gehalten in Greifswald zur Erinnerung an seinen 300sten Geburtstag" (Grun. Archiv Bd. 42, S. 241—255), durch die Brochure von H. Christian Herrmann Vosen: „Galileo Galilei und die römische Verurtheilung des Kopernikanischen Systems" herausgegeben von dem katholischen Brochurenverein in Frankfurt a. M., durch eine Recension des letzterwähnten Machwerkes, welche wir ohne Namensunterschrift in den Grenzboten von 1865 S. 422—436 veröffentlicht haben. Wenn nach so vielen Vorgängern aus jüngster Zeit ein Gelehrter, wie Herr Martin, nochmals zur Feder greift und eine fast 28 Druckbogen füllende Untersuchung über das Leben und Wirken des Mannes veröffentlicht, dem schon Dutzende von Geschichtsschreibern ihre Zeit und Mühe widmeten, so ist das ein sicherer Beweis für die hohe Bedeutsamkeit des Stoffes, aber auch dafür, dass von allen Vorgängern der Stoff nicht in seiner ganzen Vollständigkeit bewältigt wurde. Herr Martin mit seiner auf allen Gebieten der Geschichte der Wissenschaft gleich unermesslichen Belesenheit, mit seiner eleganten Schreibweise, mit seinem so selten fehlgehenden kritischen Verstande ist ganz der Mann dazu, Untersuchungen abzuschliessen und zusammenzufassen, und so freuten wir uns im Voraus auf die Zusendung des in der Ueberschrift genannten Werkes, wenn gleich Herr Martin in dem sein freundliches Geschenk begleitenden liebenswürdigen Briefe uns ankündigte, dass er vielen von uns ausgesprochenen Meinungen entgegengetreten sei.

Wir sind weit entfernt, Widerspruch übel zu nehmen, hoffen aber mit Zuversicht auf gleiche Unbefangenheit bei unserem hochverehrten Herrn Gegner rechnen zu dürfen, wenn wir unter achtungsvollster Anerkennung seiner Verdienste seine Angriffe zurückweisen müssen.

Wir glauben uns dieses um so mehr schuldig zu sein, als es im Allgemeinen zu den stylistischen Eigenthümlichkeiten von Herrn Martin gehört, in dem kritischen Theile seiner Werke Ansichten, die er anfeindet, mit den Persönlichkeiten, von welchen dieselben ausgehen, scheinbar zu verwechseln, so dass zwischen den achtungsvollen Briefen und dem mitunter weit weniger achtungsvollen Tone der gedruckten Aeusserungen fast ein Gegensatz zu bestehen scheint.

Wir gestehen es zu, wir fühlen uns einigermassen verletzt durch Bezeichnungen, wie „*les plus violents détracteurs de la conduite de Galilée*", S. 402, welche auf einen Philarète Chasles, auf einen Vosen und Consorten passen mögen, welche wir uns aber recht sehr verbitten. Was in aller Welt haben wir denn in unseren Abhandlungen gegen Galilei gesagt, um ein Herabwürdiger des grossen Mannes zu heissen? Wir haben behauptet (Zeitschr. f. Math. u. Phys. IX. S. 179), Galilei habe gegen Ende 1613 den Beweis seiner astronomischen Ansichten in der Bibel gesucht. Wir haben eine Erklärung dafür in dem autoritätsbedürftigen Eigensinne seiner Gegner gefunden. Wir haben hinzugefügt: „Ich wüsste nicht, wie man ihm dieses übelnehmen könnte, und wenn es ein Fehlschritt war, den er that, so liegt die Schuld nicht darin, dass er auf das theologische Gebiet hinübertrat, sondern darin, dass sein Fuss den schlüpfrigen Boden nicht gewohnt war, dass sein Auge die Fussangeln nicht sah, mit welchen der neue Kampfplatz rings umgeben war." Nennt man das Einen herabwürdigen? Dann müssen wir freilich auch heute noch dies wenig schmückende Beiwort uns gefallen lassen; denn heute wie vor 4½ Jahren halten wir dafür, dass Galilei den theologischen Streit thatsächlich begonnen hat. Es ist wahr, Herr Martin hat (S. 51) Briefe Galilei's an den Cardinal Dini angeführt, in welchen er das Bedauern ausspricht, dass er auf biblischem Gebiete kämpfen müsse, auf welches man ihn hingezwungen habe; aber diese Briefe sind aus dem Jahre 1615, und der Brief an Castelli, welcher den theologischen Anfeindungen des Dominicaners Caccini, den Denunciationen des Lorini, kurz dem eigentlichen Streite voranging, war vom 21. December 1613 (Martin S. 42). Ja, noch weit früher befragte Galilei den Cardinal Conti über die theologische Seite seiner naturwissenschaftlichen Ansichten, denn dessen Antwortschreiben datirt sogar vom 7. Juli 1612 (Martin S. 40).

Oder haben wir Galilei herabgewürdigt, weil wir (S. 191) über die Ausreden, welche er im Verhöre vom 12. April 1633 gebrauchte, die Bemerkung machten: „Man ärgert sich über die geistige Schwäche Galilei's, welcher hier offenbar gegen seine Ueberzeugung aussagte. Allein man thut

es nur deshalb, weil ein gewisses, ich möchte sagen, dramatisches Gefühl im Menschen uns geneigter macht, den Sturz eines grossen Mannes zu beweinen, als von einer moralischen Niederlage desselben Zeuge zu sein.“ Wir setzten sogleich die Frage hinzu: „Wie viele Männer, welche über Galilei den Stab brechen, würden wohl anders als er gehandelt haben? Wie viele würden den 70jährigen gebrechlichen Körper den Qualen dargeboten haben, mit welchen die damalige Zeit verschwenderisch war?“ Wir hoben ganz besonders den Einfluss Niccolini's auf das Benehmen des Galilei hervor. Möge uns Herr Martin die Behauptung nicht übel nehmen, dass auch er in diesem Sinne zu den *détracteurs les plus violents de la conduite de Galilée* gehört. Er nähert sich sogar unserem Wortlaute, wenn er sagt: „*Certainement Galilée ne joua pas du tout dans son procès le rôle d'un héros de tragédie*“ (S. 196), wenn er weiter hinzufügt: „*il espérait qu'il n'y aurait pas de peril pour sa personne, s'il se soumettait: mais s'il résistait obstinément, il pouvait tout craindre. Il savait comment deux hérétiques avaient été traités à Rome, l'un trente-deux ans, l'autre huit ans seulement avant son procès*“. Und wenn wir von Niccolini sagten: „er rieth ihm zur Besiegelung seiner Schmach“, so gebraucht Herr Martin die Worte: „*Telle était la souplesse* beiden *Aermes caractères en Italie au dix-septième siècle*“. Wir können in *des plus f*ussprüchen nur Wahrheit finden, aber sicherlich keine Herabwürdigung.

Oder endlich ist es Herabwürdigung des Galilei, wenn wir unsere Abhandlung mit den Sätzen schlossen: „Die wissenschaftliche Forschung ist frei geworden von den Fesseln der Kirche ..... Dass es aber so gekommen ist, dass der Kampf, man kann wohl sagen, jetzt ausgekämpft ist, das mahnt uns um so mehr zur dankbaren Erinnerung an die ersten Opfer des Kampfes, vor Allem an Galileo Galilei.“ Ein anderweitiges Urtheil wird aber Herr Martin uns nirgends nachweisen können; nur an den drei erwähnten Stellen haben wir uns über Galilei's Benehmen ausgesprochen, und, wie wir glauben, in völlig gerechter Weise, in einer Weise, welche mit den Ansichten von Herrn Martin selbst geradezu übereinstimmt.

Eine wesentliche Verschiedenheit zwischen unseren beiderseitigen historischen Auffassungen findet sich dagegen dem Charakter und der Handlungsweise Urban's VIII. gegenüber. Hier haben wir uns im December 1863 entschieden getäuscht. Die päpstlichen Verordnungen vom 16. Juni 1633 (Martin S. 123—124) und vom 23. März 1634 (Martin S. 215), welche erst im letztverflossenen Jahre durch Herrn Henri de l'Épinois (*Revue des sciences historiques*, 1867) bekannt wurden, lassen unsere Auffassung nicht mehr zu, als habe Urban VIII. späterhin Reue darüber empfunden, dass er in die Einleitung des Inquisitionsverfahrens gegen Galilei seiner Zeit willigte, als habe er ihn nach Vermögen geschützt, und als habe insbesondere nur seine Weigerung die Anwendung der Folter verhindert: Diese Anschauung ist gegenwärtig nicht mehr möglich — aber wir sind noch

weiter davon entfernt, die Darstellung von Herrn Martin für richtig zu halten. Wir wollen diese mit seinen eigenen Worten (S. 210) anführen: „*Sous l'influence des hommes auxquels, depuis 1632, Urbain VIII avait laissé prendre trop d'empire sur son esprit, sa conscience trompée lui disait qu'il avait eu tort de laisser paraître en Italie un livre plein d'une doctrine contraire à l'Écriture sainte, et que, pour réparer sa faute, il devait étouffer, au moins en Italie, cette erreur, qu'il voyait se propager malgré les condamnations ecclésiastiques. Il ne fallait pas, pensait-il, avoir l'air de faiblir à l'égard de Galilée, et enhardir ainsi tant d'autres catholiques, tout prêts à marcher sur ses traces. Telle est la pensée, que nous trouverons dans toute la conduite d'Urbain VIII envers le malheureux condamné.*“

Herr Martin wird uns wohl zugeben, dass positive Beweise für seine Auffassung nicht vorhanden sind; wir meinen, dass keinerlei Documente, Briefe oder Verordnungen uns einen ungetrübten sicheren Einblick in die Seele des Papstes gestatten, dass wir also, so zu sagen, nur einen Indicienbeweis besitzen, welches auch die Folgerungen sein mögen, die wir aus den gegebenen Thatsachen ziehen. Diese Thatsachen wollen wir deshalb in der Kürze, welche einer kritischen Besprechung angemessen erscheint, hier wiederholen.

Es ist Thatsache, dass Maffeo Barberino der Freund Galilei's war und insbesondere 1616 bei dem ersten Processe auf dessen Seite stand. Es ist Thatsache, dass eine Tradition des römischen Clerus bis zum Jahre 1825 existirte (Martin S. 159), wonach Galilei seinen ehemaligen Freund persönlich beleidigte und dadurch zum Feinde machte. Es ist Thatsache (Martin S. 159 und 162), dass schon 1632 diese Tradition vorhanden war, „*et ils firent quelques dupes, parmi lesquelles fut peut-être d'abord Urbain VIII lui-même*“. Es ist Thatsache, dass nicht blos „*peut-être*“ der Papst selbst den Process nur von der persönlichen Seite betrachtete, denn Niccolini sagt (Martin S. 121): *dans l'excès de sa passion il a fait de cette persécution son affaire personnelle.*“ Wie kann Herr Martin es dann rechtfertigen, wenn er S. 136 behaupten will: „*Il ne cherchait point une vengeance personelle d'un outrage imaginaire*“? Freilich war die Beleidigung eine imaginäre, freilich war Simplicius nicht die Karrikatur des Paptes, wie wir S. 186 unserer Abhandlung mit denselben Gründen gezeigt haben, welche auch Herr Martin (S. 164 flgg.) benutzt; freilich hat Herr Martin Recht, wenn er gegen uns beweist, dass Galilei den Einwurf der Allmacht Gottes in sein Werk aufnehmen musste, wenn er Urban VIII. nicht wirklich beleidigen wollte; aber darauf kommt es keineswegs an, sondern nur darauf: War Urban VIII. erzürnt und handelte er im Zorne? Und diese Frage muss die Geschichtsforschung einfach bejahen. Wir haben demnach von unserer Auffassung nur das zurückzunehmen, was allerdings unser persönliches Eigenthum daran war: die spätere Aenderung in der Gemüthsstimmung Urban's. Urban besänftigte sich nicht. Er war es, der am 16. Juni 1633 den Befehl

der Territion erliess, welcher nach unserer früheren Meinung von den Inquisitoren ausging und in der Lücke der Processacten enthalten sein musste, zu deren Annahme uns die confuse, wie man gegenwärtig weiss, durchaus unrichtige Beschreibung jener Acten durch Marino Marini verleitet hatte. Er war es, der am 23. März 1634 Galilei verbot, um weitere Vergünstigungen zu bitten, wenn er nicht in die wirklichen Kerker der Inquisition verbracht werden wolle. Er war es aber auch, der beide Verordnungen nur insgeheim erliess, der sich beidemal hinter das heilige Gericht steckte, wahrlich weit eher das Kennzeichen persönlichen Rachegefühls, als der Befürchtung, die Religion möge durch Galilei's wissenschaftliche Thätigkeit Gefahr laufen. Hätte Urban in diesem Gefühle gehandelt, so war es viel natürlicher für ihn, jetzt *ex cathedra* die Kopernikanische Lehre ein- für allemal zu verdammen, welche bisher nur in nichtofficieller Weise verurtheilt war, wie Herr Martin mehrfach hervorhebt, welcher gerade darauf ein vielleicht übermässig grosses Gewicht legt. Wir gestehen freilich dabei die Unfähigkeit zu, uns in die Seele eines frommen Katholiken zu versetzen, für welchen die Unfehlbarkeit des Papstes als Papst Glaubenssache ist.

Urban VIII. schob das Inquisitionsgericht auch deshalb vor, weil er selbst bei der Veröffentlichung der berühmten Galilei'schen Dialoge zu sehr betheiligt war. Wir haben zuerst (S. 184 unserer Abhandlung) darauf hingewiesen, dass die Vorrede vielleicht auf Urban VIII. zurückzuführen sei. Herr Martin benutzt, allerdings ohne uns zu citiren, den Theil unserer Behauptung, der brieflich erwiesen ist, dass nämlich Riccardi die Vorrede an Galilei schickte (Martin S. 105). Dann fügt er neu die werthvolle Bemerkung hinzu (S. 106), dass in der Vorrede Anklänge an einen Brief sich fänden, welchen Galilei 1624 an Ingoli geschrieben hatte. Aber hat denn Herr Martin ganz vergessen, dass er selbst (S. 94) gezeigt hat, dass Urban VIII. von jenem Briefe Kenntniss nahm, dass also unsere Hypothese von dem Ursprunge der Vorrede, von der Ursache der nachfolgenden Ungnade sowohl des Riccardi, als des Ciampoli nur noch mehr Bestätigung erhält? Jedenfalls schenken wir dieser Auffassung mehr Glauben, als dass wir Herrn Martin beipflichten möchten, wenn er auf Galilei den Vorwurf ladet: „*au lieu de rédiger lui-même cette préface peu sincère, il eut l'habileté de l'inspirer d'abord au P. Riccardi, et de se la laisser imposer ensuite.*"

Wir könnten noch einige andere Angriffe gegen das neuerschienene Buch richten, wenn es uns darum zu thun wäre, ängstlich jedes Wort aufzusuchen, in welchem der gelehrte Verfasser sich geirrt hat. Wir wollen nur schliesslich zwei Unterlassungssünden hervorheben. Einmal hätte es zur Vollständigkeit des Werkes entschieden beigetragen, wenn Herr Martin den Beweis, dass das ganze Verfahren von 1632—1633 in der Sitte des üblichen Processes begründet war, aufgenommen hätte, welchen er in un-

serer Abhandlung S. 187—189 hätte finden können, während kein anderer Schriftsteller diesen Gesichtspunkt bemerkt hat. Zweitens durfte Herr Martin nicht übersehen, dass allerdings im Saggiatore Theologisches vorkommt, dass nämlich Galilei im 50. Capitel dieser Streitschrift an den Männern im Feuerofen herumdeutelt wegen der Frage, ob eine Flamme durchsichtig sein könne oder nicht.

Aber hiermit wollen wir dieses unangenehme Geschäft beendigen. Wir wollen weit lieber noch einige Punkte hervorheben, welche uns wenigstens neu und überraschend waren, auch wohl neu sein dürften, da Herr Martin keinen Vorgänger dafür citirt, was er sonst nur sehr ausnahmsweise und offenbar absichtslos unterlässt. Wir rechnen zu diesen historisch wichtigen Thatsachen, welche wir bei Herrn Martin zum ersten Male hervorgehoben finden, die Hinterlist des Erzbischofs von Pisa, Francesco Boncinni (S. 56 flgg.), welcher von Castelli den Galilei'schen Brief unter dem Scheine der Freundschaft herauszulocken sucht; ferner das ganz ähnliche Benehmen des P. Grassi gegenüber von Mario Guiducci in derselben Zeit, wo er die giftigste Antwort auf den Saggiatore vorbereitet (S. 96—97); den noch ganz unbekannten Umstand, dass bereits 1616 Galilei vor das Inquisitionsgericht geladen worden war, dass also seine damalige Reise nach Rom durchaus nicht als eine freiwillige betrachtet werden darf (S. 69). Bezüglich des Processes von 1632 lernen wir durch Herrn Martin (S. 117), dass dem Befehle, in Rom zu erscheinen, welcher am 1. October 1632 dem Galilei vorgelesen wurde, ein Notar und zwei Zeugen anwohnten, aber insgeheim, ohne dass Galilei selbst ihre Gegenwart ahnen konnte. Endlich war uns persönlich die Beweisführung interessant, durch welche Herr Martin aus einer Veröffentlichung des Pater Mersenne aus dem Jahre 1634 den Dissens von drei Richtern bei dem Urtheilsspruche über Galilei bestätigt (S. 134), welchen wir zuerst bemerkt hatten.

Wir können ferner nur mit aufrichtigem Danke von der ganzen zweiten Abtheilung des Martin'schen Buches (S. 281—382) reden, in welcher der Verfasser in ganz mustergiltiger Weise die Methode des Galilei schildert, ihn als den wahren Erfinder der Inductionswissenschaften kennzeichnet, neben welchem die Ansprüche eines Baco, wie eines Cartesius verstummen müssen.

Unsere Leser erwarten wohl nach diesen manche Einzelheit berührenden Erörterungen ein Gesammturtheil. Wir stehen nicht an, es dahin abzugeben, dass das Buch von Martin seines Verfassers würdig ist. Wenn wir auf Ausstellungen, welche wir zu machen hatten, einen verhältnissmässig grösseren Raum, als auf die verdienten Lobsprüche verwandt haben, so mag man uns dieses aus unserem persönlichen Antheile an den Forschungen über Galilei zu erklären, vielleicht zu entschuldigen erlauben; aber keineswegs wünschten wir in unseren Lesern das Gefühl zu hinterlassen, als ob das hier besprochene Werk mehr des Tadelnswerthen, als des

Vortrefflichen enthalte. Mängel sind vorhanden, das durften und konnten wir weniger als irgend ein Anderer verschweigen, wenn wir uns selbst gerecht sein wollten, aber Mängel, welche den Tugenden gegenüber an Zahl, wie an Grösse verschwinden.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. September bis 15. October 1868.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-physikal. Classe. 1868. I u. II. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie d. Wissensch. 1868. I. 3. u. 4. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. 4. Bd. Basel, Schweighauser. 3 Thlr.

Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgeg. von C. Bruhns. 3. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

Tageblatt der 42. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Dresden, vom 18. — 24. September 1868. Dresden, Schönfeld. 2 Thlr.

Reine Mathematik.

KÖNIGSBERGER, L., Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner. 1⅓ Thlr.

BOLTZMANN, L., Ueber die Integrale linearer Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

LOMMEL, E., Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

FRISCHAUF, J., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für Mittelschulen. Im Anschluss an Heis's Beispielsammlung bearbeitet. Graz, Leuschner & Lubensky. 16 Ngr.

SPITZ, C., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 1. Th. 2. Aufl. Leipzig, Winter. 2 Thlr.

WIECKE, P., Algebraisches Uebungsbuch für mittlere und obere Classen höherer Unterrichtsanstalten. 1. Reihe. Berlin, G. Reimer. ¼ Thlr.

LEHMANN, O., Fünfstellige Logarithmentafeln. Leipzig, Hunger. ⅙ Thlr.

FRESENIUS, F. C., Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden, Kreidel. 24 Ngr.

SCHLÖMILCH, O., Grundzüge einer wissenschaftl. Darstellung der Geometrie des Maasses. 4. Aufl. Eisenach, Bärecke. 1¼ Thlr.

KRÜGER, J., Grundzüge der Dreiecksrechnung (Goniometrie und Trigonometrie). Leipzig, Seemann. 12 Ngr.

UNFERDINGER, F., Ueber einige merkwürdige Formeln der sphärischen Trigonometrie. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Rebstein, J., Lehrbuch der praktischen Geometrie. Frauenfeld, Huber. 2⅔ Thlr.

Defert, C. F., Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Coordinaten. Berlin, Springer. 2¼ Thlr.

Hansen, P. A., Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in 10 Supplementen zur Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig, Hirzel. 1⁴/₅ Thlr.

Hochstetter, F. v., und A. Bisching, Leitfaden zur beschreibenden Krystallographie. Wien, Braumüller. 24 Ngr.

Delaunay, M., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Nach der 4. Aufl. des Originals übers. v. G. Krebs. Wiesbaden, Kreidel. 2⅓ Thlr.

Rheinauer, J., Grundriss der Mechanik fester Körper. Für die Schule bearb. Freiburg, Schmidt. ⅓ Thlr.

Winkler, E., Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. 1. Th., 2. Hälfte. Prag, Dominicus. 1 Thlr. 24 Ngr.

Wiebe, F. H. K., Allgemeine Theorie der Turbinen. Berlin, Ernst & Korn. 1⅓ Thlr.

Melde, F., Experimentaluntersuchungen über Blasenbildung in kreisförmig cylindrischen Röhren. 1. Th.: Die Libellenblasen. Marburg, Elwert. ⅔ Thlr.

Reusch, F. E., Theorie der Cylinderlinsen. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

Jesser, M., Lehrbuch der mathematischen Geographie für die k. k. Neustädter Militärakademie. Wien, Seidel. 1⅓ Thlr.

Argelander, F. W. A., Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn. 7. Band, 1. Abtheilung. Bonn, Marcus. pro compl. 5 Thlr.

Friesach, C., Der Merkurdurchgang am 5. November 1868, nach den Angaben des Nautical-Almanac ausführlich berechnet. Graz, Leuschner & Lubensky. 12 Ngr.

Physik.

Heussi, J., Elementarer Leitfaden der Physik. 9. Aufl. Leipzig, Duncker & Humblot. 12 Ngr.

Kambly, L., Die Physik für den Schulunterricht bearbeitet. Breslau, Hirt. ⅔ Thlr.

Schultze, Th., Betrachtungen über die physikalischen Lehren vom farbigen Lichte und dessen wahrscheinlichen Ursprung. Kiel, Schwers. 12 Ngr.

Ditscheiner, L., Ueber die Anwendung des Spectralapparates zur optischen Untersuchung der Krystalle. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Huggins, W., Ergebnisse der Spectralanalyse in Anwendung auf die Himmelskörper. Deutsch, mit Zusätzen v. W. Klinkerfues. Leipzig, Quandt & Händel. ⅔ Thlr.

Bruhns, C., Meteorologische Beobachtungen, angestellt auf der Leipziger Universitäts-Sternwarte in den Jahren 1866 und 1867. Leipzig, Hinrichs. 1 Thlr.

Atlas météorologique de l'Observatoire impérial. Année 1867. *Paris, Gauthier-Villars.* 15 *frcs.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Weltschöpfung vom Standpunkte der neuen Wissenschaft. Von Spiller. Berlin bei Carl Duncker 1868. gr. 8. Preis 20 Ngr.

Seit Kant in seiner „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ die scharfsinnige Idee der sogenannten Nebel- oder Dunsttheorie und einer perpetuirlichen Fortbildung in den Himmelsräumen, mit anderen Worten: „der Stern- und Planetenerzeugung aus kosmischem Nebel“ niedergelegt hat und diese nach ihm von Laplace in der Hypothese von der Entstehung der Planeten aus kreisenden Ringen dunstförmiger Stoffe specieller ausgebildet worden ist, ist diese Hypothese bis jetzt immer noch als die beste von den Naturkundigen anerkannt geblieben. Weshalb es derselben immer noch an einer Basis gefehlt hat, ist der Umstand, dass Keine, weder die Begründer der Theorie noch Spätere auch nur irgend eins der vielen damit zusammenhängenden Probleme dem Calcül unterzogen haben, wenn man nicht etwa die Untersuchungen über das Gleichgewicht freier homogener rotirender Ellipsoide von Maclaurin, Ivory, Ramus und Jacobi, über die Mondfiguren von Roche und Vaughan, die analytischen Untersuchungen über die Stabilität der Saturnringe von Laplace, Bond und Peirce, sowie über die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung freier kosmischer Ringe ohne Centralkörper hierher rechnen will. Ausser der Laplace'schen ist später eine Reihe anderer zum Theil sehr wunderlicher Hypothesen ans Licht getreten (wie z. B. die „Blasentheorie“ von Gèther), wodurch den astronomischen Wissenschaften wenig oder gar nicht gedient worden ist, weil sie sämmtlich als reine Phantasiegebilde jeder Erfahrung und mathematischen Begründung ermangelnd, nur auf Principien gestützt sind, aus denen sich (der Schriftsteller braucht nur etwas geistreich zu sein) alle möglichen Phänomene auf eine sehr plausible Art erklären lassen, ohne dass auch nur für einen speciellen Fall mathematisch der Beweis geführt wird, dass man für denselben auch eine physische Möglichkeit voraussetzen dürfe.

Zu diesen Theorieen der Welt- und Planetenbildung fügt nun Professor Spiller in seiner Schrift eine neue, die „Abschleuderungstheorie", welche auch an dem Gebrechen leidet, dass ihr Princip mathematisch-physikalischen Gesetzen widerstreitet, weshalb wir uns veranlasst sehen, dieselbe einmal vom mathematischen Standpunkte aus zu beleuchten, zumal da Spiller in seiner Schrift neben dem keck gewählten Titel: „vom Standpunkte der neuen Wissenschaft" ein altes Dogma angreift, an welches sich der Name eines Mannes knüpft, welcher in seiner *Mécanique céleste* und seinem *Système du monde* zwei auf dem Gebiete der Astronomie unsterbliche Werke hinterlassen hat. Nachdem Spiller die Laplace'sche Hypothese widerlegt zu haben meint, fährt er fort, die Weltbildungsprocesse und ihre Resultate zu demonstriren, wie man ein anderes physikalisches oder chemisches Experiment erklärt; dabei werden aber die wichtigeren Thatsachen übergangen, wahrscheinlich weil hier das Princip seinen Dienst versagt. Ich führe hier nur beispielsweise das merkwürdige Gesetz an, dass die Rotation aller Planeten und die Revolution der Monde in demselben Sinne erfolgt, wie die Revolution der Planeten und der Sonne. Dies erklärt Spiller nicht. Nach seiner Abschleuderungstheorie, die zur Bildung eines jüngeren Planeten immer die Annäherung zweier älterer Himmelskörper an einander erfordert, kann ebenso gut die Rotation um seine Axe eine rückläufige werden. Ein auf die Laplace'sche Ringhypothese gegründeter Calcul erklärt dies Gesetz sehr einfach. Die Ringe nämlich haben wegen der durch gegenseitige Störung und Reibung allmälig eintretenden gleichen Winkelgeschwindigkeit aller Massentheilchen an ihrer äusseren Peripherie eine grössere Geschwindigkeit in der Bahn, als an ihrem inneren, dem Centralkörper zugewendeten Rande. Wenn sich nun ein Ring durch Theilung auflöste, musste sich bei einem dichteren und weniger ausgedehnten Ringe eine, bei einem lockeren und zugleich weit ausgedehnten Ringe mehrere ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren bilden, deren innere, dem Centralkörper zugewendete Seite eine in Beziehung auf ihren Massenmittelpunkt rückläufige Bewegung erhielt. Dasselbe musste bei den von der Hauptmasse abgelösten oder auch bei der Zerstörung des Gleichgewichts des Ringes abgerissenen Satelliten der Fall sein, — sie mussten ihre Revolution und Rotation in dem Sinne der Revolution und Rotation der Planeten vollenden, was in der That bei allen der Fall ist, und zwar mit grösserer oder geringerer Axenneigung gegen die Ekliptik, je nachdem die noch theilweise fortdauernde Strömung der flüssigen und luftförmigen Massen auf der Nord- oder Südseite des Ringes durch Temperatur- und Attractionsverhältnisse modificirt, eine mehr oder weniger gleich starke war. Durch analytischen Calcul sind wir im Stande, mittelst des Princips von der Erhaltung der Summe der Winkelflächen aus der bekannten Bewegung des zerstörten Körpers, Axenlage, Abplattung

und Umdrehungsgeschwindigkeit der neuen Gleichgewichtsfigur zu berechnen, und ebenso umgekehrt aus der neuen Figur die alte. Dies Eine wenigstens zur Vertheidigung der Laplace'schen Hypothese. Wir wollen nun aber einige Punkte der Spiller'schen Theorie selbst beleuchten. Das Einzige, worin wir mit Professor Spiller gewiss schon längst übereinstimmten, ist die Thatsache, dass die rotirende Bewegung der chaotischen Dunstkugel nicht durch seitlichen (excentrischen) Stoss, sondern durch die Verhältnisse der Gravitation, Attraction und Abkühlung oder Erwärmung hauptsächlich veranlasst worden ist. Ich wage nicht darüber zu entscheiden, ob Kant an einen momentanen und localen primitiven Stoss oder an einen Willensact des Schöpfers gedacht hat. Nun aber stellt Spiller unter Anderem folgende Behauptungen auf:

1. „Eine Folge der durch Abkühlung und Gravitation bewirkten Condensation der chaotischen Dunstkugel war die Vergrösserung der Abplattung, d. h. der Durchmesser des Aequators wuchs, während die Drehungsaxe abnahm." Wäre dieser Zusatz vermieden worden, so würde zu dem Hauptsatze nichts zu bemerken gewesen sein. Dieser aber ist ein Resultat, welches nicht von Jedem eingesehen, sondern nur auf analytischem Wege gewonnen wird. Wenn Professor Spiller dies nicht hat, sondern es blos vermuthet, so wollen wir es für ihn beweisen. Für das Rotationsellipsoid ist die Summe der Momente der Bewegungsquantität (Energie) gleich:

$$E = \frac{\omega}{5\left(\frac{4}{3}\pi\varrho\right)^{\frac{2}{3}}} M^{\frac{5}{3}} \left(1+\lambda^2\right)^{\frac{1}{3}}\ *),$$

worin ω die Winkelgeschwindigkeit, M die Masse, ϱ die Dichtigkeit und $\sqrt{1+\lambda^2}$ das Axenverhältniss bezeichnen. Für eine constante Masse und Energie ist also

$$\frac{\omega^3}{\varrho^2}\left(1+\lambda^2\right) = \frac{\omega_1^3}{\varrho_1^2}\left(1+\lambda_1^2\right)$$

oder

$$\frac{\omega^3}{\omega_1^3} \cdot \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2} = \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2},$$

und wenn man $\omega^2 = 2\pi f \varrho \nu$ setzt, wo f die Gravitationsconstante bedeutet, ν das Rotationsmoment,

$$\frac{\nu^3\left(1+\lambda^2\right)^2}{\nu_1^3\left(1+\lambda_1^2\right)^2} = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Da die Grenze der Expansion durch $\varrho = 0$, die der Condensation durch $\varrho = \infty$ bestimmt ist, so ist für den ersten Fall die Winkelgeschwindigkeit ω des Sphäroides gleich Null und wegen der Gleichgewichtsbedingung

---

*) Vgl. Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. Kieler Universitätsschriften von 1859—60 pag. 42.

$$\frac{3\lambda + \nu\lambda^3}{3+\lambda^2} - arctan\,\lambda = 0\text{*)}$$

auch λ gleich Null, mithin die **Kugel** die Grenzfigur der Expansion. Bei starker Expansion ist

$$\nu^3 (1+\lambda^2)^2 = (\tfrac{4}{15})^3 \lambda^6,$$

also

$$\varrho : \varrho_1 = \lambda_0^6 : \lambda_1^6,$$

für den zweiten Fall ist ν nicht ∞, da ν nach der sehr genauen Berechnung von Ramus**) ein Maximum 0,2246657 erreicht und dann wieder bis Null abnimmt, sondern es wird $\sqrt{1+\lambda^2}$ gleich ∞. Die Grenzfigur der Condensation, wenn diese mit dem flüssigen Aggregatzustande vereinbar wäre, ist also der Discus, eine unendlich dünne Linse und zwar von endlich grossem Aequatorialdurchmesser. Es wird demgemäss bei zunehmender Dichtigkeit die Abplattung in der That wachsen. Dabei verhalten sich bei geringer Dichtigkeit die Cuben der Winkelgeschwindigkeiten wie die Quadrate der Dichtigkeiten

$$\omega^3 : \omega_1^3 = \varrho^2 : \varrho_1^2.$$

Ferner folgt aus $\omega^2 = 2\pi f \varrho \nu$, dass bei gleichen Rotationsmomenten ν (es giebt deren immer zwei) die Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten sich direct wie die Condensationen verhalten; also

$$\omega^2 : \omega_1^2 = \varrho : \varrho_1.$$

Demgemäss muss also bei zunehmender Dichtigkeit der Dunstkugel sich die Rotationsgeschwindigkeit immer mehr vergrössern; indess keineswegs bis ins Unendliche. Es ist nämlich an der Grenze $\varrho = \infty$.

$$\omega : \omega_1 = \varrho^0 : \varrho_1^0 = T_1 : T,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit wird zuletzt constant und erreicht ein Maximum, die Umdrehungszeit ein Minimum, welches bei dem Erdball ungefähr den 440000sten Theil seiner Tageslänge betragen würde. Da sich ferner aus der Theorie der Gleichgewichtsellipsoide die Relation

$$\omega : \omega_1 = b_1^2 : b^2$$

ergiebt, so würde an jener Grenze der Condensation der Aequatorialdurchmesser noch ungefähr 2,6 geogr. Meilen betragen; die Polaraxe aber gleich Null geworden sein. Wenn nun aber trotzdem von Spiller, der in der gedachten Vergrösserung der Rotationsgeschwindigkeit der „Mutterdunstkugel" die Hauptursache der Bildung junger Planeten und Trabanten suchen zu müssen glaubt,

2. behauptet wird, dass „bei zunehmender Rotationsgeschwindigkeit die Aequatorialaxe wuchs und endlich die Centrifugalkraft die

*) Vgl. Lehrbuch der analytischen Mechanik von Duhamel. Deutsch von Dr. O. Schlömilch. Bd. II, p. 192.

**) Om de ellipsoidiske Ligevaegts figurer af flydende masser. Kong. Dansk. Videnskab. Selskabs Afhandl. Kjöbenhavn 1846, XI, 111—185.

die Centripetalkraft überwog", so ist beides total falsch. Spiller scheint überhaupt der Meinung zu sein, dass mit einer zunehmenden Rotationsgeschwindigkeit auch stets eine Vergrösserung der Abplattung verbunden sei. Dies ist bei den Ellipsoiden, deren Axenverhältniss den Werth 2,7198 übersteigt, gerade umgekehrt, und ferner: beide Axen werden kürzer und die Fallgeschwindigkeit am Aequator nimmt rasch zu statt abzunehmen, wie wir an einem einfachen Zahlenbeispiele beweisen wollen. Für das Erdsphäroid ist bekanntlich $b : a = 301 : 300$; für ein homogenes würde $b : a = 231 : 230$ sein. Dasselbe möge sich auf das 8fache seiner Dichtigkeit condensiren, so ist die constante Masse

$$M = \tfrac{4}{3}\, a b^2 \pi \varrho = \tfrac{4}{3}\, a_1 b_1^2 \pi \varrho_1$$

und

$$\varrho : \varrho_1 = a_1 b_1^2 : a b^2 := \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^3 : \left(\frac{b_1^2}{a_1^2} - 1\right)^3 = 1 : 8,$$

also

$$b_1^2 : a_1^2 = 2\left(\frac{301}{300}\right)^2 - 1 = 1{,}0133,$$

$$b^2 : a^2 = 1{,}0067.$$

Ferner

$$b_1^2 a^2 : b^2 a_1^2 = 1{,}0066 : 1,$$

$$b_1^2 a_1 : b^2 a = 0{,}1250 : 1,$$

$$a^3 : a_1^3 = 8{,}0550;\quad a : a_1 = 2{,}0046;$$

$$b : b_1 = 1{,}9989,$$

$$b : a = \sqrt{1 + \lambda^2} = 1{,}0033;\quad b_1 : a_1 = \sqrt{1 + \lambda_1^2} = 1{,}0067.$$

Hieraus folgt, dass sich der Polarhalbmesser um mehr, der Aequatorialhalbmesser um etwas weniger als die Hälfte verkürzt hat. Dies Resultat ergiebt sich noch einfacher aus der Relation

$$\lambda^6 : \lambda_1^6 = \varrho : \varrho_1.$$

Betrug nun weiter vorher die Gravitation am Aequator $9^m{,}8133$, die Schwungkraft daselbst $0^m{,}0339$, so beträgt jetzt die Gravitation nahezu 39^m, die Schwungkraft aber nur $0^m{,}2712$. Wie oben gezeigt, ist nahezu

$$\omega^3 : \omega_1^3 = \varrho^2 : \varrho_1^2 = 1 : 64,$$

also

$$\omega_1 = \omega \sqrt[3]{64} = 4\omega.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also nach der Condensation die vierfache der früheren und die Erde würde sich statt in 24 Stunden schon in 6 Stunden einmal um ihre Axe drehen. Bezeichnen k und k_1 die Schwungkräfte am Aequator, so ist

$$k : k_1 = \omega^2 r : \omega_1^2 r_1 = 1 : 8.$$

Hieraus folgt denn nun (wahrscheinlich zum grössten Schrecken des Herrn Prof. Spiller), dass die Zunahme der Schwerkraft (Fallgeschwindigkeit) am Aequator sich trotz der Zunahme der Schwungkraft fast auf

das Vierfache gesteigert hat, also nun an seine „Abschleuderung" erst recht nicht zu denken ist. Wir bemerken nur beiläufig, dass aus der Theorie des Gleichgewichts der Ellipsoide überhaupt folgt, dass die Fallgeschwindigkeit am Aequator bei zunehmender Condensation ein Maximum erreicht bei $\sqrt{1+\lambda^2}=7{,}07$, dass die Schwungkraft die Gravitation niemals überwinden kann, sondern ihr nur an den beiden Grenzen der Dilatation der Stoffe gleich wird. Der Beweis würde hier zu weit führen. Trotz dieser Thatsachen ist nach Spiller

3. der Hauptgrund für die Entstehung und Absonderung der Planeten die Abplattung der Mutterdunstkugel und die Vermehrung ihrer Drehungsgeschwindigkeit bis zum Ueberwiegen (!) der Fliehkraft über die Centralkraft am Aequator. Da Prof. Spiller aber doch selbst einen geringen Zweifel an der glücklichen Entbindung der Mutterkugel hegt, so lässt er einen anderen in der Nähe (?) befindlichen Weltkörper als Hebamme fungiren und die nähere Veranlassung zur Abschleuderung oder Geburt durch Erregung einer Fluthwelle geben. Ein Berichterstatter des „Ausland" Nr. 24 nennt dies „geniale" Gedanken und Herrn Prof. Spiller einen „neuen grossen Eroberer im Dienste des menschlichen Geistes".

In gleich unkritischer Weise verfährt Spiller in dem übrigen Theile seiner Schrift. Falsch wie die vorigen sind folgende Sätze:

4. Nach jeder Abschleuderung musste der Centralkörper sich etwas langsamer bewegen. Dies ist doch etwas zu menschlich gedacht und tritt in Widerspruch mit dem Princip von der Erhaltung der Summe der Bewegungsquantität; denn es kommt vorzugsweise darauf an, von woher die Fluthwelle ihren Ursprung nimmt, ob sie von den Polen zuströmt, oder ob sie mit einer compacteren Masse vom Aequator losgerissen wird. In letzterem Falle kann die Rotationsgeschwindigkeit abnehmen, im anderen aber auch wachsen.

5. „Der Schwerpunkt des Mondes ist weiter von der Erde entfernt, als sein geometrischer Mittelpunkt"; es ist gerade umgekehrt — oder will Prof. Spiller den Cometen eine Gesetzwidrigkeit zum Vorwurf machen? sonst muss er uns doch erklären, warum ihr Kopf und nicht der Schweif der Sonne zugewendet ist. Aus der Theorie des Gleichgewichts der Flüssigkeiten folgt aber, dass der Massenmittelpunkt eines frei schwebenden Sphäroides stets der Ort des grössten hydrostatischen Druckes ist. Bekanntlich ferner ist es die grosse Nähe der Monde, welche nach Roche die verlängerten Ellipsoide erzeugt, deren grösste Axe gegen den Planeten gerichtet ist. Der Theorie der Saturnringe ist Prof. Spiller ebenfalls unkundig. Es liegen die Saturnringe grösstentheils ausserhalb der Grenze der Stabilität sphäroidischer Gleichgewichtsfiguren — darum konnten in diesem Abstande vom Saturn keine Monde existiren, d. h. keine Sphäroide gebildet werden, wenn auch die Masse den Kepler-

schen Gesetzen folgte, aber ohne statischen Zusammenhang — ein Meteoritenschwarm oder eine im ewigen Flusse verharrende flüssige oder luftförmige Masse. Spiller findet aber leicht eine Erklärung ihrer Entstehung: die „Zähigkeit“ der Saturnmasse ist daran schuld, und doch ist der Saturn der am wenigsten dichte von allen Planeten; seine Dichtigkeit ist nur $^3/_4$ von der des Wassers. Behauptet Spiller: die Saturnmasse ist von Pech, also zähe, so sagen wir: sie ist von Petroleum, also flüchtig.

Und nun noch Eins: Prof. Spiller führt

6. auch das bekannte Beispiel wieder an, dass bei unserer Erde am Aequator die Fliehkraft der Centripetalkraft gleich werde, wenn sie 17 Mal schneller um ihre Axe rotire, ohne aber die Ursache der Beschleunigung anzugeben. Nun kann diese Beschleunigung nur durch zwei Ursachen herbeigeführt werden, entweder durch einen excentrischen Impuls, d. i. durch eine Vermehrung der Energie, oder durch Condensation der Masse. Es folgt nun aber aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren, dass bei der Annahme einer constanten Dichtigkeit und der wachsenden Energie einer Flüssigkeitsmasse, als welches wir denn doch das Erdsphäroid im Grossen und Ganzen anzusehen haben, das gedachte Phänomen nie eintreten kann, sondern dass das Sphäroid sich immer mehr abplattet und die Rotation bei $\nu = 0{,}2246657$ ihr Maximum und zwar fast genau nur das Zehnfache der wirklichen erreichen kann, worauf sie wieder trotz jedes beliebigen Impulses mehr und mehr abnehmen würde. Die Centripetalkraft bleibt aber so lange grösser, als die Centrifugalkraft, als λ nicht gleich ∞ ist. Bei der Annahme einer constanten Energie und einer wachsenden Dichtigkeit durch Abkühlung oder Druck kann die Rotationsgeschwindigkeit des Erdsphäroids auf das 440000fache des jetzigen gebracht werden, ohne aber dass die Fallgeschwindigkeit gleich Null oder gar negativ werden könnte.

Endlich widerspricht die wunderliche Annahme, die ja nicht mehr neu ist, nämlich, dass die Erde „hohl“ sei, allen hydrostatischen Gesetzen, und erinnert an die Gether'sche Blasentheorie. Die Gesetze des hydrostatischen Gleichgewichts hohler Sphäroide sind bereits von mehreren Physikern dem Calcul unterbreitet worden, um hierüber weiter Worte zu verlieren. Wenn eine Theorie wie die Spiller'sche auf so unsicherer Basis beruht und ganz specifisch ein Product der Phantasie ist, entblösst von Anschauung, Erfahrung und analytischem Calcul, so thun wir doch wohl besser, bei der alten Hypothese zu bleiben, bis Jemand eine neue, aber mathematisch begründete aufstellt.

Ludwig Matthiessen.

Bibliographie

vom 15. October bis 15. November 1868.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. 1868. II: 1. u. 2. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich; redig. v. R. Wolf. 13. Jahrg. 1. Heft. Zürich, Höhr. pro compl. 3 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgeg. von J. A. Grunert. 49. Thl. 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Herausgeg. von H. Guthe. 18. Jahrg. 1. Heft, Januar bis Juli 1868. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 7 Ngr.

Reine Mathematik.

Serret, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearb. von G. Wertheim. 2. Bd. Leipzig, Teubner. 2⅔ Thlr.

Baltzer, R., Die Elemente der Mathematik. 1. Bd. Arithmetik und Algebra. 3. Aufl. Leipzig, Hirzel. 1¼ Thlr.

Solin, J. M., Ueber die Normalenfläche zum dreiachsigen Ellipsoide längs einer Ellipse des Hauptsystems. Prag, Calve. ⅔ Thlr.

Binder, Das Malfatti'sche Problem. Tübingen, Fues. ½ Thlr.

Lange, Aufgaben aus der Elementargeometrie. 2. Heft. Berlin, Stilke & van Muyden. ⅓ Thlr.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 8. Aufl. Potsdam, Riegel. ⅚ Thlr.

Nagel, Ch. H., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 12. Aufl. Ulm, Wohler. ⅔ Thlr.

Focke, M., und M. Krass, Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. 1. Thl. Planimetrie. Münster, Coppenrath. 7/12 Thlr.

Kambly, L., Die Elementarmathematik. 1. Thl. Arithmetik. 2. Thl. Planimetrie. 10. u. 18. Aufl. Breslau, Hirt. à 12½ Ngr.

Baumann, J., Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. 1. Bd. Berlin, G. Reimer. 2⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Breymann, C., Sammlung geodätischer Aufgaben. Wien, Braumüller. 24 Ngr.

Rohr, R., Tafeln zur Berechnung relativer Höhen. Bern, Jent & Reinert. 2 Thlr.

Anleitung zur Einrichtung und zum Gebrauche des Polarplanimeters, insbesondere bei Anwendung des Metermaasses. Berlin, Geh. Oberhofbuchdruckerei. 2½ Ngr.

Hänel, v., Zur Theorie der Tonnengewölbe. Tübingen, Fues. 9 Ngr.

Ligowski, W., Taschenbuch der Mechanik (Phoronomie, Statik, Dynamik). Berlin, Ernst & Korn. ⅔ Thlr.

Evers, A., *and* J. Merrifield, *Navigation and nautical astronomy. London, Longmans.* 14 sh.

Physik.

Dehms, F., Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Widerstandseinheit. Berlin, Ernst & Korn. ⅔ Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1867.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Akustik.

Vergl. Wärmelehre 417.

Analytische Geometrie der Ebene.

193. Ueber einige Curven höheren Grades. Hochheim. Grun. Archiv XLVII, 121.
194. *On a property of curves which fulfil the condition* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0$. *Rankine. Phil. Mag. XXXIV*, 65.
195. Die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks analytisch behandelt. Metzler. Grun. Archiv XLVII, 243.
196. *Lieu engendré au moyen de deux circonférences. Kaher Bey. N. ann. math. XXVI*, 515.
197. *Discussion de la courbe* $13y=p(25x-12x^3)$. *Welsch. N. ann. math. XXVI*, 377.
Vergl. Bipolarcoordinaten. Brennpunkte. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

198. Grundzüge von Plücker's neuer Raumgeometrie. Dronke. Zeitschr. Math. Phys. XII, 481.
199. *Sulle teoria delle coordinate curvilinee. Brioschi. Annali mat. Ser. II, I*, 1.
200. *Sulla coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. Codazzi. Annali mat. Ser. II, I*, 293.
201. *De la courbure inclinée d'un système de lignes coordonnées et du rôle de cette courbure dans la théorie des lignes tracées sur une surface. Aoust. Compt. rend. LXV*, 814.
202. Bemerkungen über Raumcurven. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XII, 510.
203. Die Winkel zweier Ebenen auszudrücken durch ihre Parameter auf drei schiefwinkligen Axen. Junghann. Zeitschr. Math. Phys. XII, 350.
204. *On donne un cylindre droit, une hélice tracée sur ce cylindre et une sphère inscrite. Une droite horizontale se meut en s'appuyant sur l'hélice et reste tangente à la sphère inscrite étudier la surface engendrée par la droite. Lepage. N. ann. math. XXVI*, 504.
Vergl. Ellipsoïd. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

205. *Sur les orbites des comètes. Loewy. Compt. rend. LXV*, 458.
206. *On the change that would be superinduced upon an Elliptic Orbit if the intensity of the force of gravity were influenced by the centripetal velocity of the Orbital Body. Waterston. Phil. Mag. XXXIV*, 55.
207. Zur Entwicklung der Störungsfunction. Gyldén. Astr. Nachr. LXX, 151.

208. *Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune.* **Puiseux.** *Compt. rend. LXIV,* 118.
209. *Lois de l'insolation.* **Lambert.** *Compt. rend. LXIV,* 156.
Vergl. Optik.

Attraction.

210. Geometrischer Ort aller der Punkte, welche von einem Ellipsoide gleich stark angezogen werden. **S. Spitzer.** Grun. Archiv XLVII, 82.
Vergl. Geodäsie 256. Potential.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

211. *Développement des séries à termes alternativement positifs et négatifs à l'aide des nombres de Bernoulli.* **Thoman.** *Compt. rend. LXIV,* 655.

Bestimmte Integrale.

212. *On the conversion of integrals.* **Cockle.** *Phil. Mag. XXXIII,* 537; *XXXIV,* 442.
213. *Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati.* **Schlaefli.** *Annali mat. Ser. II, I,* 232.
214. Zur Theorie der bestimmten Integrale und der Gammafunctionen. **Matthiessen.** Zeitschr. Math. Phys. XII, 302.
215. *Sur l'intégrale* $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **Hermite.** *Annali mat. Ser. II, I,* 155.
216. *Sur l'intégrale double* $\int\int (\theta - \sin\theta)\,dx\,dy$. **Crofton.** *Compt. rend. LXV,* 994.
Vergl. Reihen 399.

Bipolarcoordinaten.

217. Einfache Construction der Berührungslinie an die Lemniscate. **Cantor.** Zeitschr. Math. Phys. XII, 428. [Vergl. No. 23.]
218. Ueber orthogonale Trajectorien in bipolaren Coordinaten. **Baur.** Zeitschr. Math. Phys. XII, 430. [Vergl. No. 23.]

Biquadratische Reste.

219. *Mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques.* **Emile Mathieu.** *Journ. mathém. XXXII,* 377. — *Compt. rend. LXIV,* 568.

Brennpunkte.

220. *Lieu des foyers des coniques inscrites dans un parallélogramme donné.* **Lippmann.** *N. ann. math. XXVI,* 456.
221. *Lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites données.* **Lippmann.** *N. ann. math. XXVI,* 496.

C.

Capillarität.

222. *Sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires.* **Boussinesq.** *Compt. rend. LXV,* 46.

Combinatorik.

223. *On inverse orthogonal matrices.* **Sylvester.** *Phil. Mag. XXXIV,* 461.

Cubatur.

224. *Sur les volumes trapézoïdaux.* **Giard.** *N. ann. math. XXVI,* 408.
Vergl. Nautik. Tetraeder 412.

Cycloide.

225. *L'enveloppe des droites coupant une cycloide sous un angle constant est une cycloide égale.* **Rouquet.** *N. ann. math. XXVI,* 380.

D.

Determinanten.

Vergl. Gleichungen 279. Sturm'sche Functionen.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

226. *Coniques circonscrites à un triangle de manière à ce que les normales aux trois sommets passent par un même point.* *Lefebure & Minisrloux.* *N. ann. math. XXVI*, 510.
227. *Démonstration nouvelle du théorème de Mr. Casey par rapport aux cercles qui touchent à trois cercles donnés.* *Cayley.* *Annali mat. Ser. II, I*, 132.
228. Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte. C. A. v. Drach. Zeitschr. Math. Phys. XII, Supplement 73.
229. Ueber die 4- und 5 punktige Berührung einer Geraden mit einer algebraischen Fläche. Gordan. Zeitschr. Math. Phys. XII, 495.

Differentialgleichungen.

230. Beweis eines die Pfaff'sche Integrationsmethode betreffenden Lehrsatzes. Zajaczkowski. Grun. Archiv XLVII, 106.
231. Integration einer Differentialgleichung, welche durch sämmtliche Differentialquotienten der abhängig Veränderlichen mit constanten Factoren gleich dem $x$fachen eines Differentialquotienten sich bildet. S. Spitzer. Grun. Archiv XLVII, 110.
232. Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung mit constanten Coefficienten. Tychsen. Zeitschr. Math. Phys. XII, 507.
233. *Intégration de l'équation* $(y+z)\frac{dz}{dx}+(z+x)\frac{dz}{dy}=x+y$. *Gigon.* *N. ann. math. XXVI*, 398.
234. *Intégration des équations simultanées* $\frac{dy}{dx}+u'y-v'z=0$, $\frac{dz}{dx}+v'y+u'z=0$, u *et* v *étant des fonctions données de* x. *Gigon.* *N. ann. math. XXVI*, 551. — *Pépin ibid.* 553.
235. *Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées en nombre quelconque de premier ordre linéaires et circulairement symétriques par rapport à toutes les variables dépendantes.* *Gigon.* *N. ann. math. XXVI*, 400.

Vergl. analytische Geometrie der Ebene 194. Bestimmte Integrale 213.

Differentialquotienten.

236. Ueber „begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. Grünwald. Zeitschr. Math. Phys. XII, 441.

E.

Electrodynamik.

237. *A contribution to electrodynamics.* *Riemann.* *Phil. Mag. XXXIV*, 368.
238. *On the mechanical theory of the electrical current.* *Gerlach.* *Phil. Mag. XXXIV*, 382.
239. *On the identity of the vibrations of light with electrical currents.* *Lorenz.* *Phil. Mag. XXXIV*, 287.
240. Ueber die Verwendung einer gemeinschaftlichen Batterie für vielfache Schliessungskreise. Militzer. Wien. Akad.-Ber. LIV, 352.

Ellipse.

241. Den Durchschnittspunkt zweier Berührungslinien der Ellipse zu finden. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 227.
242. Ueber einen Satz von dem der Ellipse eingeschriebenen Dreiecke. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 462.
243. Geometrischer Ort des Punktes, von welchem zwei Berührungslinien mit gleich grosser Berührungssehne an die Ellipse gezogen werden. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 477.

244. Ueber einige Sätze von der Ellipse. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 480.
245. *Sur des parallélogrammes inscrits dans une ellipse.* Annequin & Morel. *N. ann. math.* XXVI, 420.
246. *Les cercles circonscrits aux différents triangles sémi-réguliers inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.* Pellet *N. ann. math.* XXVI, 466.
   Vergl. Rectification 392.

Ellipsoid.

247. *Cônes de révolution dont le sommet est un point de la surface d'un ellipsoïde et les directrices les sections du même ellipsoïde avec des plans passant par une droite donnée.* Ellie. *N. ann. math.* XXVI, 457. — Welsch *ibid.* 459. — Duvivier *ibid.* 462.
248. Ueber eine das Ellipsoid betreffende Aufgabe. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 204.
   Vergl. Attraction. Normalen. Wärmelehre 420.

Elliptische Transcendenten.

249. *Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques.* Björling. Grun. Archiv XLVII, 399.
250. *Sur la transformation cubique d'une fonction elliptique.* Cayley. *Compt. rend.* LXIV, 560.

F.

Factorenfolge.

251. *Somme des* n *premiers produits de* p *nombres entiers consécutifs.* Laisant, *N. ann. math.* XXVI, 366.

Functionen.

252. Bestimmung der symmetrischen Function $(x_0^n + x_1^n)(x_0^n + x_2^n)(x_0^n + x_3^n) \ldots (x_{m-2}^n + x_{m-1}^n)$ der Wurzeln einer Gleichung vom m^{ten} Grade. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XII, 322.
253. *Des fonctions* $\varphi(x) = \Sigma \frac{x^n}{1.2..(2n)}$ *et* $\varphi_1(x) = \Sigma \frac{x^n}{1.2...(2n+1)}$. Grossouvre. *N. ann. math.* XXVI, 374.
254. *Propriétés de la fonction* x_n *donnée par l'équation* $x_n = (p + \sqrt{p^2 + q x_{n-1}})^{\frac{1}{2}}$ *ajoutant que* p *et* q *sont positifs et* $x_1 = \sqrt{p}$. Berquet & Jouffrey. *N. ann. math.* XXVI, 323.
   Vergl. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Gammafunctionen. Homogene Functionen. Kugelfunctionen. Laplace'sche Functionen. Logarithmen. Sturm'sche Functionen.

G.

Gammafunctionen.

   Vergl. Bestimmte Integrale 214.

Geodäsie.

255. *On the figure of the earth as obtained from geodetic data.* Pratt. *Phil. Mag.* XXXIII, 10, 145, 261, 332, 445.
256. *De l'effet des attractions locales sur les longitudes et les azimuts; application d'un nouveau théorème à l'étude de la figure de la terre.* Yvon Villarceau. *Journ. Mathém.* XXXII, 65.
257. Messung auf der kurzen Basis. L. v. Pfeil. Grun. Archiv XLVII, 49.
258. Ein Punkt auf einer gegebenen Geraden soll aus dem daselbst gemessenen Winkel zwischen 2 ausserhalb der Geraden liegenden Punkten bestimmt werden. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XII, 505.
   Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Geometrie (descriptive).

259. Ueber die räumliche Projection (Reliefperspective), insbesondere diejenige der Kugel. Morstadt. Zeitschr. Math. Phys. XII, 326.
260. Die Grenzebene. Anton. Wien. Akad.-Ber. LIV, 230.
261. Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz der Axonometrie. Reye. Zeitschr. Math. Phys. XII, 433.

Geometrie (höhere).

262. Einige allgemeine Sätze über algebraische Curven. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XII, 352. [Vergl. Bd. XI, No. 225.]
263. *Sur les courbes exceptionelles. Chasles. Compt. rend. LXIV*, 799. — *Cayley, Cremona, Hirst ibid.* 1079.
264. *Sur une espèce particulière de surfaces et de courbes algébriques et sur des propriétés générales des courbes du quatrième ordre. De Hunyady. Compt. rend. LXIV*, 218, 497.
   Vergl. Krümmung. Normalen.

Geschichte der Mathematik.

265. *Sur un papyrus egyptien contemporain de Salomon contenant un fragment d'un traité de géométrie appliquée à l'arpentage. Lenormant. Compt. rend. LXV*, 903.
266. Ueber die παραβολή des Pythagoras. Wex. Grun. Archiv XLVII, 146.
267. Platon's Geometrie im Menon. Wex. Grun. Archiv XLVII, 131.
268. Euclid und sein Jahrhundert. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XII, Supplem. 1.
269. *Sur le Calcul de Victorius et le Commentaire d'Abbon. Chasles. Compt. rend. LXIV*, 1059.
270. *Sur une édition de l'ouvrage Arabe „Introduction au calcul Gobârì et Hawâï". Chasles. Compt. rend. LXIV*, 82.
271. *Débats entre Mr. Chasles et divers autres savants sur la question si Pascal a pu connaître la loi d'attraction. Compt. rend. LXV*, 89 — 1060.
272. *Sur l'établissement des Académies. Chasles. Compt. rend. LXV*, 49.
273. Huygens, der Erfinder des Reversionspendels. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 119.
274. *Sur l'origine de la découverte du théorème de Sturm. Duhamel. N. ann. math. XXVI*, 427.
275. *Michael Farady, his life and works. De la Rive. Phil. Mag. XXXIV*, 409.
276. Nekrolog von Georg Merz † 12. Januar 1867. S. Merz. Astr. Nachr. LXX, 361.
277. Nekrolog von Valz † 22. Februar 1867. Tempel. Astr. Nachr. LXIX, 13.
278. Nekrolog von Eugène Prouhet. Gérono. *N. ann. math. XXV*I, 385.

Gleichungen.

279. *Mémoire sur la résolution algébrique des équations. Camille Jordan. Journ. Mathém. XXXII*, 109. — *Compt. rend. LXIV*, 269, 586, 1179.
280. *On the order of the conditions that an algebraical equation may have a set of multiple roots. S. Roberts. Phil. Mag. XXXIII*, 530.
281. *Sur les racines de l'équation* $F(x)=0$ *et de l'équation* $F(x)-k.F'(x)=0$. *Realis. N. ann. math. XXVI*, 415.
282. *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue. Lill. Compt. rend. LXV*, 854. — *N. ann. math. XXVI*, 359..
283. *Sur la simplification et la vérification des calculs relatifs au théorème du Sturm. Housel. N. ann. math. XXVI*, 351.
284. Ueber ein die cubischen Gleichungen betreffendes Problem. Matthiessen. Grun. Archiv XLVII, 460. [Vergl. No. 81.]
285. *Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré. De Virieu. N. ann. math. XXVI*, 444.
286. Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung. Kerz. Grun. Archiv XLVII, 363. [Vergl. Bd. XII No. 275.]
287. *La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado. Brioschi. Annali mat. Ser. II, I*, 222.
288. *Sur les équations du cinquième degré. Michael Roberts. Annali mat. Ser. II, I*, 135. [Vergl. No. 83.]

289. Umformung von $z^5 - a z^4 + b z^3 - c z^2 + d z - e = 0$ in $y^5 + y + \lambda = 0$ mittelst Tschirnhausen'scher Substitutionen. Sievers. Astr. Nachr. LXX, 353.
290. *Sur l'équation du sixième degré.* Joubert. *Compt. rend. LXIV,* 1025, 1081, 1237.
291. *Sur un théorème de M. Hermite relatif à la transformation des équations.* Combescure. *Compt. rend. LXIV,* 174.
292. *Sur deux équations* U = 0 *et* V = 0 *desquelles on tire la même équation comme résultant de l'élimination de certaines variables entre les équations données et leurs dérivées.* Laisant. *N. ann. math. XXVI,* 473.
293. Auflösung der Gleichungen $x^2+y^2+z^2=a$, $x+y+z=b$, $y-z=c$. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 241.
294. Einfachste Auflösung der Gleichungen $x^3+y^3=a$, $x^2y+xy^2=b$. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 118.

Vergl. Combinatorik. Functionen 252. Geschichte der Mathematik 274. Imaginäres 308.

H.

Homogene Functionen.

295. *Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation.* Schramm. *Annali mat. Ser. II, I,* 259.
296. *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie.* Clebsch & Gordan. *Annali mat. Ser. II, I,* 23.
297. *Sull' equazione modulare della trasformazione di quinto ordine.* Gordan. *Annal. mat. Ser.. II, I,* 367.
298. *Sur les formes binaires du sixième degré.* Clebsch & Gordan. *Compt. rend. LXIV,* 582.
299. *Il discriminante delle forme binarie del sesto grado.* Brioschi. *Annali mat. Ser. II. I,* 159.

Vergl. Quadratische Formen.

Hydrodynamik.

300. *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* Jordan. *Annali mat. Ser. II, I,* 170.
301. *Études sur l'écoulement et le mouvement des eaux.* Gauchler. *Compt. rend. LXIV,* 818.
302. *On the dynamical theory of deep-sea-tides and the effect of tidal friction.* Heath. *Phil. Mag. XXXIII,* 165, 400. — Stone *ibid.* 318.

Hyperbel.

303. *Construction de l'hyperbole.* Habich. *N. ann math. XXVI,* 446.
304. Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel. Barsky. Grun. Archiv XLVII, 235. [Vergl. No. 90.]
305. *Sur les hyperboles ayant pour asymptote une droite donnée et tangentes à une seconde droite à un point fixe.* Cayla. *N. ann. math. XXVI,* 489.
306. *Lieu des foyers d'une hyperbole équilatère tangente et concentrique à une ellipse donnée.* Ravon. *N. ann. math. XXVI,* 424.

I.

Imaginäres.

307. *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Beltrami. *Annali mat. Ser. II, I,* 329.
308. *Criterium pour savoir si une équation* U = 0 *a des racines imaginaires.* Pellet. *N. ann. math. XXVI,* 517.
309. Ueber scheinbare Unstetigkeit geometrischer Constructionen, welche durch imaginäre Elemente derselben verursacht wird. Wiener. Zeitschr. Math. Phys. XII, 375.

Integrationen.

310. *Sur l'integration de quelques fonctions contenant un radical du second degré.* Koehler. *N. ann. math. XXVI*, 448.

K.

Kegelschnitte.

311. Construction der Directrix eines Kegelschnittes. Curtze. Grun. Archiv XLVII, 358.
312. *Propriété d'une conique circonscrite à un triangle.* Driant. *N. ann. math. XXVI*, 327.
313. *Théorème sur un triangle inscrit à une conique.* Willière de Thuin. *N. ann. math. XXVI*, 556. — Koehler *ibid.* 557.
314. Ueber das einem Kegelschnitte eingeschriebene Viereck. Curtze. Grun. Archiv XLVII, 356.
315. *Sur la théorie des systèmes de coniques.* Salvatore Dino. *Compt. rend. LXV*, 499.
316. *Théorèmes sur les coniques homofocales.* Volpicelli. *Compt. rend. LXIV*, 224.
317. *Sur les coniques conjuguées par rapport à un triangle.* Painvin. *N. ann. math. XXVI*, 433.

Vergl. Brennpunkte. Ellipse. Hyperbel. Imaginäres 309. Kreis. Parabel.

Kreis.

318. *Sur une transformation du théorème de Ptolémée et sur une relation analogue dans la sphère.* Fouret. *N. ann. math. XXVI*, 497.
319. Gegeben sind 3 Punktenpaare. Man soll einen solchen Kreis construiren, dass dieselben in Bezug auf ihn conjugirte sind. Fuhrmann. Grun. Archiv XLVII, 47.
320. Ueber einen Satz vom Kreise. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 468.
321. *Décrire un cercle qui rencontre 3 droites ou 3 circonférences de manière que les cordes interceptées soient égales à une longueur donnée.* De Villepin. *N. ann. math. XXVI*, 370.
322. Ueber die ausgezeichneten Kreise des Dreiecks. Kücker. Grun. Archiv XLVII, 1.
323. *Placer sur trois circonférences données les sommets d'un triangle dont les côtés soient parallèles aux droites qui unissent deux à deux les centres de ces circonférences.* Fornasari. *N. ann. math. XXVI*, 476.
324. *Théorème sur quatre circonférences* Geoffroy. *N. ann. math. XXVI*, 559. — Macé *ibid.* 561.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 227. Ellipse 246. Rectification 390, 391.

Krümmung.

325. *Détermination géométrique, pour un point de la surface des ondes, de la normale, des centres de courbure principaux et des directions des lignes de courbure.* Mannheim. *Compt. rend. LXIV*, 170, 268.

Vergl. Schwerpunkt.

Krystallographie.

326. Ueber einen besonderen Fall anomaler Flächenneigung beim Apatit. Purgold. Zeitschr. Math. Phys. XII, 340.

Kugelfunctionen.

327. *Sopra le funzioni sferiche.* Betti. *Annali mat. Ser. II, I*, 81.

L.

Laplace'sche Functionen.

328. *Alcune osservazioni intorno alle funzioni di Laplace.* Schlaefli. *Annali mat. Ser. II, I*, 243.

Lemniscate.

Vergl. Bipolarcoordinaten 217.

Logarithmen.

329. *Sur la recherche d'un logarithme isolé avec un grand nombre de décimales.* Lefort. *N. ann. math. XXVI*, 308.

M.

Maxima und Minima.

330. Ueber das Maximum oder Minimum der Summe der positiven und negativen Quadrate der Abstände eines Punktes von 3 Geraden einer Ebene. Wetzig. Zeitschr. Math. Phys. XII, 281. [Vergl. Bd. IX, No. 130.]

Vergl. Optik 363. Variationsrechnung.

Mechanik.

331. Ueber die Bestimmung eines Punktes in der Richtungslinie der Resultirenden eines beliebigen Systems von Kräften. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 164.
332. *A new attempt to determine the resultant of two pressures on a fixed point.* Keely. *Phil. Mag. XXXIV*, 354.
333. *Sur la théorie moléculaire des corps.* Guldberg. *Compt. rend. LXV*, 941.
334. *Sur l'action réciproque de deux molécules.* Boussinesq. *Compt. rend. LXV*, 44.
335. *Équations des petits mouvements des milieux isotropes comprimés.* Boussinesq. *Compt. rend. XLV*, 167.
336. *Sur les forces centrifuges mises en usage par Poinsot dans sa théorie de la rotation des corps.* Breton (des Champs). *N. ann. math. XXVI*, 362.
337. *Sur un théorème de Jacobi.* Bresse. *Compt. rend. LXV*, 1085.
338. *Mouvements relatifs à la surface de la terre.* Page. *N. ann. math. XXVI*, 387, 481. [Vergl. No. 131.]
339. *Mouvement d'un point materiel pesant sur une parabole tournante autour de son axe.* Dieu. *N. ann. math. XXVI*, 302.
340. *Mouvement occasionné par le changement d'une force qui à l'extrémité d'une corde tenait équilibre à un corps pesant attaché à la corde au moyen d'une poulie mobile.* Dieu. *N. ann. math. XXVI*, 298.
341. *Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a sè stessa, scorre con tre delle sue rette sopra tre punti fissi.* Wiener. *Annali mat. Ser. II, I*, 139.
342. *Sul moto di un pendolo, quando la retta passante pel punto di sospensione e pel centro di gravità è, per questo punto in solo asse principale d'inerzia che sia determinato di posizione.* Schlaefli. *Annali mat. Ser. II, I*, 105.
343. Wurfbewegung im widerstehenden Mittel. Nell. Grun. Archiv XLVII, 338, 449. [Vergl. No. 129.]
344. Der Centrifugalflügel. Martin. Wien. Akad.-Ber. LIV, 412.
345. *Sur le mouvement longitudinal d'un système de plusieurs prismes.* De Saint-Venant. *Journ. Mathém. XXXII*, 237. [Vergl. Bd. XII, No. 317.]
346. *Sur le choc longitudinal des barres parfaitement élastiques.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXIV*, 1009, 1192.
347. Ueber ein neues von de Saint-Venant ausgesprochenes Theorem der Mechanik. Lippich. Wien. Akad.-Ber. LIV, 63.

Vergl. Astronomie. Capillarität. Electrodynamik. Hydrodynamik. Optik. Schwerpunkt. Variationsrechnung 416. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

348. *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés.* Bienaymé. *Journ. Mathém. XXXII*, 158.
349. Der mittlere Fehler und die königlich preussische Landestriangulation. Wittstein. Astr. Nachr. LXIX, 289.
350. Die Ausgleichung beobachteter Richtungen und die königlich preussische Landestriangulation. Wittstein. Astr. Nachr. LXIX, 321.

N.

Nautik.

351. Ueber einige Formeln zur annähernden Berechnung der körperlichen Räume mit besonderer Rücksicht auf die Aichung der Schiffe. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 176.

Normale.

352. *Sulle normali all' ellissoide.* *Geiser.* *Annali mat. Ser. II, I,* 317.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 226. Krümmung.

O.

Oberflächen.

353. Einige Sätze aus der Analysis Situs Riemann'scher Flächen. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XII, 361.
354. *Théorie générale des surfaces réglées leur classification et leur construction.* *Plücker.* *Annali mat. Ser. II, I,* 160.
355. *Sulle superficie che hanno le linee di curvatura piane.* *Dini.* *Annali mat. Ser. II, I,* 146.
356. *Sur une propriété de l'équation différentielle des lignes de plus grande pente.* *Breton (de Champ).* *Compt. rend. LXIV,* 407.
357. *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche.* *Cremona.* *Annali mat. Ser. II, I,* 248.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 229. Krümmung.

Oberflächen zweiter Ordnung.

358. *Discussion de l'équation qui donne les plans principaux d'une surface du second degré.* *Forestier.* *N. ann. math. XXVI,* 355.
359. *Des surfaces du second degré ayant une même intersection.* *Aoust.* *Compt. rend. LXIV,* 590, 746.
360. *Sur une propriété des surfaces homofocales du second ordre.* *Gilbert.* *N. ann. math. XXVI,* 529.
Vergl. Ellipsoid.

Operationscalcul.

361. *On the multiplication of partial differential operators.* *Sylvester.* *Phil. Mag. XXXIII,* 48.

Optik.

362. *Théorie nouvelle des ondes lumineuses.* *Boussinesq.* *Compt. rend. LXV,* 235.
363. Ueber das Brechungsgesetz. F. Eisenlohr. Zeitschr. Math. Phys. XII, 438. [Vergl. No 122.]
364. Ueber merkwürdige Punkte der Spiegel- und Linsensysteme. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 84.
365. Eine auffällige Eigenheit der Richtungen der durch ein Prisma oder durch mehrere Prismen mit parallelen Kanten gebrochenen Lichtstrahlen. Matzka. Grun. Archiv XLVII, 74.
366. Ueber den Einfluss der Bewegung der Lichtquelle auf die Brechung. Sohncke. Astr. Nachr. LXIX, 209.
367. *Sur la réflexion et la réfraction cristallines.* *Briot.* *Compt. rend. LXIV,* 950. — *Journ. Mathém. XXXII,* 185.
368. *Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux.* *Sarrau.* *Journ. Mathém. XXXII,* 1.
369. *Théorème sur la relation de position des vibrations incidende, réfléchie et réfractée dans les milieux isotropes.* *Le Roux.* *Compt. rend. LXIV,* 38.
370. *Sur l'emploi de la diffraction pour déterminer la direction des vibrations dans la lumière polarisée.* *Gilbert.* *Compt. rend. LXIV,* 161.
371. Ueber die Lichtmenge, welche im Polarisationsapparat durch eine zur optischen Axe oder zur ersten Mittellinie senkrecht geschnittene Krystallplatte hindurchgeht. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XII, 514.
372. *Recherches sur la diffraction de la lumière polarisée.* *Potier.* *Compt. rend. LXIV,* 960.

373. *Sur la théorie de la dispersion de la lumière.* Renard. *Compt. rend. LXIV*, 357.
374. Theorie der Beugungserscheinungen in doppeltbrechenden Medien. Ditscheiner. Wien. Akad.-Ber. LIV, 523.
Vergl. Electrodynamik 239.

P.

Parabel.

375. Ueber das von drei Berührenden einer Parabel gebildete Dreieck. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 403.
376. *Construction de la développée de la parabole.* Habich. *N. ann math. XXVI.* 447.
Vergl. Mechanik 339.

Philosophie der Mathematik.

377. *Sur le principe et la règle des signes.* Abel Transon. *N. ann. math. XXVI*, 289.
378. *Sur l'usage et l'emploi des quantités négatives.* Prouhet. *N. ann. math. XXVI*, 337.

Planimetrie.

379. Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 307.
380. *On the twelfth axiom of Euclid.* Murray. *Phil. Mag. XXXIII*, 264.
381. Satz vom Dreieck. Curtze. Grun. Archiv XLVII, 357.
382. Eigenschaft der gemeinschaftlichen Berührungslinie an den Inkreis und Mittenkreis eines Dreiecks. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XII, 354.
383. *Deux figures polygonales équivalentes étant données on demande si l'une se peut décomposer en parties superposables à l'autre.* Sévène. *N. ann. math. XXVI*, 494.
384. *On isoperimetric regular polygons.* Rankine. *Phil. Mag. XXXIV*, 365.
Vergl. Zahlentheorie 427, 428.

Potential.

385. *On professor Stokes's proof of Clairaut's theorem.* Pratt. *Phil. Mag. XXXIV*, 25.
386. *On the internal distribution of matter which shall produce a given potential at the surface of a gravitating mass.* Stokes. *Phil. Mag. XXXIV*, 235.
Vergl. Attraction.

Q.

Quadratische Formen.

387. *Sur la forme à cinq indéterminées* $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5$. Liouville. *Journ. Mathém. XXXII*, 47.

Quadratur.

388. Eine angenäherte Quadratur. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XII, 355.
389. Betrachtung des Flächeninhaltes der Curve, deren Gleichung $r = \frac{\gamma}{1 + tg\,\alpha}$. Bender. Grun. Archiv XLVII, 45.

R.

Rectification.

390. *On the approximate rectification of circular arcs.* Rankine. *Phil. Mag. XXXIV*, 381.
391. *On the approximate drawing of circular arcs of given lengths.* Rankine. *Phil. mag. XXXIV*, 284.
392. *Construire un cercle dont la circonférence égale la circonférence d'une ellipse en négligeant la huitième puissance de l'excentricité.* Muzeau. *N. ann. math. XXVI*, 331.

Reihen.

393. *Sur le nombre* e. Realis. *N. ann. math. XXVI*, 541.
394. Zur Entwicklung von $\cos \mu\theta$ und $\sin \mu\theta$ nach den ganzen Vielfachen von θ. Gyldén. Astr. Nachr. LXIX, 193.

395. Ueber die Darstellung des Sinus (Cosinus) eines Vielfachen von x durch eine Reihe, welche nach den Sinussen (Cosinussen) des Vielfachen von y fortgeht unter der Voraussetzung $tg\,x = m \cdot tg\,y$. Wolfers. Astr. Nachr. LXIX, 41.

396. Summirung von Sinus- und Cosinusreihen. Curtze. Grun. Archiv XLVII, 238. [Vergl. No. 168.]

397. *Sur la recherche des fonctions auxiliaires dans l'application de la methode Kummer à la sommation des séries. Bresse. Compt. rend. LXIV,* 1023, 1138.

398. Summirung einer Reihe von Kreisbogen. Roiti. Grun. Archiv XLVII, 361.

399. Summirung einer Reihe mit Hilfe des Integrals $\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 359.

400. Ueber $lim\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{2m}\right]$ bei $m=\infty$. Unferdinger. Grun. Archiv XLVII, 23.

401. *Limite de la série* $\Sigma(-1)^n \frac{p_n}{q_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}$ *tous les* p *et* q *étant des nombres entiers. Pellet. N. ann math. XXVI,* 372.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Zahlentheorie 429.

S.

Schwerpunkt.

402. Ueber den Krümmungsschwerpunkt algebraischer Curven. C. Neumann. Zeitschr. Math. Phys. XII, 425. [Vergl. No. 172.]

403. *Sul baricentro di curvatura delle curve algebriche. C. Neumann. Annali mat. Ser. II, I,* 2-0.

404. *Sul baricentro di curvatura delle superficie algebriche. C. Neumann. Annali mat. Ser. II, I,* 283.

Sphärik.

405. Die Pothenot'sche Aufgabe auf der Kugel. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 194.

406. *Sur la plus courte distance de deux points sur la sphère. Delaunay. N. ann. math. XXVI,* 454.

Vergl. Geometrie (descriptive) 259. Kreis 319.

Stereometrie.

407. Elementarer Beweis des Satzes von der körperlichen Gleichheit dreiseitiger Pyramiden. Hessel. Grun. Archiv XLVII, 433.

408. *On the partition of the cube and some of the combinations of its parts. Willich. Phil. Mag. XXXIII,* 27.

409. Die Construction der fünf regulären Körper. Sohncke. Grun. Archiv XLVII, 39.

Sturm'sche Functionen.

410. *Sur les fonctions de Sturm. Gilbert. Journ. Mathém. XXXII,* 87.

T.

Tetraeder.

411. *Inclinaisons mutuelles des arètes opposées du tétraèdre. Dostor. N. ann. math. XXVI,* 452.

412. *Diverses expressions du volume du tétraèdre. Dostor. N. ann. math. XXVI,* 410.

Trigonometrie.

413. *Produit de 4 sinus et de 4 cosinus. Driaut. N. ann. math. XXVI,* 383. — *Dupain ibid.* 471.

414. Bestimmung eines Dreiecks aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 229.

Vergl. Gleichungen 285.

V.

Variationsrechnung.

415. *On the figure of the bullet which experiences the least resistance from the air.* Tarleton. *Phil. Mag. XXXIV*, 377.
416. Ueber die Curve des kleinsten Widerstandes. Dienger. Grun. Archiv XLVII, 229. [Vergl. Bd. XII, No. 308.]

W.

Wärmelehre.

417. *Application de la théorie mécanique de la chaleur à l'étude de la transmission du son.* Dupré. *Compt. rend. LXIV*, 350.
418. *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie.* Christoffel. *Annali mat. Ser. II, I*, 89.
419. *Sopra la determinazione delle temperature variabili di una lastra terminata.* Betti. *Annali math. Ser. II, I*, 373.
420. *Sur un nouvel ellipsoïde, qui joue un grand rôle dans la théorie de la chaleur.* Boussinesq. *Compt. rend. LXV*, 104.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

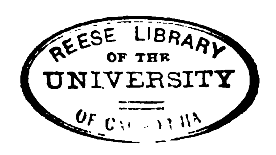
421. *Des valeurs moyennes.* De Tchébychef. *Journ. Mathém. XXXII*, 177.
422. Vermischtes aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Matthiessen. Grun. Archiv XLVII, 457.
423. *Sur quelques formules de probabilité.* Jordan. *Compt. rend. LXV*, 993.
424. Paschwerfen mit 6 Würfeln. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XII, 355.

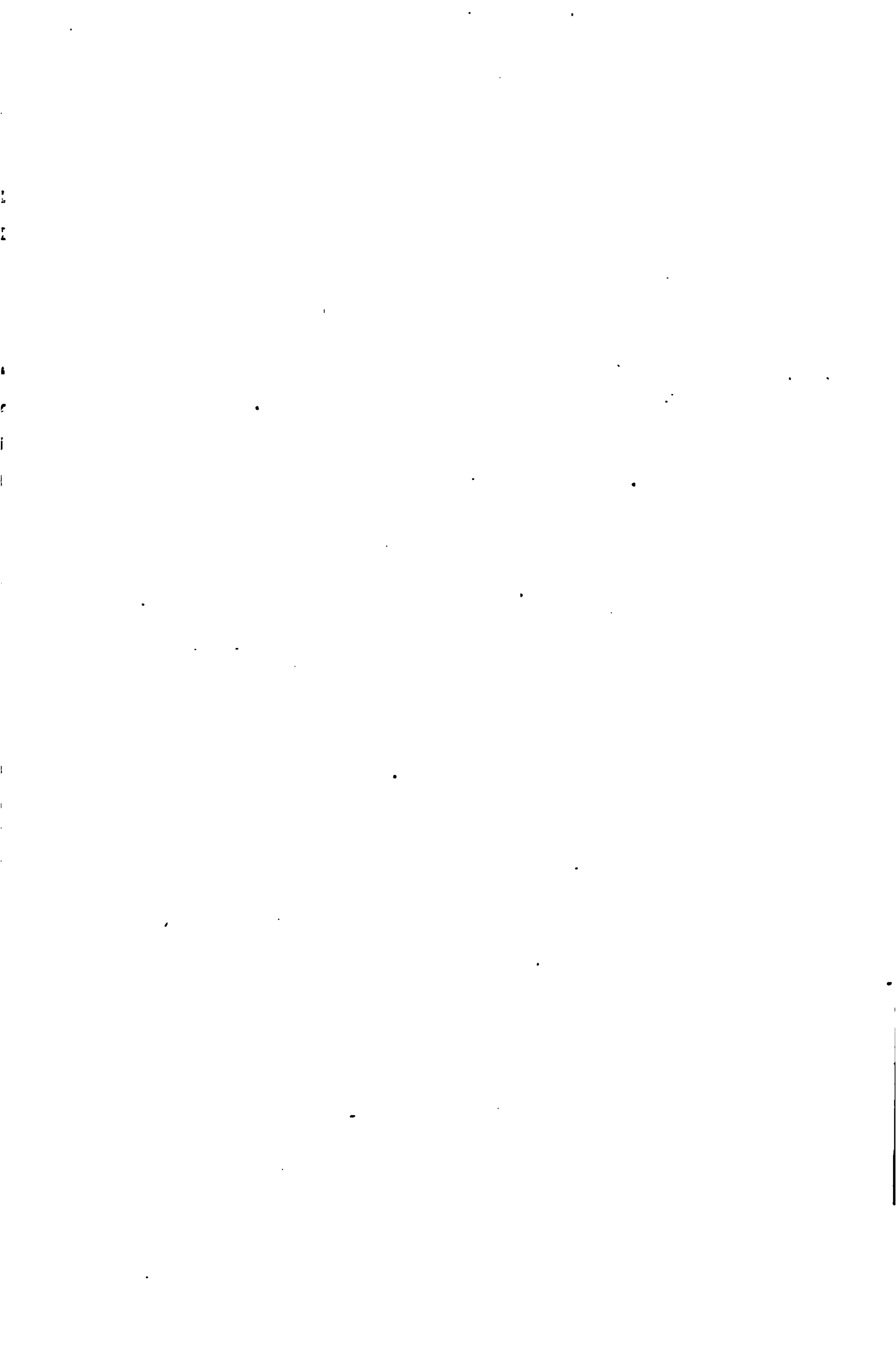
Z.

Zahlentheorie.

425. *Sur un caractère de divisibilité.* Dupain. *N. ann. math. XXVI*, 368.
426. Bemerkung über die dekadischen Werthe der Potenzen ganzer Zahlen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XII, 350.
427. Ueber Kreisvierecke, in welchen die Seiten, die Diagonalen, der Radius des Kreises und die Fläche rationale Zahlenwerthe haben. Ligowski. Grun. Archiv XLVII, 113.
428. Dreiecke zu bestimmen, deren Seiten rational sind und in denen die Summe der drei Seiten dreimal so gross ist, als die Höhe in Bezug auf eine dieser Seiten. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 233.
429. *Sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers.* Max Curtze, *Annali mat. Ser. II, I*, 285.
430. Ueber einen arithmetischen Satz von Lagrange. Grunert. Grun. Archiv XLVII, 328.
431. *Sur la fonction numérique qui exprime pour un déterminant négatif donné le nombre des classes de formes quadratiques, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.* Liouville. *Journ. Mathém. XXXII*, 98. [Vergl. Bd. XII, No. 170.]
432. *Réduction au second degré d'une équation indéterminée en x et y du troisième degré relativement à x ou y.* Le Besgue, *Compt. rend. LXIV*, 1267.

Vergl. Biquadratische Reste. Combinatorik. Quadratische Formen.








725,79
QA1
Z4
v.13
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY